ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

КУРСЪ СИСТЕМАТИЧЕСКІЙ

ВЪ ДВУХЪ ТОМАХЪ.

Составилъ Н. Н. Маракуевъ.

ТОМЪ I.

ТЕОРІЯ.

Изданіе второе, исправленное и дополненное.

МОСКВА.
Типо-литографія Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К°. Пименовская ул., соб. домъ.
1903.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Уравненія и неравенства второй и высшихъ степеней.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Анализъ соединеній и его приложенія.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Теорія рядовъ и логариѳмовъ.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Непрерывныя дроби и ихъ приложенія.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Выпуская въ свѣтъ 2-е изданіе своего курса элементарной алгебры, авторъ позаботился тщательно исправить всякіе случайные недосмотры и промахи, почти неизбѣжные въ первомъ изданіи. Весь курсъ сплошь былъ внимательно пересмотрѣнъ, причемъ введены всѣ усовершенствованія и всѣ новинки, какія успѣли накопиться со времени появленія 1-го изданія. Изложенію, при полной его ясности и простотѣ, авторъ старался придать совершенную научную строгость, съ устраненіемъ всякихъ мнимыхъ доказательствъ и недомолвокъ, обычныхъ въ нашихъ ходовыхъ курсахъ. Подъ мнимыми доказательствами мы разумѣемъ такіе пріемы, какъ, напримѣръ, выводъ разложеній функцій въ безконечные ряды по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ и т. п. Къ особенностямъ курса, отличающимъ его отъ другихъ аналогичныхъ явленій, принадлежитъ широкое развитіе одной стороны дѣла, весьма существенной и, несмотря на то, обыкновенно почти игнорируемой учебниками, именно **изслѣдованія** *вопросовъ 1-й и 2-й степени. Въ связи съ этимъ дано и болѣе широкое развитіе статьямъ о неравенствахъ и объ измѣненіи простѣйшихъ функцій, куда примыкаютъ и элементарные способы нахожденія максимальныхъ и минимальныхъ значеній функцій. Благодаря этому, въ нашемъ курсѣ элементарная алгебра приведена въ болѣе тѣсную связь съ аналитическою геометріею и съ высшимъ анализомъ: читатель исподволь подготовляется къ этимъ высшимъ частямъ математики. Что касается новинокъ, введенныхъ во 2-е изданіе, то изъ числа ихъ важнѣе другихъ усовершенствованія въ методахъ изслѣдованія вопросовъ 2-й степени: я разумѣю пла-*

ны **Жирода**, *и особенно* **Тартэнвилля**. *Расположеніе изслѣдованія, предложенное Тартэнвиллемъ, вноситъ въ это нелегкое дѣло необыкновенную ясность, стройность, порядокъ и относительную простоту. Изъ числа другихъ новинокъ стоитъ упомянуть: объ особомъ методѣ разложенія на множители симметричныхъ функцій; о новыхъ пріемахъ для отличенія паразитныхъ корней резольвента ирраціональнаго уравненія отъ корней, удовлетворяющихъ этому уравненію; о безукоризненно строгихъ доказательствахъ теоремы о maximum'ѣ произведенія, данныхъ* **Дарбу** *и* **Гурза**; *о преданномъ было забвенію, но возстановленномъ въ новыхъ курсахъ* **Эйлеровомъ** *доказательствѣ формулы Ньютонова бинома и т. д. Кромѣ того, прибавлены двѣ новыя главы, изъ коихъ въ одной разсматривается рѣшеніе полныхъ уравненій 3-й и 4-й степени, въ другой—рѣшеніе неопредѣленнаго ур—нія 2-й степени съ двумя перемѣнными.*

Количество задачъ значительно увеличено введеніемъ тамъ и сямъ задачъ новыхъ типовъ и, кромѣ того, прибавленіемъ 400 смѣшанныхъ задачъ, носящихъ характеръ болѣе трудныхъ упражненій, на которыхъ могутъ пытать свои силы болѣе успѣвающіе и болѣе талантливые учащіеся старшаго возраста.

Такъ какъ авторъ имѣлъ въ виду не только учениковъ, обучающихся въ учебныхъ заведеніяхъ, гдѣ они всегда найдутъ опору въ своихъ наставникахъ, но и такихъ лицъ, которыя обстоятельствами вынуждены готовиться дома, гдѣ они по большей части лишены опытныхъ руководителей,—въ виду этого, въ настоящемъ изданіи всѣ задачи снажбены отвѣтами, а болѣе трудныя—и полными рѣшеніями; вслѣдствіе этого, пришлось весь матеріалъ задачъ соединить въ особый томъ. Такимъ образомъ, весь курсъ раздѣленъ на два тома: I—Теорія; II—Задачи.

Въ видахъ удобства покупателей каждый томъ продается отдѣльно.

Составитель.

Одесса,
1 ноября 1902 г.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

ГЛАВА I.

Предварительныя понятія и опредѣленія.

1. Ньютонъ назвалъ алгебру *„всеобщей ариѳметикой“*.

Называя ее ариѳметикою, онъ хотѣлъ этимъ выразить, что предметъ алгебры тотъ же, что и ариѳметики,—изученіе чиселъ, слѣдовательно, что алгебра есть какъ бы продолженіе ариѳметики. Называя ее *всеобщей*, онъ этимъ самымъ указалъ, что цѣль алгебры заключается въ *обобщеніи* какъ самихъ вопросовъ о числахъ, такъ и способовъ ихъ рѣшенія.

Возьмемъ задачу: *найти два числа, которыхъ сумма равна 105, а разность 15?*

Рѣшая эту задачу *ариѳметическимъ путемъ*, мы стали бы разсуждать такъ: если бы оба искомыхъ числа были равны, то мы нашли бы ихъ, раздѣливъ пополамъ ихъ сумму. Но мы можемъ уравнять меньшее съ большимъ, если къ первому придадимъ 15, и если эту прибавку сдѣлать къ суммѣ обоихъ чиселъ, то результатъ 105 + 15, или 120, будетъ ни что иное, какъ удвоенное большее число, которое и найдемъ, раздѣливъ 120 на 2. Итакъ, большее число = 120 : 2, или 60; а слѣдовательно, меньшее найдемъ, уменьшивъ 60 на 15, что дастъ 45.

Для повѣрки достаточно числа 60 и 45 сложить, чтобы убѣдиться, составитъ ли ихъ сумма 105; повѣрка по отношенію къ разности (15) не нужна, такъ какъ меньшее число найдено вычитаніемъ этой разности изъ большаго.

Можно бы было идти инымъ путемъ: приравнивая большее число меньшему, можно уменьшать для этого большее число на 15. Если уменьшить 15-ью сумму, то результатъ, 105 — 15 = 90, представлялъ бы удвоенное меньшее число; и слѣдовательно, раздѣливъ 90 пополамъ, нашли бы въ результатѣ меньшее число — 45; а придавъ къ нему 15, нашли бы большее.

Рѣшеніе задачи значительно *упростится*, если искомыя мы обозначимъ буквами, что *сокращаетъ рѣчь*, а дѣйствія будемъ обозначать *знаками*, что *сокращаетъ письмо*. Этого рода сокращенія допускаетъ и ариѳметика.

Итакъ, обозначимъ меньшее число буквою x: тогда большее число будетъ

$x + 15$, а оба вмѣстѣ составятъ $x + x + 15$, или, короче, $2x + 15$, что, по условію, равно 105; записываемъ

$$2x + 15 = 105.$$

Неизвѣстное слагаемое ($2x$) опредѣляется вычитаніемъ изъ суммы (105) извѣстнаго слагаемаго (15); слѣд. $2x = 105 - 15 = 90$. Отсюда $x = 90 : 2 = 45$. Придавъ 15 къ 45, найдемъ большее число.

Отсюда видно, какимъ образомъ введеніе знаковъ для обозначенія дѣйствій, и буквы x для обозначенія искомаго *сокращаетъ рѣчь и письмо*, и этимъ самымъ ускоряетъ рѣшеніе задачи. Чѣмъ сложнѣе задача, тѣмъ важнѣе введеніе этихъ, сокращающихъ запись и рѣчь, знаковъ.

2. Окончательные результаты, полученные нами при рѣшеніи задачи, т.-е. числа 45 и 60, не носятъ на себѣ слѣда данныхъ чиселъ и тѣхъ дѣйствій, путемъ которыхъ эти результаты найдены. Въ самомъ дѣлѣ, по мѣрѣ выполненія дѣйствій, данныя числа замѣнялись новыми; потому-то найденные результаты не даютъ никакого понятія о томъ, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ нужно совершить надъ данными числами для полученія искомыхъ. Чтобы это было видно, нужно только обозначать дѣйствія знаками, воздерживаясь отъ всякихъ вычисленій. Поступая такъ въ предыдущей задачѣ, мы нашли бы для меньшаго числа выраженіе

$$x = \frac{105 - 15}{2},$$

изъ котораго можно заключить, что для нахожденія меньшаго числа нужно изъ заданной суммы вычесть данную разность и остатокъ раздѣлить на 2. Но чтобы такая *ариѳметическая формула* служила отчетливымъ выраженіемъ правила для рѣшенія даннаго вопроса, нужно, чтобы она удовлетворяла нѣкоторымъ требованіямъ. Необходимо: 1) чтобы данныя величины были выражены небольшими числами, иначе формула будетъ не достаточно *проста*; 2) чтобы числа эти были разнообразны: иначе формула будетъ лишена *ясности*. Но если эти условія и будутъ удовлетворены, то все-таки неизбѣжное выполненіе нѣкоторыхъ дѣйствій (каково, напр., было соединеніе вмѣстѣ нѣсколькихъ x—совъ) можетъ ввести въ формулу числа одинаковыя съ данными, а вслѣдствіе этого формула потеряетъ совершенную ясность. Неудобства подобныя этому, очевидно, будутъ возрастать вмѣстѣ съ сложностью задачъ. Но они легко устранимы, и легко видѣть—какими средствами.

Наша цѣль состоитъ въ томъ, чтобы достичь возможности выражать формулами правила для рѣшенія сколькихъ угодно задачъ *одного рода*, т.-е. разнящихся не условіями, а лишь числовыми значеніями данныхъ въ задачѣ величинъ. Пусть, напр., мы хотимъ найти правило для рѣшенія задачи: *найти два числа по даннымъ суммѣ ихъ и разности, каковы бы ни были эта сумма и эта разность*. Легко видѣть, что такое *общее рѣшеніе* для всѣхъ задачъ одного рода найти возможно. Въ самомъ дѣлѣ, дѣйствія, которыхъ требуетъ рѣшеніе задачи, зависятъ *исключительно* отъ *соотношеній* между данными въ задачѣ числами, но никоимъ образомъ не отъ частныхъ значеній этихъ чиселъ. А слѣдовательно, эти данныя числа можно обозначить *буквами*, но буквы не могутъ сливаться, не могутъ исчезать, замѣняясь другими: дѣйствія надъ ними можно только обозначать, но не выполнять; сл. полученное выраженіе будетъ ясно указывать, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ нужно совершать надъ данными для нахожденія искомыхъ во всѣхъ задачахъ одного рода.

Итакъ, пусть данная сумма равна s, и данная разность d. Пусть, далѣе, меньшее число $= x$; большее будетъ $x + d$; по условію, $x + x + d = s$, или $2x + d = s$, откуда $2x = s - d$, и слѣд.

$$x = \frac{s-d}{2} \dots (1)$$

Формула (1) опредѣляетъ меньшее число. Большее число будетъ $\frac{s-d}{2} + d$, или $\frac{s-d+2d}{2}$, или, наконецъ,

$$\frac{s+d}{2} \dots (2)$$

Формулы (1) и (2) ясно показываютъ правило: для нахожденія большаго числа надо къ данной суммѣ придать данную разность и результатъ раздѣлить на 2; а для нахожденія меньшаго числа слѣдуетъ изъ данной суммы вычесть данную разность и остатокъ раздѣлить на 2.

Разъ такія буквенныя формулы найдены, мы при ихъ помощи можемъ рѣшать какія угодно задачи, однородныя съ данною; стоитъ только вмѣсто буквъ подставлять числа и выполнять указанныя дѣйствія.

Такъ, если данная сумма $= 500$, а разность 200, то, подставивъ 500 вмѣсто s и 200 вмѣсто d, найдемъ, что:

большая часть $= \frac{500+200}{2} = \frac{700}{2} = 350$,

а меньшая часть $= \frac{500-200}{2} = \frac{300}{2} = 150$.

Преимущества буквенныхъ формулъ передъ числовыми, какъ видно изъ вышеизложеннаго, заключаются въ слѣдующемъ:

1) Подъ буквами можно разумѣть какія угодно числа, поэтому рѣшеніе, выраженное буквенною формулою, пригодно для всѣхъ однородныхъ задачъ: буквенная формула даетъ *общее рѣшеніе* цѣлаго класса задачъ.

2) Алгебраическая формула даетъ наиболѣе ясное рѣшеніе задачи, ибо въ ней наиболѣе ясно изображаются порядокъ и послѣдовательность дѣйствій, которыя надо совершить надъ данными для нахожденія искомыхъ; между тѣмъ какъ въ ариѳметической формулѣ эта ясность, какъ мы видѣли, иногда теряется.

3) Результатъ, представленный алгебраическою формулою, выражается обыкновенно коротко и потому дозволяетъ легко удержать въ памяти правило рѣшенія вопроса.

Но это еще не все. Алгебраическая формула, указывая связь между количествами задачи, позволяетъ вывести рядъ другихъ формулъ, дающихъ рѣшенія ряда другихъ задачъ, если брать послѣдовательно за неизвѣстное каждое изъ количествъ, входящихъ въ формулу. Для примѣра выведемъ общую формулу, которая давала бы рѣшеніе всѣхъ вопросовъ о простыхъ процентахъ.

Найти прибыль, приносимую капиталомъ a, помѣщеннымъ на t лѣтъ по $p^0/_0$ въ годъ, считая простые проценты?

100 руб. даютъ въ годъ прибыль p руб.; слѣд. 1 р. дастъ въ то же время прибыль во 100 разъ меньшую, или $\frac{p}{100}$ р., а капиталъ a р. дастъ прибыль въ a разъ большую, или $\frac{ap}{100}$. Это есть прибыль, приносимая капиталомъ a въ

1 годъ: прибыль въ t лѣтъ будетъ въ t разъ больше, такъ что, называя эту прибыль i, получимъ соотношеніе

$$i=\frac{apt}{100}\cdot\cdot\cdot(1)$$

Это равенство связываетъ 4 количества: a, p, t, i и даетъ рѣшеніе 4 задачъ, позволяя по даннымъ тремъ количествамъ вычислить четвертое. Формула (1) позволяетъ вычислить прибыль, когда извѣстны—капиталъ, время и проценты.

Разсматривая a какъ одинъ изъ сомножителей, мы его найдемъ, раздѣливъ произведеніе (i) на другого сомножителя ($\frac{pt}{100}$), так. обр.

$$a=i:\frac{pt}{100},\ \text{или}\ a=\frac{100i}{pt}\qquad(2)$$

Формула (2) даетъ рѣшеніе задачи: *какой капиталъ надо помѣстить по p%, на t лѣтъ, чтобы получить i руб. прибыли?*

Подобнымъ же образомъ, принимая въ формулѣ (1) за неизвѣстное p, мы найдемъ его, раздѣливъ произведеніе (i) на другой сомножитель $\frac{at}{100}$.

$$p=i:\frac{at}{100},\ \text{или}\ p=\frac{100i}{at}\cdot\cdot\cdot(3)$$

Формула (3) даетъ рѣшеніе задачи: *На какіе проценты надо помѣстить капиталъ a, чтобы онъ въ t лѣтъ далъ прибыль i руб.?*

Принимая, наконецъ, въ равенствѣ (1) за неизвѣстное t, найдемъ

$$t=\frac{100i}{ap}\cdot\cdot(4)$$

Такова формула, по которой рѣшается вопросъ: *на сколько лѣтъ надо отдать капиталъ a по p%, чтобы онъ принесъ i руб. прибыли?*

Подставляя въ формулы (1), (2), (3) и (4) вмѣсто буквъ числа, мы можемъ рѣшить любую числовую задачу на простые проценты. Напр.: *на сколько % надо помѣстить капиталъ 3000 р., чтобы въ 4 года получить 360 р. прибыли?*

Положивъ въ формулѣ (3)

$$a=3000,\ t=4,\ i=360,$$

найдемъ

$$p=\frac{100\times360}{3000\times4}=3.$$

Такимъ образомъ возможно *обобщеніе* какъ самыхъ вопросовъ, такъ и способовъ ихъ рѣшенія.

Наука, занимающаяся обобщеніемъ вопросовъ о числахъ и способовъ ихъ рѣшенія, называется алгеброю.

3. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ, частью тѣ же самые, что и въ ариѳметикѣ, частью другіе. Ихъ можно раздѣлить на три группы: 1) знаки, употребляемые для изображенія чиселъ; 2) для изображенія дѣйствій надъ числами; и 3) для изображенія соотношеній между числами.

1. **Знаки для изображенія чиселъ.** Числа изображаются въ алгебрѣ не цифрами, какъ въ ариѳметикѣ, а *буквами*; это обозначеніе было введено фран-

цузскимъ математикомъ второй половины XVI вѣка *Віетомъ* (1540—1603). Віетъ употреблялъ большія литеры; малыя буквы введены англійскимъ математикомъ *Томасомъ Гарріотомъ* (1560—1621).

Для обозначенія извѣстныхъ чиселъ употребляются первыя буквы латинской азбуки: a, b, c, d, e, f, ...; для обозначенія неизвѣстныхъ — послѣднія буквы: t, u, v, y, x, z, ...

Иногда при буквахъ ставятъ значки или указатели (индексы), когда хотятъ сохранить въ обозначеніи аналогію, существующую между изображаемыми количествами.

Такимъ образомъ пишутъ: a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, ...; или: a_1, a_2, a_3, a_4, ... Съ тою же цѣлью употребляютъ еще буквы греческаго алфавита, соотвѣтствующія латинскимъ: α, β, γ, δ, ε, ...

Числа, изображенныя буквами, называются *общими числами*, потому-что подъ каждою буквою разумѣютъ не одно какое-либо число, но какія-угодно числа.

2. Знаки для изображенія дѣйствій.

Сложеніе обозначается знакомъ $+$ (плюсъ); такъ $a+b$ означаетъ сумму количествъ a и b.

Вычитаніе обозначается знакомъ $-$ (минусъ); такъ $a-b$ означаетъ разность между a и b.

Знаки $+$ и $-$ введены во всеобщее употребленіе нѣмецкими математиками XV столѣтія. Полагаютъ, что первый началъ ихъ употреблять *Пурбахъ* (1423—1461). Въ «Алгебрѣ» *Рудольфа*, напечатанной въ 1525 г. подъ заглавіемъ «Coss», и въ «Arithmetica integra» *Стифеля*, напечатанной въ 1544 г., примѣнены уже эти знаки.

Умноженіе обозначается знакомъ $\times$, или . (точкою), или же между сомножителями не ставится никакого знака; такимъ образомъ $a \times b$, $a \,.\, b$, и ab одинаково означаютъ произведеніе a на b.

Нужно замѣтить, что знакъ умноженія нельзя опускать, когда числа изображены цифрами; произведеніе 4 на 7 нельзя представить въ видѣ 47, такъ какъ 47, по принятому способу изображенія чиселъ, означаетъ не произведеніе 4 на 7, а число сорокъ семь.

Опущеніе всякаго знака умноженія между различными факторами произведенія впервые встрѣчается у Стифеля (Arithmetica 1544); знакъ $\times$ (косой крестъ) введенъ *Оитредомъ* (Oughtred), въ сочиненіи Clavis mathem. 1631; знакъ . (точка) введенъ *Лейбницемъ* во второй половинѣ XVII столѣтія.

Дѣленіе обозначается или двоеточіемъ, или чертою; такъ $a:b$ и $\frac{a}{b}$ одинаково означаютъ частное отъ раздѣленія a на b.

Полагаютъ, что знакъ : введенъ во всеобщее употребленіе Лейбницемъ; знакъ — (черта) встрѣчается уже въ сочиненіи *Фибоначчи* Пизанскаго (1202 г.)

3. Знаки соотношеній. Соотношенія между величинами могутъ быть двоякаго рода: двѣ величины могутъ быть или равны между собою, или неравны одна другой. Для изображенія равенства двухъ количествъ употребляется знакъ $=$; такъ, выраженіе

$$A = B$$

означаетъ: A равно B.

Знакъ равенства ($=$) введенъ англійскимъ математикомъ *Рекордомъ*, который въ первый разъ употребилъ его въ своемъ сочиненіи «Брусокъ для ума»

(The Whetstone of Wit), изданномъ въ 1557 г. Во всеобщее употребленіе знакъ этотъ вошелъ сто лѣтъ спустя.

Слово *больше* изображается знакомъ $>$, слово *меньше* знакомъ $<$. Такъ $a > b$ означаетъ: a больше b; $a < b$ означаетъ: a меньше b.

Когда хотятъ выразить, что два количества не равны, не указывая, которое изъ нихъ больше, ихъ отдѣляютъ знакомъ $\lessgtr$; такъ $a \gtrless b$ означаетъ, что a неравно b. Вмѣсто этого также пишутъ $a \neq b$.

Чтобы выразить, что a *не меньше* b, пишутъ $a \not< b$.

Такимъ же образомъ $a \not> b$ означаетъ, что a *не больше* b.

Знаки $>$ и $<$ введены англійскимъ математикомъ Гарріотомъ.

Коэффиціентъ. — Если какое-нибудь произведеніе, напримѣръ, ab, требуется повторить слагаемымъ нѣсколько разъ, напримѣръ пять разъ, то сумма будетъ $= ab + ab + ab + ab + ab$. Очевидно, что такое письменное изображеніе суммы неудобно, когда число слагаемыхъ велико: изображеніе суммы заняло бы въ этомъ случаѣ много времени и мѣста. Для избѣжанія такого неудобства ввели сокращенное изображеніе суммы равныхъ слагаемыхъ. Условились слагаемое писать одинъ разъ, а передъ нимъ ставить число, показывающее, сколько разъ взято выраженіе слагаемымъ. Такимъ образомъ наша сумма сокращенно изобразится въ видѣ $5ab$.

Число 5, показывающее, сколько разъ слѣдующее за нимъ выраженіе повторяется слагаемымъ, называется *коэффиціентомъ* или *предстоящимъ*. Коэффиціенту можно дать и другое опредѣленіе. Въ самомъ дѣлѣ, повторить ab пять разъ слагаемымъ, все равно, что ab умножить на 5; слѣд. *коэффиціентъ есть числовой множитель, стоящій передъ буквеннымъ выраженіемъ.*

Такъ, въ выраженіяхъ $7ab$, $\frac{2}{3}mn$, множители 7 и $\frac{2}{3}$ суть коэффиціенты. Иногда и буквенные производители разсматриваются какъ коэффиціенты по отношенію къ слѣдующимъ за ними произведеніямъ; такъ, въ выраженіи abc можно a считать коэффиціентомъ произведенія bc. Если произведеніе состоитъ изъ однихъ буквенныхъ сомножителей, то коэффиціентъ его есть 1; напр. коэффиціентъ произведенія abc есть 1, такъ какъ это произведеніе можно написать въ видѣ $1 . abc$.

Степень. — *Степенью называется произведеніе равныхъ множителей.*

Если число берется множителемъ два раза, то произведеніе называется *второю степенью* или *квадратомъ* этого числа; такъ $5 . 5$ или 25 есть квадратъ пяти. Когда число берется множителемъ три раза, то произведеніе называется *третьею степенью* или *кубомъ* этого числа; такъ $5.5.5$ или 125 есть кубъ пяти. Произведеніе четырехъ равныхъ множителей наз. *четвертою степенью*; напр. $a.a.a.a$ есть четвертая степень числа a. — Очевидно, что если число равныхъ множителей велико, то письменное изображеніе степени займетъ много времени и мѣста. Для устраненія этого неудобства введено слѣдующее сокращенное изображеніе степени: перемножаемое само на себя количество пишутъ одинъ разъ, а надъ нимъ справа ставятъ число, показывающее, сколько разъ это количество берется множителемъ. Согласно этому условію, квадратъ количества a, т. е. произведеніе $a.a$, сокращенно пишется въ видѣ: a^2; кубъ a, т. е. произведеніе $a.a.a$, сокращенно изображается въ видѣ: a^3; четвертая степень a, т. е. $a.a.a.a$ — въ видѣ a^4 и т. д. — Каждый изъ равныхъ множителей называется *основаніемъ* степени; такъ въ формулѣ a^4 основаніе есть a. — Числа 2, 3, 4 и т. д., стоящія надъ основаніемъ, называются *показателями* степени. Итакъ, *показатель степени есть число, которое ставится надъ буквою и означаетъ, сколько разъ эта буква берется множителемъ.*

Показатель 1 не пишется, а подразумѣвается; такъ, вмѣсто b^1 пишутъ b

На основаніи сказаннаго, произведеніе $aaaabbbccd$ сокращенно пишутъ въ видѣ $a^4b^3c^2d$. Обратно, a^2b^5 есть сокращенно написанное произведеніе $aabbbbb$.

Дѣйствіе нахожденія степени даннаго числа называется возвышеніемъ въ степень. Такъ, возвысивъ 7 въ кубъ, т.-е. взявъ 7 множителемъ три раза, получимъ 343. Возвысивъ $\frac{1}{2}$ въ четвертую степень, т.-е. взявъ $\frac{1}{2}$ множителемъ четыре раза, найдемъ $\frac{1}{16}$ и т. д.

Полезно знать на память квадраты и кубы, по крайней мѣрѣ, первыхъ десяти чиселъ, которые мы и помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Числа:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Квадраты:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Кубы.	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Корень. Корнемъ второй степени или квадратнымъ изъ даннаго числа называется такое число, квадратъ котораго равенъ данному числу. Такъ, квадратный корень изъ 9 равенъ 3, потому что квадратъ трехъ даетъ 9.

Кубическимъ корнемъ изъ даннаго числа называется такое число, котораго кубъ равенъ данному числу. Напр., кубическій корень изъ 64 равенъ 4, потому-что кубъ четырехъ равенъ 64.

Корнемъ четвертаго порядка изъ даннаго числа называется такое, четвертая степень котораго равна данному числу. Такъ, корень четвертаго порядка изъ 16 равенъ 2, ибо $2^4=16$.

Вообще, *корнемъ n-го порядка изъ даннаго числа наз. такое число, котораго n-ая степень равна данному числу.* Такимъ образомъ корень n-го порядка изъ a^n есть a.

Для обозначенія корня употребляютъ знакъ $\sqrt{\ }$, подъ которымъ ставятъ данное число, называемое поэтому *подкореннымъ числомъ*. Въ отверстіе этого знака ставятъ число, которое показываетъ, въ какую степень должно возвысить корень для полученія даннаго числа: его называютъ *показателемъ* корня.

Такъ, чтобы обозначить письменно, что корень четвертаго порядка изъ 16 равенъ 2, пишутъ: $\sqrt[4]{16}=2$; здѣсь 2 есть самый корень, 16 — подкоренное число, 4 — показатель корня.

Если показатель корня равенъ 2, то его не пишутъ, а подразумѣваютъ. Такъ, для обозначенія, что квадратный корень изъ $\frac{1}{4}$ равенъ $\frac{1}{2}$, пишутъ:

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Коренной знакъ ($\sqrt{\ }$) называется также *радикаломъ*. *Дѣйствіе нахожденія корня называется извлеченіемъ корня.*

Первые слѣды употребленія показателей находятся у *Лароша* (Arithmetique et Geometrie, 1520); онъ употребляетъ показатели 1, 2, 3. — Знакъ $\sqrt{\ }$ находимъ впервые у Христіана Рудольфа (1524). — Окончательно же эти знаки введены *Декартомъ*. — Знакъ $\sqrt{\ }$ есть ни что иное, какъ искаженная буква r (начальная буква слова radix — корень).

Скобки. — Для обозначенія дѣйствій употребляютъ еще особые знаки, называемые *скобками*. Имъ даютъ видъ: ( ), или [ ], или { }. Скобки перваго вида называютъ *простыми*, второго — *квадратными*, третьяго — *фигурными*.

Такъ, для обозначенія, что разность $a - b$ нужно умножить на c, пишутъ:

$$(a - b) . c$$

Если это выраженіе написать безъ скобокъ, т.-е. въ видѣ

$$a - b . c,$$

то смыслъ его былъ бы иной, именно: оно выражало бы требованіе — вычесть изъ a произведеніе b на c, между тѣмъ какъ требуется разность $a - b$ умножить на c.

Если бы требовалось сумму $a + b$ возвысить въ кубъ и результатъ умножить на разность $c - d$, то слѣдуетъ указанныя дѣйствія обозначить такъ

$$(a + b).^3(c - d).$$

Если опустить скобки, т.-е. написать

$$a + b.^3c - d,$$

то смыслъ новаго выраженія не былъ бы согласенъ съ требованіемъ, потому что послѣднее выраженіе означало бы слѣдующее требованіе: къ a придать произведеніе куба b на c и изъ полученной суммы вычесть d.

Скобокъ не ставятъ всякій разъ, когда и безъ нихъ обозначеніе дѣйствія не представляетъ недоразумѣній, или когда для обозначенія дѣйствія вводится особый знакъ, устраняющій необходимость скобокъ. Напр., если бы требовалось выраженіе $a^2 + (a - b)c$ раздѣлить на $m^2 - n^2$, то, обозначая дѣленіе знакомъ двоеточія, необходимо и дѣлимое и дѣлителя заключить въ скобки, написавъ:

$$[a^2 + (a - b)c] : (m^2 - n^2).$$

Но если вмѣсто двоеточія знакомъ дѣленія взять черту, проведя ее подъ всѣмъ дѣлимымъ, то она устранитъ необходимость заключенія дѣлимаго и дѣлителя въ скобки; частное изобразится въ такомъ случаѣ въ видѣ

$$\frac{a^2 + (a - b)c}{m^2 - n^2}.$$

Точно также для обозначенія, что изъ выраженія $a + b - c$ надо извлечь кубичный корень, слѣдуетъ данное выраженіе заключить въ скобки, написавши:

$$\sqrt[3]{}(a + b - c).$$

Но если протянемъ горизонтальную черту радикала надъ всѣмъ даннымъ выраженіемъ, то послѣдняя устранитъ необходимость заключенія выраженія $a + b - c$ въ скобки; дѣйствіе изобразится слѣд. обр.:

$$\sqrt[3]{a + b - c}.$$

Употребленіе скобокъ въ первый разъ встрѣчается въ сочиненіи *Альберта Жирара:* «Invention nouvelle dans l'algebre etc.», изданномъ въ Амстердамѣ въ 1629 г.

4. Классификація алгебраическихъ формулъ. — *Алгебраическимъ выраженіемъ* или *формулою* называютъ совокупность буквъ, чиселъ и знаковъ, указывающую рядъ дѣйствій надъ числами, которыя подразумѣваются подъ данными буквами. Такимъ образомъ:

$$\frac{a-d}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{8a^2-4ab+3b^2}{a^3-b^3}, \qquad \frac{18a^4(\sqrt[3]{b}+\sqrt{c})}{b^2(\sqrt{a}+\sqrt[3]{c})}$$

суть алгебраическія выраженія или формулы.

Всякое алгебраическое выраженіе, не содержащее корней изъ буквенныхъ выраженій, называется *раціональнымъ;* оно называется *ирраціональнымъ*, если содержитъ буквенные радикалы. Первыя два изъ вышеприведенныхъ выраженій раціональны, третье — ирраціональное. Нужно замѣтить, что выраженіе можетъ быть раціонально относительно нѣкоторыхъ буквъ, и ирраціонально относительно другихъ буквъ. Такъ, выраженіе $ax^2+x\sqrt{b}$ раціонально по отношенію къ a и x, но ирраціонально относительно b.

Раціональныя выраженія раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя:* цѣлымъ называютъ раціональное выраженіе, не содержащее буквенныхъ дѣлителей; дробнымъ — выраженіе, содержащее буквенныхъ дѣлителей. Такъ, выраженія

$$4a^2b, \qquad 7ab^2, \qquad \frac{3}{7}a^4b^2, \qquad 19a^4-\frac{2}{3}a^3b+\frac{5}{8}b^4$$

суть алгебраически цѣлыя, хотя второе и третье и содержатъ числовыхъ дѣлителей; выраженія же

$$\frac{a+b}{a-b}, \qquad \frac{8a^2-4ab+3b^2}{a^3-b^3}$$

алгебраически дробныя, такъ какъ имѣютъ буквенныхъ дѣлителей.

Одночленомъ называютъ такое выраженіе, въ которомъ послѣднее дѣйствіе есть умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень или извлеченіе корня, но не сложеніе и не вычитаніе. Такъ выраженія

$$7a^3b^2c, \qquad \frac{7a^3b^2}{4c^2+d^2}, \qquad (a^2-b^2)(c+d), \qquad (x+y+z)^4, \qquad \sqrt{x^2-y^2}$$

суть одночлены.

Многочленомъ наз. выраженіе, состоящее изъ нѣсколькихъ одночленовъ, соединенныхъ знаками $+$ или $-$.

Такъ, выраженія

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \qquad \frac{3a^4\sqrt[3]{b}}{c}-\frac{7a^2b^2}{4c^2}+\frac{5a^4b^3c}{3}-1,$$

суть многочлены.

Одночлены, составляющіе многочленъ, называются его *членами*. Знакъ, предшествующій одночлену, считается составною частью члена, такъ, члены перваго многочлена суть

$$+a^3, \qquad -3a^2b, \qquad +3ab^2, \qquad -b^3.$$

Если передъ первымъ членомъ не поставлено знака, то нужно подразумѣвать +.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, напр. $a^2 - b^2$, наз. *биномомъ* или *двучленомъ;* состоящій изъ трехъ членовъ, какъ $a^2 - 2ab + b^2$ — *триномомъ* или *трехчленомъ;* если же число членовъ больше, то многочлену не даютъ особаго названія.

Измѣреніе. — Число буквенныхъ множителей цѣлаго одночлена называется его *измѣреніемъ*. Такъ, одночленъ $4a^3b^2c$ будетъ *шести измѣреній*, потому что, представивъ его въ видѣ $4aaabbc$, видимъ, что онъ содержитъ шесть буквенныхъ множителей. Сложивъ показателей, получимъ $3 + 2 + 1$ или 6; слѣд. для опредѣленія измѣренія цѣлаго одночлена нужно взять сумму показателей его буквъ.

Цѣлый многочленъ, состоящій изъ членовъ одинаковаго измѣренія, называется *однороднымъ*; измѣреніе каждаго члена такого многочлена называется также измѣреніемъ самого многочлена. Напр., выраженіе $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія или трехъ измѣреній. Многочленъ, котораго члены не одинаковаго измѣренія, наз. *разнороднымъ*; напр. многочленъ $a^4 - 3a^3 + ab^2 + c$ — разнородный.

Степенью многочлена относительно какой-либо буквы называется высшій показатель этой буквы въ многочленѣ. Такъ

$$8ax^3 - 2a^2x^2 + 7a^3x + a^4$$

есть многочленъ третьей степени относительно буквы x.

5. Числовое значеніе формулы. — Числовымъ значеніемъ формулы называется то число, которое получится, если буквы замѣнимъ числами и выполнимъ указанныя знаками дѣйствія.

Такъ, если требуется вычислить числовое значеніе выраженія

$$\frac{2a^2+\sqrt{a^2+b^2}}{3c}$$

при $a = 4$, $b = 3$ и $c = 1$, то, подставивъ вмѣсто буквъ данныя числа, найдемъ

$$\frac{2\times4^2+\sqrt{4^2+3^2}}{3\times1}=\frac{2\times16+\sqrt{16+9}}{3}=\frac{32+\sqrt{25}}{3}=\frac{32+5}{3}=\frac{37}{3}=12\frac{1}{3}.$$

$12\frac{1}{3}$ и есть числовое значеніе данной формулы.

ГЛАВА II.

Положительныя и отрицательныя количества.

6. Изображеніе количествъ буквами вмѣсто цифръ не составляетъ еще существеннаго отличія алгебры отъ ариѳметики: и ариѳметика, при доказательствѣ теоремъ и при рѣшеніи задачъ, также пользуется для изображенія чиселъ буквами, хотя въ ней употребленіе буквъ и не такъ систематично какъ въ алгебрѣ. Существенная разница между этими науками состоитъ въ томъ, что въ разсмотрѣніе величинъ алгебра вводитъ *идею о направленіи*, совершенно чуждую ариѳметикѣ.

Все, что можетъ увеличиваться или уменьшаться и быть измѣряемо, называется *математическою величиною*. Такъ — вѣсъ, объемъ, время, температура, скорость, сила и т. п. суть величины.

Измѣрить величину значитъ сравнить ее съ другою однородною съ нею величиною, называемою при этомъ *единицею мѣры*; точнѣе говоря, это значитъ найти численное отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры. Такъ, измѣряя вѣсъ тѣла, мы узнаемъ, *сколько разъ* въ немъ содержится единица вѣса (пудъ, фунтъ и т. п.), или какая-нибудь доля ея. Поэтому результатомъ измѣренія всегда является *число отвлеченное*. Цѣлое или дробное отвлеченное число, измѣряющее данную величину, называется *абсолютнымъ числомъ*; вмѣстѣ съ названіемъ единицы мѣры оно даетъ намъ точное понятіе о разсматриваемой величинѣ, если для опредѣленія величины достаточно знать только ея размѣры.

Величины, съ которыми имѣетъ дѣло *ариѳметика*, вполнѣ опредѣляются, какъ скоро извѣстно ихъ отношеніе къ 1-цѣ мѣры и самая эта единица; таковы — протяженіе, объемъ, вѣсъ, капиталъ и т. п. Ихъ называютъ *абсолютными* величинами (скаляры).

Но есть такія величины, для полнаго опредѣленія которыхъ недостаточно знать, только ихъ отношеніе къ единицѣ мѣры и какова самая эта единица. Такъ, если я, находясь сначала у двери, я отошелъ отъ нея на 4 аршина, то этимъ мое положеніе относительно двери еще не будетъ вполнѣ опредѣлено; надо еще указать — *въ какую сторону* относительно двери я удалился, вошелъ ли я въ какую-то комнату, или вышелъ изъ нея. Еще примѣръ. Если часы измѣнили свой ходъ въ теченіи сутокъ на 2 минуты, то этимъ мы еще не даемъ полнаго понятія о величинѣ измѣненія; въ самомъ дѣлѣ, мы должны указать еще *направленіе* измѣненія, т.-е. сказать, ускорили или замедлили часы свой ходъ на 2 минуты. Третій примѣръ. Если мы скажемъ, что температура воздуха измѣнилась на 10 градусовъ, то этимъ мы не опредѣлимъ еще вполнѣ это измѣненіе: для полнаго опредѣленія измѣненія температуры надо указать — повысилась она на 10 градусовъ или понизилась, т.-е. опять надо указать *направленіе* измѣненія.

Большинство величинъ, существующихъ въ природѣ, имѣютъ два противоположныя направленія, и потому называются *противоположными величинами*. Таковы — *время*, которое можно считать въ направленіи будущаго и прошедшаго относительно даннаго момента; *пространство*, проходимое прямолинейно движущимся тѣломъ; *ускореніе* и *замедленіе* движенія; *температура*, потому что она можетъ быть выше нуля и ниже нуля; *прибыль* и *убытокъ*, ибо они измѣняютъ капиталъ въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ; суммы *поступающія* въ кассу банкира и суммы *выдаваемыя* кассою; наконецъ *линіи*, наносимыя на неограниченной прямой отъ нѣкоторой постоянной точки, называемой началомъ.

Такого рода величины, взятыя въ одномъ направленіи, называются *положительными*, а въ противоположномъ — *отрицательными*. Отъ насъ зависитъ, въ какомъ направленіи считать противоположныя величины положительными и въ какомъ — отрицательными; если условимся считать положительными: 1) разстояніе вправо отъ начала, 2) время будущее, 3) ускореніе, 4) прибыль, 5) капиталъ, 6) температуру высшую нуля, то противоположныя этимъ величины, т.-е. разстояніе влѣво отъ начала, время прошедшее, замедленіе, убытокъ, долгъ, температуру ниже нуля, нужно принимать отрицательными.

7. Существуютъ два способа изображенія противоположныхъ величинъ — *графическій* и *алгебраическій*.

1. Условимся каждую единицу разсматриваемой величины изображать прямой линией опредѣленной длины, наприм. линией ab (черт. 1): отложивъ линію ab на неограниченной прямой столько разъ, сколько въ разсматриваемой вели-

Черт. 1.

чинѣ находится единицъ, мы и получимъ графическое изображеніе абсолютнаго значенія этой величины.

Для изображенія противоположныхъ величинъ, какого бы рода онѣ ни были, условимся представлять ихъ прямыми, наносимыми на неограниченной прямой (называемой *осью*) xx', начиная отъ нѣкоторой точки o — называемой *началомъ*; причемъ положительныя величины будемъ наносить въ направленіи отъ x' къ x, а отрицательныя въ направленіи отъ x къ x', т. е. въ противоположную сторону (черт. 2).

Черт. 2

Итакъ, абсолютныя значенія противоположныхъ величинъ можно представлять *длинами* извѣстныхъ линій, а направленія — *положеніемъ* этихъ линій относительно начала.

При такомъ представленіи противоположныхъ величинъ каждая изъ нихъ имѣетъ опредѣленное *начало* и *конецъ*. Отрѣзки прямой, конечныя точки которыхъ играютъ различную роль, одна — начала, другая — конца, называются ***векторами***.

Примѣчаніе. Графическимъ представленіемъ противоположныхъ величинъ пользуются при доказательствахъ тамъ, гдѣ чисто алгебраическіе методы трудно примѣнимы. Къ преимуществамъ графическихъ методовъ принадлежитъ ихъ наглядность, позволяющая легко усвоять истины весьма отвлеченнаго характера. Ниже мы воспользуемся этимъ методомъ при доказательствѣ теоремъ, относящихся къ свойствамъ суммы.

2. Для изображенія противоположныхъ величинъ, очевидно, можно поступать еще такъ. Взявъ ариѳметическое число, выражающее абсолютное значеніе взятой величины, можно снабдить это число какимъ-либо условнымъ значкомъ, который служилъ бы указаніемъ направленія величины. На первый взглядъ кажется, что такой значокъ можно бы было выбрать произвольно; для указанія температуръ, наприм., можно бы было, обозначивъ число градусовъ цифрою, ставить возлѣ этой цифры букву *в* для обозначенія градусовъ выше нуля, и букву *н* для обозначенія градусовъ ниже нуля. Такимъ образомъ, $8_в$ обозначало бы 8 градусовъ выше нуля, а $5_н$ обозначало бы 5 градусовъ ниже нуля. Можно бы было условиться обозначать градусы выше нуля знакомъ ударенія, градусы ниже нуля—двумя такими значками; при такомъ условіи вышеуказанныя температуры были бы выражены знаками: $8'$ и $5''$. Однако, болѣе глубокое изученіе вопроса привело къ заключенію, что изъ всѣхъ различительныхъ знаковъ, которыми можно пользоваться для обозначенія направленія противоположныхъ величинъ, всего лучше служатъ этой цѣли, и даже почти *необходимы*, знаки + и —, которыми въ ариѳметикѣ указывается сложеніе и вычитаніе, причемъ по-

ложительныя величины обозначаютъ знакомъ +, а отрицательныя—знакомъ —. Такимъ образомъ, вмѣсто того чтобы писать „5 градусовъ выше нуля“ или «5°» пишутъ «+ 5 град.» и произносятъ *«плюсъ 5 градусовъ»*. Вмѣсто выраженія «5 градусовъ ниже нуля» или «5°» пишутъ «— 5 гр.», произнося *«минусъ 5 градусовъ»*. Точно также, вмѣсто того чтобы писать «5 футовъ вправо» пишутъ «+ 5 фут.», произнося *«плюсъ 5 ф.»*; вмѣсто выраженія «семь лѣтъ тому назадъ», пишутъ «— 7 лѣтъ», говоря: *«минусъ 7 лѣтъ»*, и т. п.

Въ отвѣтъ на вопросъ: почему для обозначенія направленія величинъ взяты знаки + и —, т.-е. знаки дѣйствій сложенія и вычитанія, замѣтимъ пока слѣдующее. Положительныя величины одного рода слѣдуетъ разсматривать какъ слагаемыя между собою. Дѣйствительно, имѣя какую-нибудь прибыль, мы всякую новую прибыль будемъ прикладывать къ прежней, такъ какъ она служитъ къ увеличенію уже имѣющейся прибыли; если точка, находящаяся на прямой, перемѣщена вправо, то всякое новое перемѣщеніе вправо будетъ прикладываться къ прежнему и т. д. Потому-то положительныя величины, какъ слагаемыя между собою, и сопровождаются знакомъ плюсъ. Отрицательныя величины одного рода, по отношенію къ положительнымъ, слѣдуетъ разсматривать какъ вычитаемыя. Дѣйствительно, имѣя капиталъ, мы всякій долгъ будемъ изъ него вычитать, такъ какъ долгъ служитъ къ уменьшенію капитала. Всякій проигрышъ, служа къ уменьшенію капитала, должно разсматривать какъ вычитаемое. Всякое перемѣщеніе точки влѣво, служа къ уменьшенію существующаго перемѣщенія вправо, есть вычитаемое и т. д. Потому-то отрицательныя величины, какъ вычитаемыя по отношенію къ положительнымъ, и сопровождаютъ знакомъ минусъ. Нулю также иногда приписываютъ тотъ или другой знакъ, когда въ изслѣдованіи задачи нужно, чтобы оставался какой-нибудь слѣдъ, показывающій происхожденіе этого нуля. Напрім., когда температура низшая нуля увеличивается, дѣлаясь наконецъ нулемъ, то, очевидно, нужно ее обозначить знакомъ (— 0). Тригонометрія представляетъ множество примѣровъ этого рода.

8 Мы обобщили понятіе объ ариѳметическомъ количествѣ, введя въ это понятіе новый элементъ—*направленіе*, причемъ самое обобщеніе вывели изъ разсматриванія величинъ. Но къ тому же обобщенію можно придти еще другимъ путемъ: изъ разсмотрѣнія дѣйствій надъ числами.

Пусть изъ нѣкотораго числа a требуется вычесть b: разность выразится формулою $a - b$. Здѣсь слѣдуетъ разсмотрѣть три случая:

1) Когда a больше b, то-есть уменьшаемое больше вычитаемаго, то вычитаніе такое всегда возможно. Такъ, если $a = 10$ и $b = 4$, то численная величина разности $a - b$ равна 6.

2) Если $a = b$, т.-е. вычитаемое равно уменьшаемому, то вычитаніе снова возможно, потому что отъ a всегда можно отнять столько единицъ, сколько ихъ въ немъ находится; но остатокъ вычитанія уже не представляетъ никакого числа: онъ есть нуль, выражающій отсутствіе всякой величины. Однако, уже и въ ариѳметикѣ принято и нуль называть числомъ.

3) Когда $a < b$, т.-е. вычитаемое больше уменьшаемаго, то вычитаніе *не всегда возможно;* разсмотримъ, когда оно возможно и когда нѣтъ.

Разсмотримъ сначала величину ариѳметическую, т.-е. такую, для которой не существуетъ противоположной. Различныя состоянія такой величины можно представлять графически разстояніями точекъ прямой, неограниченно простирающейся *только въ одну сторону* отъ своей начальной точки, наприм., отъ точки O вправо (по направленію Ox).

Вычитаніе b изъ a выразится графически нанесеніемъ линіи a вправо отъ точки O въ направленіи возрастающихъ разстояній, а вычитаемой линіи b отъ конца M линіи $OM = a$ въ направленіи, противоположномъ направленію возрастающихъ разстояній, т.-е. влѣво отъ M (черт. 3). Самое построеніе показываетъ, что вычитаніе возможно до тѣхъ поръ, пока b меньше a. Если же b больше a, то построеніе укажетъ *невозможность вычитанія*, такъ что конецъ N линіи $MN = b$ упадетъ въ этомъ случаѣ влѣво отъ точки O или, такъ сказать, въ пустоту, ибо линія Ox, простираясь только вправо отъ O, не имѣетъ точекъ влѣво отъ O.

Черт. 3.

Пусть $a = 5$, $b = 7$; тогда

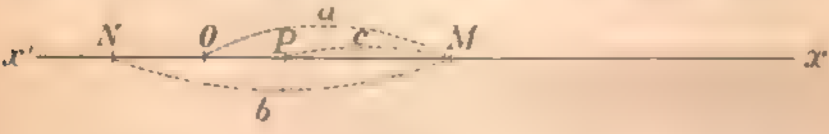
$$a - b = 5 - 7.$$

разность $5 - 7$ можно выразить однимъ числомъ; въ самомъ дѣлѣ, вычесть 7 изъ 5 все равно что сперва вычесть 5, а затѣмъ 2, слѣд.

$$5 - 7 = 5 - 6 - 2;$$

но $5 - 5 = 0$, слѣд. $5 - 7 = 0 - 2$; опуская 0, получимъ въ остаткѣ -2. Разность выражается отрицательнымъ числомъ -2; но это отрицательное число въ данномъ случаѣ ничего не представляетъ, не имѣетъ никакого реальнаго значенія.

Но если разсматриваемая прямая простирается не только вправо, но и влѣво отъ точки O, представляя такимъ образомъ величины, имѣющія два противоположныя направленія, то дѣйствіе вычитанія большаго числа изъ меньшаго, бывшее въ первомъ случаѣ невозможнымъ, теперь становится возможнымъ, ибо линія $x'x$ имѣетъ точки влѣво отъ O, и разность $a - b = -2$ имѣетъ совершенно реальное значеніе, представляя линію ON, лежащую влѣво отъ начала O.



Черт. 4.

Итакъ, при вычитаніи большаго числа изъ меньшаго получается *отрицательное число*; оно не имѣетъ никакого реальнаго значенія въ случаѣ абсолютныхъ величинъ и, напротивъ, имѣетъ совершенно реальное значеніе въ случаѣ величинъ противоположныхъ.

Самое правило вычитанія большаго числа изъ меньшаго легко видѣть изъ приведеннаго примѣра

$$5 - 7 = -2.$$

именно: нужно изъ большаго числа вычесть меньшее и передъ остаткомъ поставить знакъ (—).

Въ противоположность отрицательнымъ числамъ, числа, получаемыя при всегда возможномъ вычитаніи меньшаго числа изъ большаго, называются положительными и обозначаются знакомъ (+).

Такъ, если $a = 5$, $c = 3$; то

$$a - c = 5 - 3 = + 2.$$

Легко видѣть на чертежѣ, что значеніе положительнаго числа противоположно значенію отрицательнаго: въ то время какъ отрицательное число $a - b = - 2$ означаетъ линію OA, лежащую *влѣво* отъ точки O, положительное число $a - c = + 2$ выражаетъ линію OP, лежащую *вправо* отъ начала (черт. 4).

9. Алгебраическое количество. Количество, состоящее изъ двухъ элементовъ: 1) изъ численной величины, которая можетъ быть цѣлая или дробная, и 2) знака (+) или (−), указывающаго направленіе величины, и называется собственно *алгебраическимъ количествомъ*. Такъ

$$+5,\quad -6,\quad +\frac{2}{3},\quad -\frac{5}{4},\quad +a,\quad -a,\quad +3a^2,\quad -5a^2$$

суть количества алгебраическія.

Если въ количествѣ отбросить знакъ, то получится ариѳметическое число, которое называется *абсолютнымъ* или *числовымъ значеніемъ*, также — *модулемъ* количества. Такъ, количества $+8$ и $-\frac{1}{2}$ имѣютъ абсолютными значеніями или модулями числа 8 и $\frac{1}{2}$.

Для обозначенія *абсолютнаго значенія* или *модуля* числа ставятъ это число между двумя вертикальными чертами. Такъ, $|a|$ означаетъ абсолютное значеніе или модуль алгебраическаго числа a. Такимъ же образомъ:

$$|+5| = 5;\quad |-3| = 3.$$

Иногда ставятъ число въ квадратныя скобки; такъ $[a]$ означаетъ модуль числа a.

10. Выгоды, происходящія отъ введенія отрицательныхъ количествъ.— Введеніе отрицательныхъ количествъ въ алгебру имѣетъ чрезвычайно большое значеніе, такъ какъ оно даетъ математическимъ выводамъ ту общность, которая безъ отрицательныхъ величинъ была бы недостижима. Поясним это примѣрами.

Примѣръ 1. *Купленъ товаръ за a руб., а проданъ за b руб. Какое измѣненіе произошло отъ этого оборота въ капиталѣ?*

Для опредѣленія измѣненія капитала вычтемъ изъ b руб. a руб., найдемъ

$$b - a.$$

Здѣсь могутъ быть три случая.

1) Если $b > a$, то разность $b - a$ будетъ *положительная* и выразитъ собою *прибыль*, полученную при продажѣ товара, потому что цѣна (b), за которую проданъ товаръ, больше цѣны (a), за которую онъ купленъ.

2) Если $b = a$, то разность $b - a$ равна 0 и означаетъ, что при продажѣ не получено ни прибыли, ни убытка, что очевидно.

3) Если $b < a$, то разность $b - a$ будетъ *отрицательная* и выразитъ

убытокъ, полученный при продажѣ товара, потому что цѣна (b), которую купецъ беретъ, продавая товаръ, меньше цѣны (a), которую онъ самъ заплатилъ за товаръ.

Итакъ, всѣ частные случаи, которые могутъ встрѣтиться при рѣшеніи данной задачи, можно соединить въ одной формулѣ: $b - a$, которая и выражаетъ собою измѣненіе капитала во всѣхъ случаяхъ, при чемъ положительный результатъ означаетъ прибыль, а отрицательный — убытокъ. Правда, мы могли бы избѣжать полученія отрицательныхъ выводовъ, если бы при $b < a$ стали дѣлать вычисленіе по формулѣ $a - b$; но такое дробленіе задачи и формулы на нѣсколько отдѣльныхъ задачъ и формулъ соотвѣтственно частнымъ значеніямъ буквъ не соотвѣтствовало бы духу алгебры, стремящейся обобщать какъ самые вопросы, такъ и ихъ рѣшенія.

Примѣръ II. *Нѣкоторое событіе случилось спустя t лѣтъ послѣ Р. Х., а другое событіе n годами раньше. Когда случилось второе событіе?*

Время второго событія найдемъ, вычитая n изъ t, и оно выразится формулою

$$t - n.$$

Здѣсь опять возможны три случая:

1) Если $t > n$, разность $t - n$ положительная, напр., если первое событіе имѣло мѣсто спустя 600 лѣтъ послѣ Р. Х., а второе 400 годами раньше, то подставивъ въ формулу $t - n$ вмѣсто t число 600 и 400 вмѣсто n, найдемъ

$$t - n = 600 - 400 = + 200.$$

Очевидно, этотъ положительный результатъ означаетъ, что второе событіе имѣло мѣсто черезъ 200 лѣтъ *послѣ* Р. Х.

2) Если $t = n$, то разность $t - n = 0$. Нулевое рѣшеніе, очевидно, означаетъ, что второе событіе совершилось въ самое Р. Х.

3) Если, наконецъ, $t < n$, то разность $t - n$ будетъ отрицательная. Если положимъ, что первое событіе совершилось спустя 600 лѣтъ послѣ Р. Х., а второе за 800 лѣтъ до перваго, то подставляя въ формулу $t - n$ эти числа, найдемъ

$$t - n = 600 - 800 = - 200 \text{ л.}$$

Ясно, что отрицательный результатъ означаетъ, что второе событіе совершилось за 200 л. *до* Р. Х.

Итакъ, замѣтивъ, что положительный результатъ означаетъ время послѣ Р. Х., а отрицательный — время до Р. Х., мы въ формулѣ $t - n$ имѣемъ рѣшеніе всѣхъ частныхъ случаевъ данной задачи. И здѣсь мы могли бы избѣжать отрицательнаго вывода, если бы вторую задачу рѣшили по иной формулѣ: $n - t$; но такое дробленіе задачи и формулы не соотвѣтствовало бы духу общности, составляющей отличительный характеръ алгебры.

Итакъ, введеніе отрицательныхъ количествъ даетъ возможность какъ самые вопросы давать въ совершенно общей формѣ, такъ и рѣшенія всѣхъ частныхъ случаевъ выводить изъ одной общей формулы.

11. Свойства положительныхъ и отрицательныхъ количествъ. — Если имѣемъ нѣсколько примѣровъ вычитанія, въ которыхъ уменьшаемыя равны, то остатки будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше вычитаемыя. Такъ, вычитая изъ 5 послѣдовательно 1, 2, 3, ..., получимъ остатки

$$5-1=+4$$
$$5-2=+3$$
$$5-3=+2$$
$$5-4=+1$$
$$5-5=0$$
$$5-6=\quad 1$$
$$5-7=-2$$
$$5-8=-3 \text{ и т. д.}$$

величина которыхъ становится все меньше и меньше. Сравнивая между собою остатки, выводимъ такимъ образомъ, что

$$+4>+3>+2>+1>0>-1>-2>-3 \text{ и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ, что:

1) Всякое положительное количество больше нуля;

2) Изъ двухъ положительныхъ чиселъ то больше, у котораго модуль больше.

3) Всякое отрицательное количество меньше нуля;

4) 0 составляетъ границу, отдѣляющую положительныя количества отъ отрицательныхъ;

5) Изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то больше, котораго абсолютное значеніе меньше.

Въ поясненіе выводовъ — третьяго и пятаго приведемъ слѣдующіе примѣры. Пусть изъ двухъ лицъ, A и B, первое ничего не имѣетъ (ни имущества ни долга), а второе, не имѣя никакого имущества, имѣетъ долгъ въ 50 руб. Долгъ и имущество величины противоположныя, при чемъ, согласно съ вышеприведеннымъ условіемъ, долгъ есть величина отрицательная, а имущество — положительная. Такимъ образомъ, состояніе A равно 0, состояніе B равно — 50 р. Лицо, имѣющее только долгъ, имѣетъ менѣе лица, ничего не имѣющаго, поэтому мы въ правѣ сказать, что отрицательное имущество B (— 50 р.) меньше нулевого имущества A: *отрицательное количество меньше нуля*. Положимъ теперь, что A и B не имѣютъ никакого имущества, но A имѣетъ долгу 30 р., а B — 80 р.; состояніе перваго выразится отрицательнымъ числомъ — 30 р., второго — отриц. числомъ — 80 р. Очевидно, что лицо, имѣющее долгу 30 р., богаче лица, долгъ котораго равенъ 80 р., слѣд. — 30 р. > — 80 р.: *изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то больше, котораго численное значеніе меньше.*

ГЛАВА III.

Цѣль алгебраическихъ дѣйствій. — Законъ Ганкеля — Свойства суммы и разности. — Свойства полинома. — Сложеніе и вычитаніе.

12. — Цѣль ариѳметическихъ дѣйствій состоитъ въ нахожденіи окончатель[illegible] результата. Иное дѣло въ алгебрѣ. Количества, выраженныя буквами, не [illegible] сливаться, поэтому никакое алгебраическое дѣйствіе не можетъ быть до[illegible] до конца. Такимъ образомъ, алгебраическія дѣйствія имѣютъ цѣлью: *ука[illegible] знаками производимыя дѣйствія* и *преобразовать полученный ре[illegible], съ тѣмъ, чтобы сдѣлать выраженіе его болѣе короткимъ* *или болѣе яснымъ* Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что далѣе идти нельзя. При этомъ, такъ какъ алгебраическое количество состоитъ изъ двухъ элементовъ — абсолютной величины и знака, то и правило каждаго алгебраическаго дѣйствія должно состоять изъ двухъ частей: правила абсолютныхъ величинъ и правила знаковъ.

13. Приступая къ какому-либо дѣйствію, надо прежде всего опредѣлить смыслъ его. При этомъ, уже въ ариѳметикѣ мы видѣли, что обобщеніе понятія о числѣ ведетъ къ *обобщенію опредѣленій* самыхъ дѣйствій, въ тѣхъ видахъ, чтобы избѣжать накопленія частныхъ случаевъ и всѣ эти случаи соединить въ одно общее выраженіе. Такъ, опредѣленіе дѣйствія умноженія расширяется при переходѣ отъ цѣлыхъ чиселъ къ дробнымъ. При этихъ послѣдовательныхъ обобщеніяхъ могутъ иногда утратиться тѣ или другія свойства дѣйствій. Такъ, мы увидимъ далѣе, что извлеченіе корня, — дѣйствіе въ ариѳметическомъ смыслѣ дающее одинъ результатъ, въ алгебраическомъ же смыслѣ приводитъ къ нѣсколькимъ различнымъ результатамъ; въ такомъ случаѣ это обобщенное дѣйствіе теряетъ свойство давать *одинъ* результатъ.

Но если, въ видахъ обобщенія, и можно утратить то или другое свойство операціи, необходимо условиться не прибавлять никакихъ новыхъ свойствъ къ тѣмъ, которыя имѣли мѣсто для дѣйствій надъ количествами менѣе общими, и это въ тѣхъ видахъ, чтобы всякое правило, установленное для обобщеннаго дѣйствія, было приложимо и къ менѣе общему случаю, содержа въ себѣ, какъ частный случай, правило, найденное ранѣе для дѣйствія, разсматриваемаго въ болѣе узкомъ смыслѣ, совершенно такъ же, какъ менѣе общій видъ количествъ содержится какъ частный случай въ количествахъ обобщенныхъ.

Это начало, которое слѣдуетъ соблюдать при обобщеніи опредѣленій количествъ и дѣйствій надъ ними, названо Ганкелемъ *началомъ постоянства правилъ вычисленія*. Въ силу этого начала всякое правило, относящееся къ количествамъ обобщеннымъ, должно прилагаться и къ количествамъ низшаго порядка, такъ какъ обобщеніе не вводитъ новыхъ свойствъ, а стало быть и не даетъ мѣста такимъ правиламъ, которыя не вытекали бы уже изъ свойствъ ранѣе принятыхъ.

14. — Установленіе правилъ вычисленія зависитъ единственно отъ свойствъ дѣйствій; отсюда необходимость предварительнаго изученія этихъ свойствъ. Ознакомимся прежде всего съ фундаментальными свойствами суммы и разности.

При выводѣ этихъ свойствъ мы будемъ означать противоположныя величины — каждую одною буквою, такимъ образомъ подъ буквами: a, b, c, d, ... будемъ представлять противоположныя величины, т.-е. абсолютныя значенія съ сопровождающими ихъ знаками.

Свойства суммы.

15. Понятіе о *сложеніи* есть основное, а потому и не поддается никакимъ опредѣленіямъ.

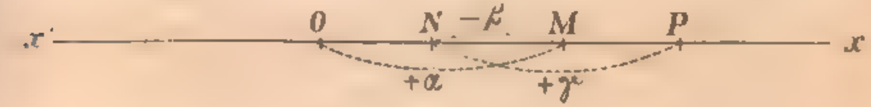
Мы видѣли, что каковы бы ни были противоположныя величины (скорости, времена, температуры), ихъ всегда можно представлять прямыми линіями, наносимыми на неограниченной прямой въ томъ или другомъ направленіи. Поэтому, если мы желаемъ сложить нѣсколько величинъ, то должны помѣстить ихъ одну за другой, каждую въ направленіи, опредѣляемомъ ея знакомъ, т. е. начало второй помѣстить въ концѣ первой, нанося ее въ направленіи, указываемомъ ея знакомъ, и т. д. Суммою будетъ разстояніе отъ начала первой до конца послѣдней. Это геометрическое представленіе сложенія полезно какъ облегчающее средство при доказательствѣ нѣкоторыхъ изъ нижеслѣдующихъ теоремъ.

Теорема. I. — *Придать къ данному количеству послѣдовательно нѣсколько другихъ — все равно, что придать ихъ сумму; т.-е.*

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Этою теоремою выражается такъ называемый *законъ сочетательный* въ сложенiи.

Доказательство. — Пусть, напр., $a=+\alpha$, $b=-\beta$, $c=+\gamma$, гдѣ α, β и γ суть абсолютныя величины. На линiи $x'x$ отъ точки O вправо нанесемъ сначала a: придемъ въ нѣкоторую точку M. Затѣмъ наносимъ $-\beta$, сообразно съ знакомъ этого количества, влѣво отъ точки M: придемъ въ точку N. Наконецъ,



Черт. 5.

отъ точки N вправо наносимъ отрѣзокъ γ: приходимъ въ точку P. Сумма $a+b+c$ выразится линiей OP отъ начала перваго слагаемаго до конца третьяго.

Но $b+c$ составляетъ въ то же время сумму MP, ибо M есть начало слагаемаго b, а P — конецъ слагаемаго c; сл. представляя линiю OP суммою OM + MP, и замѣчая, что $OM=a$, а $MP=b+c$, имѣемъ

$$OP=a+(b+c)\dots(1).$$

А раньше мы нашли, что

$$OP=a+b+c\dots(2).$$

Изъ (1) и (2) заключаемъ, что

$$a+b+c=a+(b+c),$$

такъ какъ оба эти выраженiя представляютъ одну и ту же линiю OP.

Теорема II. — *Сумма не измѣнится отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

Этою теоремою выражается *законъ перемѣстительный въ сложенiи.*

Доказательство. — I. Докажемъ эту теорему сначала для двухъ слагаемыхъ, т.-е. что

$$a+b=b+a.$$

Доказательство это, въ свою очередь, распадается на нѣсколько случаевъ, смотря по знакамъ количествъ a и b.

Черт. 6.

Пусть a и b — положительныя количества. Наносимъ a по линiи Ox, [illegible] отъ точки O: придемъ въ точку M. Затѣмъ, отъ точки M въ томъ же направленія наносимъ b, и такимъ образомъ приходимъ въ точку P. Сумма равна линіи OP отъ начала перваго слагаемаго до конца второго:

$$a + b = OP \ldots (1).$$

Если теперь на линіи OP отложимъ часть $OQ = b$, то остальная ея часть QP будетъ равна a; слѣдов. линію OP можно разсматривать также какъ сумму линій b и a:

$$b + a = OP \ldots (2).$$

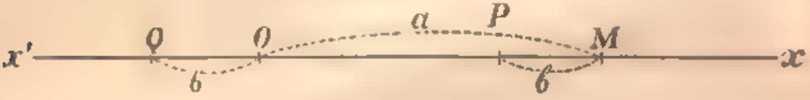
Изъ (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$a + b = b + a.$$

2) Составимъ сумму $a + b$, полагая, что a положительно и равно $+\alpha$, а b отрицательно и равно $-\beta$; положимъ сверхъ того, что $\alpha > \beta$.

Нанесемъ a на линію Ox: придемъ въ точку M; отъ точки M наносимъ линію b, сообразно съ ея знакомъ, влѣво: придемъ въ точку P. Сумма $a + b$ выразится линіей OP отъ начала перваго до конца второго слагаемаго:

$$a + b = OP \ldots\ldots (3).$$



Черт. 7.

Нанесемъ теперь b, сообразно съ знакомъ этой линіи, влѣво отъ O: придемъ въ точку Q; очевидно, что линія QP = OM (ибо каждая состоитъ изъ b, сложеннаго съ OP): а потому, нанося a отъ точки Q вправо, придемъ въ точку P, и сумма $b + a$ выразится линіей OP отъ начала слагаемаго b до конца a.

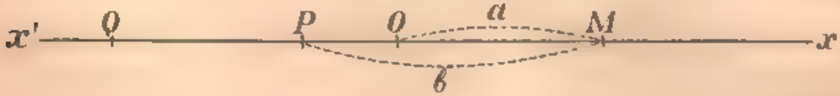
$$b + a = OP \ldots\ldots (4).$$

Изъ равенствъ (3) и (4) находимъ опять, что

$$a + b = b + a,$$

ибо та и другая сумма выражаетъ одну и ту же линію OP.

Пусть $\alpha < \beta$. Нанеся a на линію Ox вправо отъ начала, придемъ въ точку M; отъ точки M наносимъ b въ направленіи Ox'; такъ какъ $\beta > \alpha$, то придемъ въ нѣкоторую точку P, лежащую влѣво отъ O. Сумма $a + b$ выразится линіей OP, отъ начала перваго до конца второго слагаемаго:



Черт. 8.

$$a + b = OP \ldots\ldots (5).$$

Отложимъ отъ точки O влѣво линію $OQ = MP = b$; очевидно, что QP [illegible] ѣзка OM или a. Слѣд., линія OP будетъ выражать сумму линій: [illegible] $-b$ и $QP = +a$, т. е.

$$b + a = OP \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Изъ равенствъ (5) и (6) заключаемъ:

$$a + b = b + a.$$

Если бы количества a и b были оба отрицательны, то доказательство [illegible] то же самое, что и въ случаѣ 1-мъ, только обѣ линіи пришлось бы откладывать влѣво отъ начала.

Итакъ, теорема доказана для двухъ слагаемыхъ.

Докажемъ теперь, что если имѣемъ сумму трехъ слагаемыхъ, то можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы [illegible],

$$a + b + c = a + (b + c);$$

измѣняя въ скобкахъ порядокъ слагаемыхъ, отъ чего, по теоремѣ II для двухъ слагаемыхъ, сумма ихъ не измѣнится, находимъ

$$a + b + c = a + (c + b);$$

затѣмъ замѣняя, на основаніи теоремы I, выраженіе $a + (c + b)$ равнымъ ему $a + c + b$, получаемъ

$$a + b + c = a + c + b.$$

III. Въ суммѣ, состоящей изъ сколькихъ угодно слагаемыхъ, можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, такую сумму можно разсматривать какъ состоящую изъ трехъ слагаемыхъ.

IV. Во всякой суммѣ можно перемѣнить мѣста двухъ послѣдовательныхъ слагаемыхъ, гдѣ бы они ни находились.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи пункта III имѣемъ

$$a + b + c + d = a + b + d + c;$$

прибавляя къ равнымъ величинамъ поровну (по e), получимъ равныя, слѣд.

$$a + b + c + d + e = a + b + d + c + e;$$

совершенно такимъ же образомъ

$$a + b + c + d + e + f = a + b + d + c + e + f, \text{ и т. д.}$$

V. Можно измѣнить какъ угодно мѣста слагаемыхъ въ суммѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣщая два послѣдовательныхъ члена одинъ на мѣсто [illegible], можно всякое слагаемое помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ.

Теорема III. *Нѣсколько слагаемыхъ можно замѣнить ихъ суммою* ([illegible] ее), *и наоборотъ — одно слагаемое можно замѣнить нѣсколькими, которыхъ сумму оно представляетъ.*

Доказательство. — I. Помѣстимъ въ началѣ всѣ слагаемыя, которыя мы желаемъ суммировать; вычислимъ ихъ сумму, сообразно съ ихъ знаками; наконецъ, полученный результатъ помѣстимъ тамъ, гдѣ хотимъ. Эти преобразованія, законность которыхъ выше доказана, доказываютъ первую часть теоремы.

II. Помѣстимъ на первомъ мѣстѣ слагаемое, которое желаемъ разложить; разложимъ его на части, сумму которыхъ оно составляетъ; наконецъ, размѣстимъ какъ угодно эти части въ данной суммѣ. Всѣ эти преобразованія, которыя по вышедоказанному всегда можно сдѣлать, служатъ доказательствомъ второй части теоремы.

Свойства разности.

16. Опредѣленіе вычитанія. — *Вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію. Вычесть изъ первой величины вторую значитъ найти такую третью величину, которая будучи сложена со второю, давала бы первую.* Итакъ, вычитаніе служитъ для рѣшенія слѣдующей задачи: «по данной суммѣ a двухъ количествъ и одному изъ нихъ b найти другое».

Дѣйствіе вычитанія и результатъ его, называемый *остаткомъ*, или *разностью*, обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$a - b.$$

Назвавъ остатокъ буквою z, по опредѣленію вычитанія имѣемъ

$$a - b = z.$$

Теорема I. — *Вычитаніе какой угодно величины всегда можно замѣнить прибавленіемъ величины ей противоположной* (т.-е. противоположнаго знака).

Доказательство. Замѣтимъ сначала, что сумма двухъ количествъ a и a *) одинаковой абсолютной величины, но противоположныхъ знаковъ, равна нулю, т.-е.

$$a + \mathrm{a} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, наприм., a есть количество положительное и выражается отрѣзкомъ OM; придать a значитъ отъ точки M влѣво отложить линію MO; придемъ въ точку O. Такимъ образомъ сумма, т.-е. разстояніе отъ начала перваго до конца второго слагаемаго, равна 0. (См. черт. 3.)

Состояніе лица, имѣющаго 5 р. капитала и 5 р. долга, очевидно, равно нулю, сл. $+5$ *р.* $+(-5$ *р.*$) = 0$; и т. п.

Пусть теперь изъ a нужно вычесть b. По опредѣленію вычитанія, это значитъ: найти такое третье количество, которое, будучи сложено съ b, давало бы a. Такимъ свойствомъ обладаетъ количество $a + b$; въ самомъ дѣлѣ:

$$a + b + \mathrm{b} = a + (b + \mathrm{b})$$

по теоремѣ I свойствъ суммы. Но, въ силу только что сдѣланнаго замѣчанія, количество въ скобкахъ равно нулю; слѣд.

$$a - \mathrm{b} = a + b,$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. — *Чтобы вычесть сумму, нужно вычесть послѣдовательно всѣ ея члены.*

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть нужно вычислить выраженіе

$$N - (a + b + c + d);$$

---

*) Въ этой теоремѣ и въ теоремѣ IV мы обозначаемъ равныя, но противоположныя количества одинаковыми литерами разныхъ начертаній.

Назвавъ разность буквою δ, мы, по опредѣленію вычитанія, имѣемъ равенство

$$N = \delta + (a + b + c + d),$$

или, по теоремѣ I свойствъ суммы,

$$N = \delta + a + b + c + d,$$

а перемѣнивъ мѣста слагаемыхъ:

$$N = a + \delta + d + c + b,$$

или, по той же теоремѣ:

$$N = a + (\delta + d + c + b).$$

Здѣсь N есть сумма, $\delta + d + c + b$—одно слагаемое, a—другое; по опредѣленію вычитанія (по данной суммѣ N и одному слагаемому, a, другое опредѣляется вычитаніемъ) имѣемъ:

$$N - a = \delta + d + c + b.$$

Такимъ же точно разсужденіемъ изъ послѣдняго равенства находимъ послѣдовательно:

$$N - a - b = c + (\delta + d);$$
$$N - a - b - c = \delta + d;$$
$$N - a - b - c - d = \delta.$$

Подставивъ вмѣсто δ равную ему величину, находимъ

$$N - (a + b + c + d) = N - a - b - c - d,$$

что и требовалось доказать.

Принципъ, выражаемый этою теоремой, служитъ, между прочимъ, основаніемъ теоріи вычитанія цѣлыхъ чиселъ: изъ уменьшаемаго послѣдовательно отнимаютъ всѣ части вычитаемаго, разсматривая его какъ сумму единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.

Теорема III. *Чтобы придать разность, нужно придать уменьшаемое и изъ результата отнять вычитаемое.*

Доказательство.—Пусть будетъ дана разность

$$a - b = \delta;$$

по опредѣленію вычитанія, имѣемъ

$$a = \delta + b.$$

Придавая равныя къ равнымъ, получимъ равныя величины (приданіе $\delta + b$ означаемъ скобками); сл.

$$N + a = N + (\delta + b);$$

отсюда, по теор. I св. сум., имѣемъ:

$$N + a = N + \delta + b,$$

а по опредѣленію вычитанія:

$$N + a - b = N + \delta,$$

или, замѣнивъ δ его величиною, получаемъ

$$N + a - b = N + (a - b),$$

что и требовалось доказать.

Теорема IV. — *Чтобы вычесть разность, нужно вычесть уменьшаемое и къ результату придать вычитаемое.*

Доказательство.—Изъ равенства

$$a - b = \delta,$$

имѣемъ

$$a = \delta + b.$$

Придавая къ обѣимъ частямъ по b, имѣемъ:

$$a - b = \delta + b - b = \delta;$$

вычитая равныя изъ равныхъ, получимъ:

$$N - (a + b) = N - \delta;$$

отсюда, по теор. II св. разн., имѣемъ

$$N - a - b = N - \delta$$

но вычесть b — то же самое, что придать b; слѣд.

$$N - a + b = N - \delta = N - (a - b),$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Придавая или вычитая разность, всегда можемъ измѣнить порядокъ двухъ производимыхъ дѣйствій.*

Доказательство. — Чтобы доказать теорему для случая приданія разности, напишемъ равенство

$$N + a - b = a + N - b,$$

справедливое потому, что въ суммѣ $N + a$ можно перемѣнить порядокъ слагаемыхъ.

Вторую часть равенства, на основаніи теоремы III св. разн., можно представить въ видѣ: $a + (N - b)$; слѣд.

$$N + a - b = a + (N - b);$$

перемѣнивъ снова мѣста слагаемыхъ во второй части, получимъ

$$N + a - b = (N - b) + a;$$

опустивъ скобки, такъ какъ и безъ нихъ смыслъ дѣйствій ясенъ, имѣемъ

$$N + a - b = N - b + a.$$

Для случая вычитанія разности, на основаніи случая приданія прямо имѣемъ:

$$N - a + b = N + b - a.$$

Теорема V. — *Разность не измѣнится, если къ уменьшаемому и вычитаемому придать или изъ нихъ вычесть одно и то же количество.*

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$a - b = z,$$

по опредѣленію вычитанія, имѣемъ

$$a = z + b.$$

Придавая къ равнымъ поровну, получимъ количества равныя, слѣд.

$$a + m = z + b + m,$$

или по теоремѣ I св. суммы:

$$a + m = z + (b + m).$$

Отсюда по опредѣленію вычитанія,

$$(a + m) - (b + m) = z,$$

или, замѣнивъ z его величиною, имѣемъ

$$(a + m) - (b + m) = a - b.$$

Совершенно аналогичнымъ пріемомъ докажемъ, что

$$(a - m) - (b - m) = a - b.$$

Слѣдствіе. — *Всякая разность равна обращенной разности, взятой со знакомъ минусъ.*

Доказательство. — Имѣя разность $a - b$, мы не измѣнимъ ее, вычтя изъ обоихъ членовъ ея по a; поэтому

$$a - b = (a - a) - (b - a);$$

или

$$a - b = 0 - (b - a);$$

опустивъ нуль, получимъ окончательно

$$a - b = -(b - a).$$

Теорема VI. — *Количество не измѣнится, если къ нему придать и затѣмъ вычесть одну и ту же величину.*

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ III о приданіи разности имѣемъ:

$$P + a - a = P + (a - a) = P + 0 = P.$$

Свойства полинома.

17. Выраженіе вида

$$a + b - c + d - e$$

составляющее рядъ сложеній и вычитаній, называется *полиномомъ* или *многочленомъ*. Члены, предшествуемые знакомъ +, называются *положительными*, а предшествуемые знакомъ —, *отрицательными*. Если передъ первымъ членомъ не находится никакого знака, надо подразумѣвать +. Члены полинома суть количества, которыя сами по себѣ могутъ быть или положительныя, или отрицательныя. Отдѣльный членъ, называемый *одночленомъ* или *мономомъ*, всегда можно разсматривать какъ двучленъ или биномъ; въ самомъ дѣлѣ:

$$a = a + 0 = 0 + a = a - 0.$$

18. Теорема. *Во всякомъ полиномѣ можно какъ угодно измѣнять порядокъ членовъ, сохраняя передъ ними ихъ знаки. величина полинома отъ этого не измѣнится.*

Доказательство. — I. Сначала докажемъ, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ членовъ; т.-е., назвавъ совокупность предшествующихъ членовъ буквою P, докажемъ справедливость равенствъ

$$P + a + b = P + b + a,$$
$$P - a - b = P - b - a,$$
$$P + a - b = P - b + a.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ II свойствъ суммы величина суммы не измѣнится отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ, слѣд. 1-е равенство доказано.

Для доказательства второго замѣтимъ, что на основаніи теоремы II свойствъ разности имѣемъ

$$P - a - b = P - (a + b),$$

измѣнивъ въ суммѣ $a + b$ мѣста слагаемыхъ, получимъ

$$P - a - b = P - (b + a);$$

отсюда, основываясь опять на теор. II св. разн., вторую часть замѣнимъ формулою $P - b - a$, послѣ чего окончательно находимъ

$$P - a - b = P - b - a.$$

Наконецъ, на основаніи слѣдствія теоремы IV св. разн., прямо имѣемъ

$$P + a - b = P - b + a,$$

и третье равенство доказано.

II. Докажемъ теперь, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣдовательныхъ (рядомъ стоящихъ) членовъ полинома.

Въ самомъ дѣлѣ, всякіе два рядомъ стоящіе члена суть послѣдніе члены полинома, составленнаго изъ нихъ и имъ предшествующихъ членовъ; а по I пункту нашей теоремы такіе два члена могутъ быть переставлены одинъ на мѣсто другого.

III. Можно измѣнить какъ угодно порядокъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, переставляя два послѣдовательные члена одинъ на мѣсто другого, можно какой угодно членъ полинома перевести постепенно на какое угодно мѣсто.

19. Приведеніе подобныхъ членовъ полинома. — Два члена, состоящіе изъ одинаковыхъ буквъ и надъ одинаковыми буквами имѣющіе одинаковыхъ показателей, а коэффиціенты и знаки которыхъ могутъ быть какіе угодно, называются *подобными*. Короче, *подобными одночленами называются такіе, у которыхъ буквенная часть одинакова*. Такъ, $3a^2b^3c$ и $-7a^2b^3c$ — подобны; также $4(x - y)^2z^3$ и $-\frac{1}{2}(x - y)^2z^3$ — подобны между собою.

Когда многочленъ содержитъ подобные члены, его можно упростить, соедиподобные члены въ одинъ. Соединеніе подобныхъ членовъ въ одинъ называется *приведеніемъ*.

При выводѣ правилъ приведенія нужно разсмотрѣть слѣдующіе случаи.

1) *Знаки подобныхъ членовъ одинаковы.* Пусть данъ двучленъ, состоящій изъ положительныхъ членовъ, напр., $3a^2b$ $5a^2b$. Знакъ +, подразумѣваемый передъ членомъ $3a^2b$, показываетъ, что слѣдуетъ *придать* $3a^2b$; + передъ вторымъ членомъ означаетъ, что *придается* $5a^2b$; но придать $3a^2b$, а затѣмъ $5a^2b$ — все равно что сразу придать $8a^2b$, слѣдовательно

$$3a^2b + 5a^2b = +8a^2b.$$

Возьмемъ двучленъ $-4ab^3 - 5ab^3$. Знакъ (—) передъ первымъ членомъ показываетъ, что нужно отнять $4ab^3$; тотъ же знакъ передъ вторымъ членомъ означаетъ, что нужно отнять $5ab^3$; но отнять $4ab^3$ и затѣмъ $5ab^3$ — все равно что сразу отнять $9ab^3$; итакъ

$$-4ab^3 - 5ab^3 = -9ab^3.$$

Отсюда правило: *если знаки подобныхъ членовъ одинаковы, то для приведенія членовъ въ одинъ нужно буквенное выраженіе оставить безъ перемѣны, коэффиціенты сложить, а знакъ поставить общій.*

2) *Знаки приводимыхъ членовъ различны.* Возьмемъ выраженіе, состоящее изъ двухъ подобныхъ членовъ съ разными знаками, напр., $5a^2b^3 - 3a^2b^3$. Знакъ ( ), подразумѣваемый передъ первымъ членомъ, означаетъ, что нужно придать $5a^2b^3$; (—) передъ вторымъ членомъ показываетъ, что нужно вычесть $3a^2b^3$. Придать 5 разъ a^2b^3, а затѣмъ вычесть 3 раза a^2b^3 — все равно что придать 2 раза a^2b^3; сл.

$$5a^2b^3 - 3a^2b^3 = +2a^2b^3.$$

Въ выраженіи: $5a^2b^3$ $2a^2b^3$ знакъ (—) передъ первымъ членомъ показываетъ, что нужно 5 разъ вычесть a^2b^3; ( ) передъ вторымъ членомъ показываетъ, что нужно придать 2 раза a^2b^3; но это — все равно что отнять 3 раза a^2b^3. Слѣд.

$$-5a^2b^3 + 2a^2b^3 = -3a^2b^3.$$

Отсюда правило: *Когда знаки подобныхъ членовъ разные, то для соединенія членовъ въ одинъ нужно — буквенное выраженіе оставить безъ измѣненія, изъ большаго коэффиціента вычесть меньшій и передъ разностью поставить знакъ большаго коэффиціента.*

Можетъ случиться, что подобные члены имѣютъ одинаковые коэффиціенты, но разные знаки, напр., $2a$ $2a$; очевидно, что такіе члены взаимно уничтожаются, т.-е. даютъ въ результатѣ нуль. Слѣд.

$$+2a - 2a = 0.$$

При помощи этихъ правилъ можно дѣлать приведеніе подобныхъ членовъ полинома, сколько бы ихъ ни было. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя первое правило, мы соединимъ въ одинъ членъ всѣ подобные члены, имѣющіе одинаковые знаки; послѣ этого придется сдѣлать приведеніе членовъ съ разными знаками, примѣняя второе правило. Пусть, напр., данъ полиномъ

$$7a^6 - 5a^4b^2 \quad 5a^4b^2 \quad 3a^4b^2 \quad 8a^4b^2 - 13a^4b^2 \quad a^4b^2 - b^6.$$

Членъ $7a^6$, не имѣющій себѣ подобнаго, остается неприводимымъ. Члены: $-5a^4b^2$ и $+5a^4b^2$, какъ подобные члены съ разными знаками и равными коэффиціентами, взаимно уничтожаются. Затѣмъ: $-3a^4b^2$ и $-13a^4b^2$ даютъ, по первому правилу, $-16a^4b^2$; члены: $+8a^4b^2$ и $+a^4b^2$, по тому же правилу, даютъ $+9a^4b^2$. Члены: $-16a^4b^2$ и $+9a^4b^2$, по второму правилу, даютъ $-7a^4b^2$. Наконецъ $-b^6$, какъ не имѣющій себѣ подобнаго, остается не приводимымъ. Такимъ образомъ данный полиномъ приводится къ слѣдующему сокращенному виду:

$$7a^6 - 7a^4b^2 - b^6.$$

20. Расположеніе многочлена по степенямъ главной буквы — Когда показатели нѣкоторой буквы въ послѣдовательныхъ членахъ идутъ постоянно уменьшаясь или увеличиваясь, то говорятъ, что полиномъ расположенъ по степенямъ этой буквы, которая въ такомъ случаѣ называется *главной*.

Такъ, полиномъ

$$3 - 5x + 6x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы x.

Многочленъ

$$3x^4 - \frac{5a}{b^2}x^3 - \frac{6a^2}{b}x^2 + \frac{3a^4}{5}x - 1$$

расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x.

Многочленъ

$$9ax^5y - 12x^4y^4 + 7a^2x^2y^5$$

расположенъ одновременно по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ буквы y.

Многочленъ называется *полнымъ*, если показатели главной буквы идутъ увеличиваясь или уменьшаясь постоянно на единицу и если имѣется членъ, не содержащій главной буквы. Таковъ, наприм., многочленъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e:$$

это есть полный многочленъ относительно буквы x.

Если же нѣкоторыхъ степеней главной буквы недостаетъ, многочленъ называется неполнымъ. Наприм.,

$$x^4 - 3x^3 + 2x + 1$$

есть неполный многочленъ четвертой степени относительно буквы x: въ немъ недостаетъ члена, содержащаго x^2.

Сложеніе.

21. Сложеніе полиномовъ. Теорема. — *Чтобы придать полиномъ къ какому-нибудь количеству, надо всѣ члены полинома приписать къ этому количеству — каждый съ тѣмъ знакомъ, какой передъ нимъ находится.*

Первое доказательство — Оно основано на правилѣ приданія суммы или разности. Пусть требуется къ P придать полиномъ $a - b + c - d$; дѣйствіе обозначаемъ, заключивъ многочленъ въ скобки:

$$P + (a - b + c - d).$$

Разсматривая d какъ количество вычитаемое изъ $a - b + c$, обозначаемъ это дѣйствіе, заключивъ $a - b + c$ въ новыя скобки; такимъ образомъ получимъ:

$$P + (a - b + c - d) = P + [(a - b + c) - d].$$

Разсматривая $a - b + c$ какъ одинъ членъ разности, а d какъ другой, и припоминая, что по теор. III св. разн., для приданія разности надо придать первый членъ и отнять второй, найдемъ:

$$P + (a - b + c - d) = P + (a - b + c) - d.$$

Разсматривая $a - b$ какъ одинъ членъ суммы, а c какъ другой, что обозначаемъ соотвѣтствующими скобками, имѣемъ:

$$P + (a - b + c - d) = P + [(a - b) + c] - d.$$

На основаніи теоремы III св. суммы можно членъ $[(a - b) + c]$ замѣнить суммою составляющихъ его членовъ; так. обр.

$$P + (a - b + c - d) = P + (a - b) + c - d.$$

Наконецъ, по теоремѣ о приданіи разности получимъ окончательно

$$P + (a - b + c - d) = P + a - b + c - d.$$

Второе доказательство. — Оно проще перваго. Разсматривая придаваемый полиномъ какъ одинъ членъ, мы, перемѣняя мѣста слагаемыхъ, можемъ написать:

$$P + (a - b + c - d) = (a - b + c - d) + P.$$

Вторая часть равенства означаетъ, что изъ a надо вычесть b, затѣмъ придать c, вычесть d и, наконецъ, придать P; но тотъ же смыслъ будетъ имѣть [illegible] выраженіе, если въ немъ опустить скобки; сл. имѣемъ право написать

$$P + (a - b + c - d) = a - b + c - d + P.$$

Переставивъ затѣмъ послѣдній членъ второй части на первое мѣсто, получимъ окончательно

$$P + (a - b + c - d) = P + a - b + c - d.$$

Итакъ, для сложенія многочленовъ надо члены одного многочлена приписать другому, каждый съ тѣмъ знакомъ, какой передъ нимъ находится, и, если [illegible], сдѣлать приведеніе. На практикѣ, для удобства приведенія, пишутъ чле[illegible] одного многочлена подъ другимъ, наблюдая, чтобы подобные члены нахо[illegible] въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Такъ, пусть требуется сдѣлать сло[illegible]

$$5a^2x + 7ax^2 - a^3 + (8a^3 - x^3 + 4ax^2 - 3a^2x) + (4a^2x - 2x^3 + a^3).$$

Располагая многочлены сказаннымъ образомъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Слагаемыя} & \left\{ \begin{array}{rrrr} 4x^3 & - 5a^2x & + 7ax^2 & - a^3 \\ - x^3 & - 3a^2x & + 4ax^2 & + 8a^3 \\ - 2x^3 & + 4a^2x & & + a^3 \end{array} \right. \\ \textbf{Сумма} \ldots & \quad \begin{array}{rrrr} x^3 & - 4a^2x & + 11ax^2 & + 8a^3 \end{array} \end{array}$$

или, располагая члены по убывающимъ степенямъ буквы a:

$$8a^3 - 4a^2x + 11ax^2 + x^3.$$

22. Сложеніе мономовъ. — Правило этого дѣйствія можетъ быть выведено на основаніи правила сложенія полиномовъ, такъ какъ всякій мономъ можно разсматривать какъ биномъ.

Пусть къ какому-нибудь количеству P, подъ которымъ будемъ подразумѣвать или полиномъ, или мономъ, требуется придать $+a$. Разсматривая $+a$ какъ биномъ $0+a$, на основаніи правила сложенія полиномовъ, получимъ

$$P+(+a)=P+(0+a)=P+0+a;$$

опуская 0, имѣемъ:

$$P+(+a)=P+a\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Разсматривая $-a$ какъ биномъ $0-a$, подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$P+(-a)=P+(0-a)=P+0-a=P-a\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Итакъ, *придаваемый одночленъ надо приписывать къ данному количеству съ его знакомъ.*

Такъ, наприм.

$$5a^3b^2x+(-11a^3b^2x)=5a^3b^2x-11a^3b^2x;$$

по приведеніи же найдемъ: $-6a^3b^2x$.

Такимъ же образомъ найдемъ:

1. $+5+(+7)=+5+7=+12$, ибо 5 положительныхъ единицъ да 7 такихъ же единицъ даютъ 12 положительныхъ единицъ или $+12$.

2. $-5+(-7)=-5-7=-12$, ибо 5 отрицательныхъ да 7 отриц. единицъ даютъ всего 12 отрицательныхъ единицъ или -12.

3. $+8+(-5)=+8-5=+3$, ибо 8 положительныхъ да 5 отриц. единицъ даютъ въ совокупности 3 положительныхъ единицы или $+3$.

Примѣчаніе. — Изъ послѣднихъ примѣровъ заключаемъ, что съ алгебраическимъ сложеніемъ не всегда соединяется понятіе объ увеличеніи: придаміе положительнаго числа означаетъ увеличеніе, придаміе отрицательнаго — уменьшеніе.

Теорема. — *Всякій полиномъ можно разсматривать какъ сумму членовъ, его составляющихъ.*

Такимъ образомъ:

$$a-b+c-d=(+a)+(-b)+(+c)+(-d).$$

Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя правило сложенія мономовъ ко второй части равенства, найдемъ выраженіе, стоящее въ первой его части; заключаемъ, что преобразованіе, указываемое этимъ равенствомъ, законно.

Вычитаніе.

23 Вычитаніе многочленовъ. Теорема. — *Чтобы вычесть многочленъ изъ какого-нибудь количества, надо къ этому количеству приписать всѣ члены вычитаемаго съ обратными знаками.*

Первое доказательство. — Оно основано на правилахъ вычитанія ты или разности. Пусть требуется изъ P вычесть многочленъ $a-b+c-d$; твіе обозначаемъ, заключивъ вычитаемое въ скобки:

$$P-(a-b+c-d).$$

Разсматривая d какъ количество, вычитаемое изъ $a-b+c$, обозначаемъ твіе этого вычитанія, заключивъ $a-b+c$ въ скобки. Такимъ образомъ

$$P-(a-b+c-d)=P-[(a-b+c)-d].$$

Разсматривая $a-b+c$ какъ одинъ членъ разности, а d—какъ другой, на ованіи теоремы IV св. разности, имѣемъ:

$$P-[(a-b+c)-d]=P-(a-b+c)+d.$$

Выраженіе въ скобкахъ разсматриваемъ какъ сумму двухъ слагаемыхъ, изъ торыхъ одно $a-b$, а другое c; обозначая это соотвѣтствующими скобками, мъ второй части послѣдняго равенства видъ

$$P-[(a-b)+c]+d.$$

Это выраженіе примѣненіемъ теоремы II св. разн. преобразовываемъ въ слѣдующее:

$$P-(a-b)-c+d.$$

Примѣняя сюда теорему IV свойствъ разности, находимъ

$$P-a+b-c+d.$$

Итакъ, указанныя преобразованія приводятъ къ равенству:

$$P-(a-b+c-d)=P-a+b-c+d,$$

что и требовалось доказать.

Второе доказательство.—Эту теорему можно доказать иначе, основываясь на опредѣленіи вычитанія и на правилѣ сложенія многочленовъ.

Вычесть изъ P многочленъ $a-b+c-d$, значитъ найти такой многочленъ, визавъ къ которому вычитаемое, нашли бы уменьшаемое P. Полиномъ, имѣющій такое свойство, есть

$$P-a+b-c+d;$$

амомъ дѣлѣ, придавая къ нему данное вычитаемое, для чего надо всѣ члены ѣдняго приписать съ ихъ знаками, находимъ

$$P-a+b-c+d+a-b+c-d;$$

лавъ въ этомъ выраженіи приведеніе, находимъ въ результатѣ P. Стало дѣйствительно $P-a+b-c+d$ есть остатокъ вычитанія многочлена $a-b+c-d$ изъ P, т.-е.

$$P-(a-b+c-d)=P-a+b-c+d.$$

Итакъ, для вычитанія многочленовъ надо къ уменьшаемому приписать члены емаго съ обратными знаками и, если можно, сдѣлать приведеніе.

На практикѣ, для удобства приведенія, пишутъ члены вычитаемаго подъ емымъ, наблюдая, чтобы подобные члены находились въ одномъ вертистолбцѣ.

Такъ, пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$(5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 8ab^4 - b^5) - (2a^3b^2 - 7a^2b^3 + 3ab^4 - 6b^5).$$

Располагая многочлены сказаннымъ образомъ и перемѣняя въ вычитаемомъ знаки на противоположные (измѣненные знаки поставлены на верху), имѣемъ:

Уменьшаемое . . . . . $5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 8ab^4 - b^5$
Вычитаемое . . . . . $-2a^3b^2 \pm 7a^2b^3 \mp 3ab^4 \pm 6b^5$
Остатокъ . . . . $3a^3b^2 \qquad + 5ab^4 + 5b^5$

24. Вычитаніе мономовъ.—Правило вычитанія одночленовъ можно вывести на основаніи правила вычитанія многочленовъ, такъ какъ всякій одночленъ можно разсматривать какъ двучленъ.

Пусть изъ какого-нибудь количества P, подъ которымъ можно подразумѣвать или многочленъ, или одночленъ, требуется вычесть $+a$. Разсматривая $+a$ какъ биномъ $0+a$, на основаніи правила вычитанія многочленовъ находимъ

$$P-(+a)=P-(0+a)=P-0-a;$$

опустивъ 0, имѣемъ:

$$P-(+a)=P-a \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Разсматривая $-a$ какъ биномъ $0-a$, подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$P-(-a)=P-(0-a)=P-0+a=P+a \; . \; . \; . \; (2).$$

Такимъ образомъ, *вычитаемый одночленъ надо приписывать къ уменьшаемому съ обратнымъ знакомъ.*

Напримѣръ

$$5a^3b^2c - (-2a^3b^2c)=5a^3b^2c+2a^3b^2c=7a^3b^2c.$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$1) \quad 3-(+5)=3-5=-2.$$
$$2) \quad 3-(-5)=3+5=+8.$$

Замѣчая, что остатокъ перваго вычитанія (-2) меньше уменьшаемаго, между тѣмъ какъ остатокъ второго $(+8)$ больше уменьшаемаго, заключаемъ, что съ алгебраическимъ вычитаніемъ не всегда соединяется понятіе объ уменьшеніи: вычесть положительное число — значитъ уменьшить, вычесть отрицательное—значитъ увеличить.

Примѣчаніе.—Правило вычитанія одночленовъ можно бы было вывести непосредственно, основываясь на опредѣленіи этого дѣйствія; такой выводъ ничѣмъ не отличается отъ второго доказательства правила вычитанія многочленовъ, потому мы его и опускаемъ.

Употребленіе скобокъ.

25. Если многочленъ или нѣсколько его членовъ заключены въ скобки, то можно ихъ опустить, написавъ многочленъ безъ скобокъ. Дѣйствіе это назыв. *раскрытіемъ скобокъ*, а правила его непосредственно вытекаютъ изъ правилъ сложенія и вычитанія многочленовъ. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая.

1. Если передъ скобками стоитъ знакъ +, то можно опустить скобки вмѣстѣ со знакомъ, который передъ ними находится, переписавъ члены, стоявшіе въ скобкахъ, съ ихъ знаками. Такъ, выраженіе

$$a+(-b+c-d+e),$$

по раскрытіи скобокъ, дастъ, по правилу сложенія,

$$a-b+c-d+e.$$

2. Если многочленъ или часть его заключены въ скобки, передъ которыми стоитъ знакъ −, то можно опустить скобки вмѣстѣ съ знакомъ, который имъ предшествуетъ, перемѣнивъ знаки у всѣхъ членовъ, стоящихъ въ скобкахъ. Такъ, многочленъ

$$a-b-(-c+f-h),$$

согласно съ правиломъ вычитанія, по раскрытіи скобокъ дастъ:

$$a-b+c-f+h.$$

Если многочленъ содержитъ нѣсколько паръ скобокъ, то ихъ можно уничтожать послѣдовательно, начиная или съ внутреннихъ, или съ наружныхъ, руководясь каждый разъ вышеприведенными правилами. Такъ, въ выраженіи $a-(b+(c-d))$ раскрывъ сперва наружныя скобки, найдемъ

$$a-b-(c-d),$$

принимая на время $c-d$ за одинъ членъ. Раскрывая оставшіяся скобки, находимъ окончательно

$$a-b-c+d.$$

Наоборотъ, раскрывая сначала внутреннія скобки, т.-е. вида ( ), въ выраженіи

$$a-\{-b+[c-(d-e)]\},$$

получимъ

$$a-\{-b+[c-d+e]\};$$

раскрывъ затѣмъ квадратныя скобки, найдемъ

$$a-\{-b+c-d+e\};$$

раскрывъ, наконецъ, фигурныя скобки, получимъ окончательно:

$$a+b-c+d-e$$

Наоборотъ, можно многочленъ или часть его *заключить въ скобки*, такъ чтобы передъ ними былъ опредѣленный знакъ. Здѣсь опять надо разсмотрѣть два случая.

1. Если многочленъ или часть его желаемъ заключить въ скобки со знакомъ + передъ ними, то у членовъ, вносимыхъ въ скобки, слѣдуетъ сохранить ихъ знаки. Такъ въ выраженіи $a+b-c+d-e$, внося три послѣдніе члена въ скобки со знакомъ + передъ ними, получимъ

$$a+b+(-c+d-e);$$

вѣрность этого преобразованія подтверждается тѣмъ, что, раскрывъ скобки, получимъ данное выраженіе $a+b-c+d-e$.

2. Если же многочленъ или часть его требуется заключить въ скобки со знакомъ передъ ними, то у членовъ, заключаемыхъ въ скобки, надо знаки перемѣнить на обратные. Такъ, если три средніе члена многочлена $a - b + f - h + k$ нужно заключить въ скобки со знакомъ передъ ними, то найдемъ:

$$a - (b - f + h) + k;$$

справедливость преобразованія доказывается тѣмъ, что, раскрывъ скобки, находимъ данное выраженіе

$$a - b + f - h + k.$$

Можно въ данный многочленъ вводить и нѣсколько паръ скобокъ. Такъ, наприм., многочленъ $a - b + c \quad d + e - f$ можно написать въ видѣ

$$a + [-b + c - (d - e + f)].$$

. . .

ГЛАВА IV.

Умноженіе

Опредѣленіе. — Правило знаковъ. — Законъ перемѣстительный. — Умноженіе одночленовъ. — Умноженіе многочлена на одночленъ и обратно. — Умноженіе многочленовъ. — Замѣчательные случаи умноженія.

26. Опредѣленіе. — Если для умноженія даны два ариѳметическія цѣлыя числа, напр. 5 и 4, то умножить первое на второе значитъ взять первое слагаемымъ 4 раза. Но если бы требовалось умножить 5 на $\frac{4}{7}$, то данное опредѣленіе теряетъ смыслъ въ примѣненіи къ этому случаю, потому что нельзя взять 5 слагаемымъ $\frac{4}{7}$ раза. Такимъ образомъ, опредѣленіе дѣйствія умноженія, въ случаѣ умноженія на дробь, должно быть измѣнено, но такъ, чтобы оно не противорѣчило опредѣленію умноженія на цѣлое число. Умножая 5 на 4, мы повторяемъ множимое слагаемымъ четыре раза, т.-е. составляемъ изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы. Распространяя такое понятіе объ умноженіи на случай дробнаго множителя, т. е. понимая подъ умноженіемъ наприм. 5 на $\frac{4}{7}$ составленіе изъ 5 новаго числа такъ, какъ $\frac{4}{7}$ составлено изъ единицы, мы даемъ такое опредѣленіе умноженія, которое, осмысливая случай умноженія на дробь, не противорѣчитъ въ то же время опредѣленію дѣйствія умноженія на цѣлое число. Распространяя это опредѣленіе и на алгебраическія количества, *Лакруа* даетъ слѣдующее общее опредѣленіе умноженія: *умножить одно количество на другое значитъ изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы.*

27. Правило знаковъ. — Примѣнимъ это опредѣленіе къ выводу правила знаковъ при умноженіи.

Пусть требуется положительное количество $(+5)$ помножить на положительное количество $(+4)$. Это значитъ, изъ $+5$ составить новое количество такъ, какъ множитель $+4$ составленъ изъ положительной единицы. Но для составле-

4 изъ +1 надо +1 повторить слагаемымъ четыре раза; въ самомъ дѣлѣ, (+1) + (+1) + (+1) + (+1) = +1 +1 +1 +1 = +4; а потому для нахожденія произведенія надо и +5 взять слагаемымъ четыре раза. Получаемъ

$$(+4) = (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = 5 + 5 + 5 + 5 = +20\ .\ .\ (1).$$

Пусть требуется (— 5) помножить на (+ 4). По опредѣленію, это значитъ изъ (— 5) составить новое количество такъ, какъ (+ 4) составлено изъ положительной единицы, т.-е. надо (— 5) повторить слагаемымъ четыре раза. Найдемъ

$$-5)\cdot(+4) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -5 - 5 - 5 - 5 = -20\ .\ .\ .\ (2).$$

Дано: (+ 5) помножить на (— 4). По опредѣленію, надо изъ (+ 5) составить новое количество такъ, какъ (— 4) составлено изъ (+ 1). Но для составленія (— 4) изъ (+ 1) нужно у (+ 1) перемѣнить знакъ на обратный, и съ этимъ измѣненнымъ знакомъ взять ее слагаемой четыре раза; дѣйствительно, (— 1) + (— 1) + (— 1) + (— 1) = — 4.

Совершая надъ множимымъ тѣ же дѣйствія, что и надъ (+ 1), должно: у (+ 5) перемѣнить знакъ на обратный, вслѣдствіе чего получимъ (— 5), а затѣмъ — 5 повторить слагаемымъ четыре раза. Найдемъ

$$(-4) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -5 - 5 - 5 - 5 = -20\ .\ .\ .\ (3).$$

Пусть, наконецъ, требуется (— 5) помножить на (— 4). Согласно опредѣленію, нужно у (— 5) перемѣнить знакъ на обратный, и съ этимъ измѣненнымъ знакомъ взять его слагаемымъ четыре раза. Получимъ

$$(-4) = (+5) + (+5) + (+5) + (+5) = 5 + 5 + 5 + 5 = +20\ .\ .\ .\ (4).$$

Результаты: (1), (2), (3) и (4) приводятъ къ слѣдующему правилу: *при умноженіи двухъ количествъ надо перемножить ихъ абсолютныя величины и передъ результатомъ поставить знакъ* +, *если множимое и множитель имѣютъ одинаковые знаки, и* (—), *если оба сомножителя имѣютъ знаки разные.*

При выводѣ этого правила мы брали числа цѣлыя. Возьмемъ теперь дробныя числа: пусть, наприм., требуется $-\frac{2}{3}$ умножить на $-\frac{5}{7}$. По опредѣленію умноженія надо изъ $-\frac{2}{3}$ составить новое количество такъ, какъ $\left(-\frac{5}{7}\right)$ составлено изъ (+1). Но для составленія $-\frac{5}{7}$ изъ (+1) надо: 1) +1 раздѣлить на 7, вслѣдствіе чего получимъ $+\frac{1}{7}$, въ самомъ дѣлѣ, помноживъ $+\frac{1}{7}$ на 7, т.-е. повторивъ слагаемымъ 7 разъ, найдемъ $+\frac{1}{7} + \left(+\frac{1}{7}\right) + \cdots + = \frac{7}{7} = +1$, 2) затѣмъ слѣдуетъ $\left(+\frac{1}{7}\right)$ повторить слагаемымъ пять разъ; сдѣлавъ это, найдемъ $+\frac{5}{7}$; и 3) въ результатѣ перемѣнить знакъ на обратный, получимъ $\left(-\frac{5}{7}\right)$. Поступая съ $-\frac{2}{3}$ такъ, какъ сейчасъ мы поступали съ +1, раздѣлимъ, во-первыхъ, $-\frac{2}{3}$ на 7, вслѣдствіе чего находимъ $-\frac{2}{3.7}$;

повторяемъ, затѣмъ, $-\frac{2}{3.7}$ слагаемымъ пять разъ, что даетъ $-\frac{2\times 5}{3\times 7}$; наконецъ, въ результатѣ перемѣняемъ знакъ и находимъ $+\frac{2\times 5}{3\times 7}$, или $+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}$.

Итакъ:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7},$$

что согласно съ вышеприведеннымъ правиломъ.

Такимъ образомъ, обозначая буквами α и β абсолютныя числа, цѣлыя или дробныя, имѣемъ

$$(+\alpha).(+\beta)=+\alpha.\beta$$
$$(-\alpha).(+\beta)=-\alpha.\beta$$
$$(+\alpha).(-\beta)=-\alpha.\beta$$
$$(-\alpha).(-\beta)=+\alpha.\beta$$

28. Обобщеніе правила знаковъ — Пусть a и b будутъ два количества, которыя сами по себѣ представляютъ числа положительныя или отрицательныя; и распространимъ правило знаковъ и на этотъ случай. Докажемъ, напр., что каковы бы ни были знаки a и b, всегда $(-a).(-b)=+ab$. Разсмотримъ четыре случая:

I. Пусть $a=+\alpha$, $b=+\beta$, гдѣ α и β — числа абсолютныя, цѣлыя или дробныя. Въ такомъ случаѣ: $-a=-(+\alpha)=-\alpha$, $-b=-(+\beta)=-\beta$; слѣдовательно

$$(-a).(-b)=-\alpha.-\beta=+\alpha\beta.$$

Съ другой стороны

$$+ab=+(+\alpha.+\beta)=+(+\alpha\beta)=+\alpha\beta.$$

Итакъ, количества $(-a).(-b)$ и $+ab$, какъ равныя порознь одному и тому же количеству $+\alpha\beta$, равны между собою, слѣд.

$$(-a).(-b)=+ab.$$

II. Пусть $a=-\alpha$, $b=+\beta$, гдѣ α и β числа абсолютныя.

Въ этомъ случаѣ: $-a=-(-\alpha)=+\alpha$, и $-b=-(+\beta)=-\beta$; слѣд.

$$(-a).(-b)=+\alpha.-\beta=-\alpha\beta.$$

Съ другой стороны

$$+ab=+(-\alpha.+\beta)=+(-\alpha\beta)=-\alpha\beta.$$

Заключаемъ опять, что и въ этомъ случаѣ

$$(-a).(-b)=+ab.$$

III. Пусть $a=+\alpha$, $b=-\beta$; отсюда: $-a=-(+\alpha)=-\alpha$, и $-b=$ $=-(-\beta)=+\beta$; слѣд. $(-a).(-b)=-\alpha.+\beta=-\alpha\beta$.

Но $+ab=+(+\alpha.-\beta)=+(-\alpha\beta)=-\alpha\beta$.

Опять находимъ, что

$$(-a).(-b)=+ab.$$

Пусть, наконецъ, $a = -\alpha$, $b = -\beta$: въ такомъ случаѣ:

$$-a = -(-\alpha) = +\alpha; \quad -b = -(-\beta) = +\beta; \text{ слѣд.}$$
$$(-a).(-b) = +\alpha . +\beta = +\alpha\beta.$$

Но и $+ab = +(-\alpha . -\beta) = +(+\alpha\beta) = +\alpha\beta$.

Снова имѣемъ

$$(-a).(-b) = +ab$$

Итакъ, каковы бы ни были знаки количествъ a и b, всегда имѣемъ:

$$(-a).(-b) = +ab.$$

Такимъ же точно образомъ можно убѣдиться, что вышедоказанное правило [illegible] распространяется и на три остальные случая; такъ что, каковы бы ни [illegible] количества a и b — положительныя или отрицательныя, и каковы бы ни [illegible] ихъ абсолютныя величины — цѣлыя или дробныя, всегда имѣемъ:

$$(+a).(+b) = +ab;$$
$$(+a).(-b) = -ab;$$
$$(-a).(+b) = -ab;$$
$$(-a).(-b) = +ab.$$

Правило знаковъ при умноженіи, въ сокращенной формѣ, выражаютъ такъ: *одинаковые знаки даютъ въ произведеніи плюсъ, а разные — минусъ.*

Слѣдствія. — Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія правила знаковъ:

1) Произведеніе положительныхъ количествъ всегда положительно; такъ,

$$(+2).(+3).(+4) = +24.$$

2) Знакъ произведенія отрицательныхъ множителей зависитъ отъ числа ихъ, [illegible] если число ихъ четное, то произведеніе будетъ положительное, потому [illegible] въ такомъ случаѣ его можно разбить на пары, изъ которыхъ каждая даетъ [illegible]); если же число отрицательныхъ множителей нечетное, то произведе[illegible] будетъ отрицательное, такъ какъ въ этомъ случаѣ будетъ одинъ отрица[illegible]ный множитель, для котораго нѣтъ пары. Такъ:

1) $(+8).(-5).(-2) = (-40).(-2) = +80$;
2) $(+8).(-5).(-2).(-3) = (+80).(-3) = -240$;
3) $(+8).(-5).(-2).(-3).(-7) = (-240).(-7) = +1680$ и т. под.

Примѣчаніе. — Правило знаковъ встрѣчаемъ уже у *Діофанта* (365 по Р. Х.), но безъ доказательства. Знаменитый *Эйлеръ* въ своей алгебрѣ даетъ [illegible]ющее доказательство: $(-a).(-b)$ равно или $+ab$, или $-ab$, третьяго [illegible]зультата быть не можетъ. Этимъ результатомъ не можетъ быть $-ab$, пото[illegible]то такое произведеніе происходитъ или отъ $(-a)(+b)$, или отъ [illegible] $(-a)$. Поэтому, произведеніе будетъ $+ab$. Очевидно, это доказа[illegible]тво, какъ и доказательство *Крампа*, не выдерживаетъ критики. Крампъ [illegible] *Всеобщей Ариѳметикѣ* говоритъ: «Теорема, въ силу которой два от[illegible]льные множителя даютъ произведеніе со знакомъ, противоположнымъ ми[illegible] и слѣд. *положительное*, сводится къ извѣстному правилу грамматики: [illegible]x negatio affirmat».

29. Теорема. — *Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.* Эта теорема составляетъ такъ называемый *законъ перемѣстительности въ умноженіи.* Докажемъ ее:

1) для цѣлыхъ положительныхъ сомножителей;

2) для дробныхъ положительныхъ производителей;

3) для отрицательныхъ, цѣлыхъ или дробныхъ производителей.

1. Имѣемъ два цѣлыхъ положительныхъ числа a и b; умножить a на b, значитъ повторить a слагаемымъ b разъ; сл.

$$a\,.\,b = a + a + a + a + \ldots \text{ (}b\text{ разъ);}$$

$$\text{но } a = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (}a\text{ разъ); слѣд.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,.\,b = (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ a \text{ разъ)} \\ \quad + (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ \text{id)} \\ \quad + (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ \text{id)} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots \\ \quad + (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ \text{id)} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Число горизонталь-} \\ \text{ныхъ строкъ} = b.\end{array}$$

Приходится составить сумму единицъ, содержащихся въ этихъ b строкахъ. Это можно сдѣлать двоякимъ образомъ.

1) Складывая единицы въ каждыхъ скобкахъ, число которыхъ равно b, мы получимъ b слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое $= a$; такимъ образомъ нужно a повторить b разъ слагаемымъ, что и даетъ намъ произведеніе $a\,.\,b$.

2) Можно взять сумму единицъ, составляющихъ первый вертикальный рядъ и равняющуюся b; затѣмъ сумму единицъ второго вертикальнаго ряда, равную также b и т. д., а какъ всѣхъ вертикальныхъ рядовъ a, то приходится b повторить a разъ слагаемымъ; найдемъ.

$$b + b + b + \ldots \text{ (}a\text{ разъ)} = b\,.\,a.$$

Итакъ, сумма одного и того же числа единицъ можетъ быть представлена произведеніями $a\,.\,b$ и $b\,.\,a$; т.-е.

$$ab = ba.$$

Возьмемъ теперь произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ положительныхъ сомножителей и назовемъ буквою P произведеніе всѣхъ ихъ, кромѣ двухъ послѣднихъ; можно доказать что въ произведеніи Pmn можно перемѣнить мѣста двухъ послѣднихъ множителей, не измѣняя этимъ величины произведенія, т.-е что $Pmn = Pnm$. Въ самомъ дѣлѣ

$$Pm = P + P + P + \ldots \text{ (}m\text{ разъ).}$$

Произведеніе Pmn представляетъ сумму n слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое — Pm или, что тоже, $P + P + P + \ldots$ (m разъ); слѣдовательно

$$\left.\begin{array}{l} Pmn = (P + P + P + \ldots \text{ (}m\text{ разъ)} \\ \quad + (P + P + P + \ldots\ \text{id)} \\ \quad + (P + P + P + \ldots\ \text{id)} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Число горизонталь-} \\ \text{ныхъ строкъ} = n.\end{array}$$

Эту сумму можно вычислить двоякимъ образомъ:

1) Въ каждыхъ скобкахъ имѣемъ m слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое

Поэтому каждыя скобки даютъ Pm; это количество повторяется слагаемымъ n разъ, сл. сумма $= Pmn$.

Иначе: въ каждомъ вертикальномъ ряду имѣемъ n слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое $= P$; сл. каждый вертикальный рядъ даетъ Pn; а какъ всѣхъ вертикальныхъ рядовъ m, то общая сумма $= Pnm$. Итакъ

$$Pmn = Pnm$$

Основываясь на этомъ выводѣ, докажемъ, что если дано произведеніе изъ нѣсколькихъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то каждое изъ нихъ можно помѣстить на каждомъ мѣстѣ.

Такъ, имѣя произведеніе $abcde$, можемъ, на основаніи предыдущей теоремы, замѣнить его произведеніемъ $abced$. Затѣмъ, разсматривая c и e какъ два послѣдніе множителя произведенія $abce$, замѣняемъ послѣднее равнымъ ему произведеніемъ $abec$, такъ что $abced = abecd$. Разсматривая b и e какъ два послѣдніе множителя произведенія abe, замѣняемъ послѣднее равнымъ ему произведеніемъ aeb, такъ что $abecd = aebcd$. Наконецъ, перемѣняя мѣста множителей произведенія ae, находимъ $aebcd = eabcd$. Такимъ образомъ, послѣдовательно имѣемъ

$$abcde = abced = abecd = aebcd = eabcd,$$

откуда видимъ, что множитель e можетъ быть поставленъ на каждомъ мѣстѣ произведенія, не измѣняя величины его.

Это справедливо относительно каждаго множителя; слѣд. въ произведеніи цѣлыхъ положительныхъ множителей можно каждаго изъ нихъ помѣстить послѣдовательно на каждое мѣсто, не измѣняя этимъ величины произведенія.

II. Пусть множители будутъ положительныя дроби. Означая буквою P произведеніе, предшествующее двумъ послѣднимъ множителямъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{r}{s}$, припоминая правило умноженія дробей и замѣчая, что правило знаковъ доказано и для дробныхъ множителей, находимъ

$$P \times \frac{m}{n} \times \frac{r}{s} = P \times \frac{mr}{ns} = P \times \frac{rm}{sn} = P \times \frac{r}{s} \times \frac{m}{n}$$

Такимъ образомъ и здѣсь произведеніе не измѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ множителей. А отсюда, примѣняя вышеприведенныя разсужденія, находимъ, что

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}\cdot\frac{m}{n} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{h}{i} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}$$
$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i} = \frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}$$

т.-е. въ произведеніи нѣсколькихъ дробныхъ положительныхъ множителей можно послѣдній изъ нихъ помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ произведенія, не измѣняя величины послѣдняго. Правило это справедливо и для всѣхъ дробныхъ положительныхъ множителей.

III. Если множители произведенія будутъ отрицательные, дробные или цѣлые, то произведеніе, по абсолютной величинѣ, равно будетъ произведенію тѣхъ же множителей, но взятыхъ съ положительными знаками. Но, по доказанному, въ произведеніи положительныхъ множителей можно измѣнять порядокъ ихъ какъ угодно, не измѣняя этимъ величины произведенія. Поэтому абсолютная величина нашего произведенія не измѣнится отъ перемѣны мѣстъ множителей. Слѣдовательно, если измѣненіе порядка множителей можетъ оказать какое-нибудь вліяніе на величину произведенія, то это вліяніе можетъ простираться только на его знакъ. Но выше было доказано (§ 28, сл. 2), что знакъ произведенія отрицательныхъ множителей зависитъ только отъ ихъ *числа*, но не отъ порядка, въ которомъ они размѣщены; а какъ число ихъ при производимыхъ перестановкахъ остается то же самое, то и знакъ произведенія всегда будетъ одинъ и тотъ же. Итакъ, измѣняя порядокъ множителей въ произведеніи отрицательныхъ чиселъ, мы этимъ не измѣнимъ ни величины, ни знака произведенія.

Слѣдствія I. Чтобы умножить данное количество на произведеніе нѣсколькихъ другихъ, нужно его послѣдовательно умножить на множителя этого произведенія. Это — такъ-называемый законъ *сочетательный* въ умноженіи.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$m(abc) = (abc)m,$$

по закону перемѣстительности; выраженіе во второй части показываетъ, что a нужно умножить на b, произведеніе на c, и новое произведеніе на m; опустивъ, для сокращенія, скобки, найдемъ

$$m(abc) = abcm,$$

но по закону перемѣст., $abcm = mabc$, сл. окончательно

$$m(abc) = mabc.$$

II. Чтобы умножить произведеніе на нѣкоторое количество, нужно на это количество помножить одного изъ производителей.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{aligned} (abcd)m &= abcdm \text{ (опустивъ скобки)} \\ &= cmabd \text{ (по закону перемѣстительности)} \\ &= (cm)abd \text{ (по смыслу скобокъ)} \\ &= ab(cm)d \text{ (по закону перемѣст.).} \end{aligned}$$

III. Во всякомъ произведеніи можно: нѣсколько множителей замѣнить ихъ вычисленнымъ произведеніемъ и обратно, какой угодно множитель другими, которыхъ произведенію онъ равенъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

1) Всегда возможно разсматриваемые множители перемѣстить такъ, чтобы они стояли рядомъ; составить затѣмъ ихъ произведеніе; и помѣстить послѣднее куда угодно какъ множителя.

2) Всегда возможно множителя, котораго желаемъ разложить, помѣстить на первомъ мѣстѣ; замѣнить его сомножителями, произведенію которыхъ онъ равнялся бы; и наконецъ расположить этихъ множителей, какъ угодно.

30. Правило показателей. — Разсмотримъ умноженіе степеней одного и того же основанія. Пусть, напр., требуется умножить a^5 на a^3. Мы знаемъ, что $a^5 = a.a.a.a.a$ и $a^3 = a.a.a$; слѣдовательно $a^5 a^3 = a.a.a.a.a.a.a.a = a^8$. Отсюда заключаемъ, что произведеніе имѣетъ то же самое основаніе, а показатель его равенъ суммѣ показателей множителей. Пусть вообще нужно помножить a^m на a^n, гдѣ a какое-нибудь количество; а m и n — числа цѣлыя и положительныя.

Замѣчая, что

$$a^m = a.a.a \ldots \text{ гдѣ } a \text{ повторяется множителемъ } m \text{ разъ,}$$
$$\text{и } a^n = a.a.a.a \ldots \text{ гдѣ } a \text{ берется множителемъ } n \text{ разъ,}$$

находимъ, что

$$a^m.a^n = \overbrace{a.a.a \ldots \ldots}^{m \text{ разъ}} \ \overbrace{a.a.a \ldots \ldots}^{n \text{ разъ}} =$$
$$= \underbrace{a.a.a \ldots \ldots \ldots \ldots}_{m+n \text{ разъ}} = a^{m+n}.$$

Итакъ: $a^m.a^n = a^{m+n}$. Слѣд. имѣемъ правило:

Произведеніе двухъ степеней одного и того же основанія есть другая степень того же самаго основанія, которой показатель равенъ суммѣ показателей сомножителей.

31. Умноженіе одночленовъ. — Пусть дано перемножить одночлены

$$6a^5b^2c^3d^4 \text{ и } 5a^2b^6cf^2.$$

Перемѣнивъ порядокъ множителей $6.a^5.b^2.c^3.d^4.5.a^2$ и т. д., отъ чего величина произведенія не измѣнится, даемъ произведенію видъ

$$6.5.a^5.a^2.b^2.b^6.c^3.c.d^4 f^2;$$

примѣняя сюда правило показателей (§ 30), имѣемъ

$$6.5.a^7b^8c^4d^4f^2.$$

Итакъ

$$6a^5b^2c^3d^4 \times 5a^2b^6cf^2 = 30a^7b^8c^4d^4f^2.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило умноженія одночленовъ:

1) *Коэффиціенты слѣдуетъ перемножить.*

2) *Затѣмъ написать одну за другою всѣ различныя буквы, входящія въ оба одночлена, и при каждой поставить показатель, равный суммѣ показателей этой буквы въ сомножителяхъ; если же буква входитъ только въ одинъ изъ сомножителей, ее пишутъ въ произведеніи съ тѣмъ показателемъ, какой она имѣетъ.*

Примѣръ. Умножить: $-7x^my^5z^2(u-v)^8$ на $\frac{3}{4}x^py^4(u-v)^5$.

Замѣчая, что знакъ произведенія долженъ быть (—), и примѣняя найденное правило, получимъ въ произведеніи

$$-\frac{21}{4}x^{m+p}y^9z^2(u-v)^{13}.$$

Умноженіе многочлена на одночленъ.

32. Пусть требуется умножить $a + b - c$ на d, гдѣ подъ буквами a, b и c можно разумѣть какія угодно числа. Что же касается множителя d, то слѣдуетъ различать нѣсколько случаевъ.

1. Пусть d есть цѣлое положительное число, напр., $d = 4$. Припоминая опредѣленіе умноженія и замѣчая, что 4 составлено повтореніемъ положительной

единицы, какъ слагаемаго, четыре раза, заключаемъ, что и множимое надо повторить слагаемымъ столько же разъ. Получимъ

$$(a+b-c).4=(a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c)=$$
$$=4a+4b-4c.$$

Результатъ показываетъ, что для умноженія многочлена на цѣлое положительное число нужно каждый членъ множимаго отдѣльно помножить на это число, соблюдая правило знаковъ.

2. Пусть d равно нѣкоторой положительной дроби, напр. $\frac{3}{4}$. По опредѣленію, умножить $a+b-c$ на $\frac{3}{4}$ значитъ изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ $+1$. Но для составленія $\frac{3}{4}$ изъ $+1$, надо отъ $+1$ взять четверть, вслѣдствіе чего получимъ $+\frac{1}{4}$, а затѣмъ $+\frac{1}{4}$ помножить на 3, что и дастъ дѣйствительно $+\frac{3}{4}$. Итакъ, мы должны: 1) взять четверть отъ $a+b-c$ и 2) полученный результатъ умножить на 3.

Можно доказать, что для раздѣленія многочлена $a+b-c$ на 4 нужно каждый его членъ раздѣлить на 4, удерживая передъ каждымъ изъ отдѣльныхъ частныхъ тотъ знакъ, какой имѣетъ данный членъ, т.-е. что

$$\frac{a+b-c}{4}=\frac{a}{4}+\frac{b}{4}-\frac{c}{4}.$$

Для доказательства помножимъ частное на 4; по извѣстному уже правилу умноженія многочлена на цѣлое положительное число найдемъ:

$$\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}-\frac{c}{4}\right).4=\frac{a}{4}.4+\frac{b}{4}.4-\frac{c}{4}.4.$$

Замѣчая, что $\frac{a}{4}$ или $\frac{1}{4}a$, умноженная на 4, даетъ $\frac{1}{4}a$ или a и т. д., находимъ, что

$$\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}-\frac{c}{4}\right)4=a+b-c.$$

Итакъ, помноживъ частное на дѣлителя, мы нашли въ результатѣ дѣлимое, а потому дѣйствительно

$$\frac{a+b-c}{4}=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c.$$

Это выраженіе надо умножить на 3. По извѣстному уже правилу умноженія на цѣлое положительное число получаемъ

$$\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c\right).3=\frac{1}{4}a.3+\frac{1}{4}b.3-\frac{1}{4}c.3,$$

или, относя 3 множителемъ къ $\frac{1}{4}$, найдемъ окончательно:

$$(a+b-c).\frac{3}{4}=\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}b-\frac{3}{4}c,$$

т.-е. для умноженія многочлена на положительную дробь нужно каждый членъ множимаго умножить отдѣльно на эту дробь, соблюдая правило знаковъ.

3. Пусть d равно нѣкоторому отрицательному цѣлому числу, напр., $d = -3$. По опредѣленію умноженія, нужно съ множимымъ поступать такъ, какъ съ $+1$ при составленіи изъ нея -3, т.-е. перемѣнить у множимаго знакъ, что даетъ $-(a+b-c)$, и затѣмъ повторить это выраженіе слагаемымъ три раза. Итакъ

$$(a+b-c)\,.\,-3 = -(a+b-c)-(a+b-c)-(a+b-c)$$

По раскрытіи скобокъ и по приведеніи, находимъ

$$(a+b-c)\,.\,-3 = -3a-3b+3c.$$

Результатъ этотъ приводитъ къ тому же заключенію, какъ и два первые случая.

4. Пусть наконецъ $d = -\frac{2}{3}$, т.-е. отрицательной дроби. Замѣтивъ, что $-\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times -1$, имѣемъ

$$(a+b-c)\,.\,-\frac{2}{3} = \left[(a+b-c)\,.\,\frac{2}{3}\right] \times -1.$$

Отсюда видно, что нужно $a+b-c$ умножить сперва на положительную дробь $\frac{2}{3}$, а затѣмъ результатъ на отрицательное цѣлое число -1. Производя эти двѣ операціи, для которыхъ правила уже найдены, находимъ послѣдовательно

$$(a+b-c)\,.\,-\frac{2}{3} = \left[(a+b-c)\,.\,\frac{2}{3}\right] \times -1 = \left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}c\right)\,.\,-1 =$$
$$= -\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c.$$

Отсюда тоже заключеніе, что и прежде.

Итакъ, каково бы ни было d, имѣемъ

$$(a+b-c)\,.\,d = ad+bd-cd,$$

откуда *правило: для умноженія многочлена на одночленъ нужно каждый членъ множимаго умножить на множителя, соблюдая правило знаковъ.*

Этимъ правиломъ выражается *законъ распредѣлительный.*

Примѣръ I. $\left(\frac{3}{2}b^2-4c^2+\frac{2}{5}ad^2-3\right)\,.\,-\frac{2}{3}a^2c = -\frac{3}{2}b^2\times\frac{2}{3}a^2c+$
$+4c^2\times\frac{2}{3}a^2c-\frac{2}{5}ad^2\,.\,\frac{2}{3}a^2c+3\,.\,\frac{2}{3}a^2c = -a^2b^2c+\frac{8}{3}a^2c^3-\frac{4}{15}a^3cd^2+$
$+2a^2c.$

Примѣръ II. $\{a^2(x^2+1)^p-3a(x^2+1)^{p-1}-5(x^2+1)^{p-2}\}\times$
$-2a^n(x^2+1)^{p+3} = -2a^{n+2}(x^2+1)^{2p+3}+6a^{n+1}(x^2+1)^{2p+2}+10a^n(x^2+1)^{2p+1}.$

Умноженіе одночлена на многочленъ.

33. Пусть требуется одночленъ умножить на многочленъ: d на $a-b+c$. Замѣчая, что отъ перемѣны мѣстъ производителей произведеніе не измѣняется, имѣемъ:

$$d(a-b+c) = (a-b+c)\,.\,d$$

На основаніи § 32, $(a-b+c).d=ad-bd+cd$; измѣняя въ каждомъ членѣ этого произведенія порядокъ сомножителей, получимъ

$$d(a-b+c)=da-db+dc,$$

откуда правило: *для умноженія одночлена на многочленъ надо одночленъ помножить на каждый членъ многочлена, соблюдая правило знаковъ.*

Такъ,

$$\frac{3}{5}y^{2p-m+1}(70y^{m-p-1}-65y^{2-3m-2p}+5y^{2p+m})=42y^{p}-39y^{-4m+3}+3y^{4p+1}.$$

Умноженіе многочлена на многочленъ.

34. Пусть требуется умножить $a-b+c$ на $p-q+r$. Представивъ себѣ на время, что буквы множителя замѣнены опредѣленными числами, и выполнивъ указанныя въ немъ дѣйствія, мы представимъ множитель нѣкоторымъ числомъ. Обозначивъ это число буквою X, приводимъ вопросъ къ умноженію многочлена на одночленъ, и по извѣстному уже правилу находимъ:

$$(a-b+c).X=aX-bX+cX.$$

Подставляя сюда вмѣсто X данное выраженіе $p-q+r$, имѣемъ:

$$(a-b+c)(p-q+r)=a(p-q+r)-b(p-q+r)+c(p-q+r).$$

Но по правилу § 33 имѣемъ:

$$a(p-q+r)=ap-aq+ar;\ b(p-q+r)=bp-bq+br;\ c(p-q+r)=$$
$$=cp-cq+cr.$$

Слѣдовательно

$$(a-b+c)(p-q+r)=ap-aq+ar-(bp-bq+br)+(cp-cq+cr)=$$
$$=ap-aq+ar-bp+bq-br+cp-cq+cr.$$

Разсматривая составъ произведенія, замѣчаемъ, что первые три члена его представляютъ произведеніе перваго члена множимаго на каждый членъ множителя, слѣдующіе три члена — произведеніе второго члена множимаго на каждый членъ множителя, а три послѣдніе — произведеніе третьяго члена множимаго на множителя. Полное произведеніе состоитъ, слѣдовательно, изъ частныхъ произведеній каждаго члена множимаго на каждый членъ множителя, составленныхъ съ соблюденіемъ правила знаковъ; такъ членъ cr, представляющій произведеніе членовъ, имѣющихъ одинаковые знаки, является въ произведеніи съ знакомъ $+$, а членъ $-cq$ — произведеніе членовъ, имѣющихъ разные знаки, является въ произведеніи со знакомъ —. Итакъ, имѣемъ

Правило. — Для умноженія многочлена на многочленъ нужно каждый членъ множимаго помножить на каждый членъ множителя, соблюдая правило знаковъ, и если окажется возможно, сдѣлать приведеніе.

Существенное въ этомъ правилѣ то, что каждый членъ множимаго слѣдуетъ помножить на каждый членъ множителя съ соблюденіемъ правила знаковъ; порядокъ же частныхъ умноженій члена на членъ остается совершенно произвольнымъ.

Но во избѣжаніе ошибокъ (повтореній или пропусковъ) соблюдаютъ опредѣленный порядокъ, поступая двоякимъ образомъ:

Дѣлаютъ умноженіе въ томъ порядкѣ, на который мы натолкнулись при ѣ правилы, т.-е. умножаютъ сначала первый членъ множимаго на каждый множителя, затѣмъ второй членъ множимаго на каждый членъ множите- и т. д. Или

Умножаютъ каждый членъ множимаго сначала на первый, затѣмъ на вто- и т. д. члены множителя.

ли многочлены содержатъ одну и ту же букву, то для облегченія приве- подобныхъ членовъ удобнѣе расположить оба многочлена или по убываю-ъ, или по возрастающимъ степенямъ этой буквы. Затѣмъ подписываютъ ъ многочленъ подъ другимъ, проводятъ горизонтальную черту, умножаютъ жимое на первый членъ множителя и подписываютъ это частное произведе- подъ чертою.

Умножаютъ множимое на второй членъ множителя, и второе частное произ-е пишутъ подъ первымъ такъ, чтобы подобные члены находились въ одномъ кальномъ столбцѣ.

Составляютъ и располагаютъ такимъ же образомъ и другія частныя произ-нія; наконецъ, дѣлаютъ приведеніе.

Примѣръ I. Умножить

$$8x^4 - 5a^2x^2 - 2a^3x + 3ax^3 + a^4 \text{ на } 2ax^2 + 7a^3 - 6a^2x.$$

Расположивъ оба сомножителя по убывающимъ степенямъ буквы x, и со-ажаясь съ сказаннымъ, производимъ умноженіе такъ:

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\text{жимое:} & 8x^4 & +3ax^3 & -5a^2x^2 & -2a^3x & +a^4 & & \\
\text{житель.} & 2ax^2 & -6a^2x & +7a^3 & & & & \\
\text{-е частн. произв.} & 16ax^6 & +6a^2x^5 & -10a^3x^4 & -4a^4x^3 & +2a^5x^2 & & \\
\text{-е частн. произв.} & & -48a^2x^5 & -18a^3x^4 & +30a^4x^3 & +12a^5x^2 & -6a^6x & \\
\text{3-е частн. произв.} & & & +56a^3x^4 & +21a^4x^3 & -35a^5x^2 & -14a^6x & +7a^7 \\
\text{ное произв.} & 16ax^6 & -42a^2x^5 & +28a^3x^4 & +47a^4x^3 & -21a^5x^2 & -20a^6x & +7a^7
\end{array}$$

Примѣръ II. Умножить $-\frac{3}{4}a^3x + \frac{4}{5}a^4 + \frac{5}{2}a^2x^2 + x^4 - \frac{2}{3}ax^3$ на $x^2 + \frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{2}ax.$

Располагаемъ оба сомножителя по возрастающимъ степенямъ главной буквы и производимъ дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l}
\frac{4}{5}a^4 - \frac{3}{4}a^3x + \frac{5}{2}a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + x^4 \\
\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{2}ax + x^2 \\
\hline
\frac{8}{15}a^6 - \frac{1}{2}a^5x + \frac{5}{3}a^4x^2 - \frac{4}{9}a^3x^3 + \frac{2}{3}a^2x^4 \\
\qquad + \frac{6}{5}a^5x - \frac{9}{8}a^4x^2 + \frac{15}{4}a^3x^3 - a^2x^4 + \frac{3}{2}ax^5 \\
\qquad\qquad + \frac{4}{5}a^4x^2 - \frac{3}{4}a^3x^3 + \frac{5}{2}a^2x^4 - \frac{2}{3}ax^5 + x^6 \\
\hline
\frac{8}{15}a^6 + \frac{7}{10}a^5x + \frac{161}{120}a^4x^2 + \frac{23}{9}a^3x^3 + \frac{13}{6}a^2x^4 + \frac{5}{6}ax^5 + x^6.
\end{array}$$

Примѣръ III. Умножить $8x^5 - 3a^3x^2 - 5a^4x + a^5$ на $7x^2 - 8ax + a^2$.

Располагая дѣйствіе такимъ же образомъ какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ, оставляя пустое мѣсто тамъ, гдѣ во множимомъ должны бы были находиться члены, содержащіе x^4 и x^3, имѣемъ:

$$\begin{array}{llllllll}
8x^5 & & & & -3a^3x^2 & -5a^4x & +a^5 & \\
7x^2 & -8ax & +a^2 & & & & & \\
\hline
56x^7 & & & -21a^3x^4 & -35a^4x^3 & +7a^5x^2 & & \\
 & -64ax^6 & & & +24a^4x^3 & +40a^5x^2 & -8a^6x & \\
 & & +8a^2x^5 & & & -3a^5x^2 & -5a^6x & +a^7 \\
\hline
56x^7 & -64ax^6 & +8a^2x^5 & -21a^3x^4 & -11a^4x^3 & +44a^5x^2 & -13a^6x & +a^7.
\end{array}$$

Свойства произведенія двухъ полиномовъ.

35. I. Число членовъ произведенія. — Умножая множимое на первый членъ множителя, получаемъ первое частное произведеніе, имѣющее столько членовъ, сколько ихъ и во множимомъ. Произведеніе множимаго на второй членъ множителя содержитъ опять столько членовъ, сколько ихъ во множимомъ, и т. д. Поэтому, если частныя произведенія не содержатъ подобныхъ членовъ, то *число членовъ произведенія равно будетъ произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя*. Напр., если множимое имѣетъ 7 членовъ, а множитель 5, то въ произведеніи будетъ 7 × 5 или 35 членовъ.

Но произведеніе двухъ многочленовъ можетъ содержать члены подобные: вслѣдствіе соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ, число членовъ произведенія можетъ уменьшиться, но никогда не можетъ сдѣлаться меньше двухъ. Въ самомъ дѣлѣ, легко доказать, что въ произведеніи двухъ полиномовъ, содержащихъ одну и ту же букву x, всегда есть по крайней мѣрѣ два члена, которые не имѣютъ себѣ подобныхъ между другими членами произведенія, и потому *неприводимы*. Для доказательства замѣтимъ, что всякій членъ произведенія происходитъ отъ умноженія какого-либо члена множимаго на одинъ изъ членовъ множителя, и показатель главной буквы въ немъ равенъ суммѣ показателей той же буквы въ членахъ множимаго и множителя, отъ которыхъ онъ произошелъ. Слѣдовательно, помноживъ высшій относительно главной буквы членъ множимаго на высшій членъ множителя, мы получимъ членъ произведенія, въ которомъ показатель главной буквы будетъ равенъ суммѣ *наибольшихъ* показателей той же буквы, какіе имѣются въ сомножителяхъ; очевидно, что такой членъ произведенія будетъ имѣть главную букву съ показателемъ большимъ ея показателей въ другихъ членахъ произведенія; поэтому означенный членъ не можетъ имѣть себѣ подобныхъ между остальными членами произведенія и слѣд. есть *членъ неприводимый*. Помножая низшій относительно главной буквы членъ множимаго на низшій членъ множителя, получимъ членъ произведенія, въ которомъ главная буква будетъ имѣть показатель, равный суммѣ наименьшихъ показателей той же буквы въ сомножителяхъ, слѣд. показатель главной буквы этого члена будетъ меньше чѣмъ въ другихъ членахъ произведенія, а потому это будетъ также *членъ неприводимый*. Заключаемъ, что произведеніе двухъ многочленовъ содержитъ, по меньшей мѣрѣ, два неприводимыхъ члена — высшій и низшій относительно главной буквы. Итакъ:

наибольшее число членовъ произведенія равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя, наименьшее же — два члена.

Примѣчаніе. Когда множимое и множитель расположены по нисходящимъ или восходящимъ степенямъ главной буквы, то неприводимые члены (высшій и низшій) занимаютъ крайнія мѣста произведенія.

Нижеслѣдующій примѣръ представляетъ одинъ изъ случаевъ, когда произведеніе имѣетъ только два члена,

$$\begin{array}{l}
x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
x - 1 \\
\hline
x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\
\quad - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad - 1
\end{array}$$

II. Свойство произведенія однородныхъ многочленовъ. — Произведеніе двухъ однородныхъ многочленовъ есть многочленъ однородный, а измѣреніе его равно суммѣ измѣреній множителей. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе двухъ какихъ-нибудь членовъ множимаго и множителя имѣетъ измѣреніе равное суммѣ показателей перемножаемыхъ членовъ; но оба многочлена однородны, слѣд. эта сумма во всѣхъ членахъ произведенія будетъ одинакова, т.-е. произведеніе само будетъ однородно, а его измѣреніе равно суммѣ измѣреній сомножителей.

Такъ, многочленъ $a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4$ есть однородный многочленъ четырехъ измѣреній; $a - x$ есть однородный двучленъ одного измѣренія; произведеніе же ихъ $a^5 - x^5$ однородное выраженіе пяти измѣреній.

Замѣчательные случаи умноженія.

36. Разсмотримъ нѣкоторые часто встрѣчающіеся особенные случаи умноженія.

I. Пусть требуется сумму $a + b$ возвысить въ квадратъ. Для этого надо $a + b$ помножить само на себя:

$$\begin{array}{l}
a + b \\
a + b \\
a^2 + ab \\
\quad + ab + b^2 \\
a^2 + 2ab + b^2.
\end{array}$$

Итакъ: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, т.-е.

квадратъ суммы двухъ количествъ равенъ: квадрату перваго члена, + удвоенное произведеніе перваго члена на второй, + квадратъ второго.

Наприм., $(5x^2 + 2y)^2 = (5x^2)^2 + 2 \,.\, 5x^2 \,.\, 2y + (2y)^2 = 25x^4 + 20x^2y + 4y^2$.

II. Возвысимъ въ квадратъ разность $a - b$:

$$\begin{array}{l}
a - b \\
a - b \\
a^2 - ab \\
\quad - ab + b^2 \\
\hline
a^2 - 2ab + b^2.
\end{array}$$

Слѣдовательно: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, т.-е.

квадратъ разности двухъ количествъ равенъ квадрату перваго члена, — удвоенное произведеніе перваго на второй, + квадратъ второго.

Напр. $(0,3ax - x^2)^2 = (0,3ax)^2 - 2 \cdot 0,3ax \cdot x^2 + (x^2)^2 = 0,09a^2x^2 - 0,6ax^3 + x^4$.

III. Умножить сумму двухъ количествъ a и b на ихъ разность:

$$\begin{array}{lll} a + b & & \\ a - b & & \\ \hline a^2 + ab & & \\ - ab - b^2 & & \\ \hline a^2 - b^2. & & \end{array}$$

Итакъ: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, т.-е.

произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность равно разности ихъ квадратовъ.

Напр. $(4x^2y - \frac{2}{3}xy^2)(4x^2y + \frac{2}{3}xy^2) = (4x^2y)^2 - (\frac{2}{3}xy^2)^2 = 16x^4y^2 - \frac{4}{9}x^2y^4$.

IV. Найдемъ кубъ суммы $a + b$. Замѣчая, что $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$, и что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, мы найдемъ искомый результатъ, умноживъ $a^2 + 2ab + b^2$ на $a + b$:

$$\begin{array}{llll} a^2 & + 2ab & + b^2 & \\ a & + b & & \\ \hline a^3 & + 2a^2b & + ab^2 & \\ & + a^2b & + 2ab^2 & + b^3 \\ \hline a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3. \end{array}$$

Слѣдовательно: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, т.-е.

кубъ суммы двухъ количествъ равенъ: кубу перваго члена, + утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, + утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, + кубъ второго.

Напр. $(2a^2 + 4b^2)^3 = (2a^2)^3 + 3 \cdot (2a^2)^2 \cdot 4b^2 + 3 \cdot (2a^2)(4b^2)^2 + (4b^2)^3 =$
$$= 8a^6 + 48a^4b^2 + 96a^2b^4 + 64b^6.$$

V. Такимъ же образомъ найдемъ $(a - b)^3$, умноживъ $(a - b)^2$ или $a^2 - 2ab + b^2$ на $a - b$:

$$\begin{array}{llll} a^2 & - 2ab & + b^2 & \\ a & - b & & \\ \hline a^3 & - 2a^2b & + ab^2 & \\ & - a^2b & + 2ab^2 & - b^3 \\ \hline a^3 & - 3a^2b & + 3ab^2 & - b^3. \end{array}$$

Слѣдовательно: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, т.-е.

кубъ разности двухъ членовъ равенъ кубу перваго члена, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, + утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, минусъ кубъ второго члена.

Напр. $\left(\frac{1}{2} - 3x^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x^2)^2 - (3x^2)^3 = \frac{1}{8}$
$$- \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x^4 - 27x^6.$$

37. Формула № II можетъ быть выведена изъ формулы № I, если въ послѣдней положить $b = -b'$; находимъ

$$[a+(-b')]^2 = a^2 + 2a(-b') + (-b')^2.$$

Замѣтивъ, что $a+(-b') = a-b'$; затѣмъ, что $+2a(-b') = -2ab'$, и что $(-b')^2 = +b'^2$, имѣемъ

$$(a-b')^2 = a^2 - 2ab' + b'^2.$$

Такимъ же образомъ, подставляя въ формулу № IV вмѣсто b количество $-b'$, получаемъ

$$[a+(-b')]^3 = a^3 + 3a^2(-b') + 3a(-b')^2 + (-b')^3.$$

Замѣчая, что $a+(-b') = a-b'$, что $+3a^2(-b') = -3a^2b'$, что $3a(-b')^2 = +3ab'^2$ и что $(-b')^3 = -b'^3$, имѣемъ

$$(a-b')^3 = a^3 - 3a^2b' + 3ab'^2 - b'^3.$$

Приложенія.

38. Приложимъ формулы § 36 къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

Примѣръ I. Возвысить 79 въ квадратъ.

По формулѣ № I имѣемъ:

$$79^2 = (70+9)^2 = 4900 + 1260 + 81 = 6241.$$

Примѣръ II. Возвысить 97 въ квадратъ.

По формулѣ № II имѣемъ:

$$97^2 = (100-3)^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409.$$

Примѣръ III. Помножить 103 на 97.

По формулѣ № III находимъ:

$$103 \times 97 = (100+3)(100-3) = 10000 - 9 = 9991.$$

Примѣръ IV. Преобразовать:

$$(3a^2 - 2ab + 8b^2)(3a^2 + 2ab - 3b^2).$$

Первый множитель можно представить въ видѣ $3a^2 - (2ab - 3b^2)$; второй — въ видѣ $3a^2 + (2ab - 3b^2)$; примѣняя формулу № III, получимъ:

$$(3a^2)^2 - (2ab - 3b^2)^2,$$

или, выполняя дѣйствія:

$$9a^4 - 4a^2b^2 + 12ab^3 - 9b^4.$$

Примѣръ V. Умножить $x+y+z-t$ на $x+y-z+t$.

Представивъ данныя выраженія въ видѣ

$$(x+y)+(z-t) \text{ и } (x+y)-(z-t)$$

и примѣняя формулу № III, находимъ

$$(x+y)^2 - (z-t)^2.$$

Притягая сюда теоремы №№ I и II, получимъ

$$(x^2+2xy+y^2)-(z^2-2zt+t^2),$$

или, раскрывъ скобки:

$$x^2+2xy+y^2-z^2+2zt-t^2.$$

Примѣръ VI. Составить произведеніе

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Первые два множителя можно представить въ видѣ

$$(a+b)+c \text{ и } (a+b)-c;$$

ихъ произведеніе =

$$(a+b)^2-c^2 \text{ или } a^2+2ab+b^2-c^2 \ldots (1).$$

Третій и четвертый множители пишемъ въ видѣ

$$c+(a-b) \text{ и } c-(a-b);$$

ихъ произведеніе равно

$$c^2-(a-b)^2 \text{ или } c^2-a^2+2ab-b^2 \ldots (2).$$

Представивъ (1) и (2) въ формѣ

$$2ab+(a^2+b^2-c^2) \text{ и } 2ab-(a^2+b^2-c^2)$$

и перемноживъ эти выраженія, имѣемъ:

$$(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2 \text{ или } 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$$

Чтобы триномъ $a^2+b^2-c^2$ возвысить въ квадратъ, разсматриваемъ на-время a^2+b^2 какъ одинъ членъ; положивъ, что $a^2+b^2=s$, имѣемъ:

$$(a^2+b^2-c^2)^2=(s-c^2)^2=s^2-2sc^2+c^4.$$

Подставляя вмѣсто s его величину a^2+b^2, получимъ

$$s^2-2s\,.\,c^2+c^4=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4=a^4+2a^2b^2+b^4-$$
$$-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4.$$

Итакъ, искомое произведеніе равно

$$4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4, \text{ или } 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-$$
$$-a^4-b^4-c^4.$$

Примѣръ VII. Возвысить въ квадратъ многочленъ $1+x-x^2+x^3$.

Въ предыдущемъ примѣрѣ намъ пришлось возвышать въ квадратъ триномъ $a^2+b^2-c^2$; для этого мы обозначили двучленъ a^2+b^2 одною буквою s, и черезъ это получили возможность примѣнить къ данному случаю формулу квадрата бинома. Вообще указанный пріемъ можно съ удобствомъ примѣнять при возвышеніи многочленовъ въ квадратъ и кубъ. Такъ, въ данномъ выраженіи положимъ на время $1+x-x^2=s$; данный многочленъ приметъ видъ $s+x^3$; возвышая въ квадратъ, получимъ

$$(s+x^3)^2=s^2+2s\,.\,x^3+x^6=(1+x-x^2)^2+2(1+x-x^2)x^3+x^6.$$

Полагая въ членѣ $(1+x-x^2)^2$ на время $1+x=t$, найдемъ:

$(1+x-x^2)^2=(t-x^2)^2=t^2-2tx^2+x^4=(1+x)^2-2(1+x)x^2+x^4=1+2x+x^2-2x^2-2x^3+x^4$. Слѣд., данное выраженіе равно $1+2x+x^2-2x^2-2x^3+x^4+2x^3+2x^4-2x^5+x^6$, или $1+2x-x^2+3x^4-2x^5+x^6$.

ГЛАВА V.

Дѣленіе.

Опредѣленіе.—Правило знаковъ.—Правило показателей; значеніе символовъ a^{-q} и a^0.—Дѣленіе одночленовъ; признаки невозможнаго дѣленія ихъ.—Дѣленіе многочлена на одночленъ.—Дѣленіе многочлена на многочленъ.—Признаки невозможнаго дѣленія многочленовъ.—Дѣленіе полинома послѣдовательно на нѣсколько данныхъ полиномовъ.—Замѣчательные случаи дѣленія (теорема Безу).

39. Опредѣленіе. — Раздѣлить одно количество на другое значитъ найти такое третье количество, которое, будучи умножено на второе, дало бы въ произведеніи первое. — Первое данное количество называется *дѣлимымъ*, второе — *дѣлителемъ*, а искомое количество — *частнымъ*.

Если дѣлимое есть A, дѣлитель B, а частное Q, то, по опредѣленію дѣленія, связь между этими тремя количествами выразится равенствомъ:

$$Q \times B = A.$$

40. Правило знаковъ. — Основываясь на опредѣленіи дѣленія и на правилѣ знаковъ при умноженіи, легко найти правило знаковъ при дѣленіи.

Пусть требуется $(+a)$ раздѣлить на $(+b)$. По опредѣленію дѣленія, частное, умноженное на дѣлителя, должно давать дѣлимое; но только количество, предшествуемое знакомъ $+$, при умноженіи на $(+b)$ можетъ дать $(+a)$. Слѣдов.

$$(+a):(+b)=+q.$$

При дѣленіи $(-a)$ на $(+b)$, въ частномъ должно быть $(-q)$, потому что только количество, предшествуемое знакомъ $-$, при умноженіи на $(+b)$ можетъ дать $(-a)$. Итакъ

$$(-a):(+b)=-q.$$

Дѣля $(+a):(-b)$, мы ищемъ количество, которое, будучи умножено на $(-b)$, давало бы $(+a)$; но такъ только количество со знакомъ $-$, при умноженіи на $(-b)$, можетъ дать $(+a)$, то

$$(+a):(-b)=-q.$$

Наконецъ, припоминая, что при умноженіи $(-)$ на $(+)$ даетъ $(-)$, находимъ:

$$(-a):(-b)=+q.$$

Итакъ:

$$(+a):(+b)=+q.$$
$$(-a):(+b)=-q.$$
$$(+a):(-b)=-q.$$
$$(-a):(-b)=+q.$$

Отсюда вытекаетъ *правило: при дѣленіи количествъ съ одинаковыми знаками, въ частномъ получается* (+), *при дѣленіи же количествъ съ разными знаками* (—).

Правило это — совершенно общее: оно относится и къ тому случаю, когда знаки предшествуютъ абсолютнымъ значеніямъ количествъ, и къ тому — когда a и b сами суть количества положительныя или отрицательныя. Въ самомъ дѣлѣ, выводъ правила основанъ на правилѣ знаковъ при умноженіи, а это послѣднее правило доказано для какихъ угодно количествъ.

41. Правило показателей. — Разсмотримъ дѣленіе степеней одного и того же основанія: пусть требуется раздѣлить a^m на a^n, гдѣ a — какое угодно количество, а m и n — числа цѣлыя и положительныя. Замѣтивъ, что въ частномъ должна получиться нѣкоторая степень буквы a, назовемъ неизвѣстнаго показателя этой степени буквою x, такъ что частное выразится формулою a^x:

$$a^m : a^n = a^x \ldots (1).$$

По опредѣленію дѣленія, частное, умноженное на дѣлителя, должно давать дѣлимое, слѣд.

$$a^x \cdot a^n = a^m;$$

но, по правилу показателей при умноженіи, $a^x \cdot a^n = a^{x+n}$, слѣд. имѣемъ равенство:

$$a^{x+n} = a^m.$$

Но степени одного и того же основанія тогда будутъ равны, когда показатели ихъ равны, а потому должно быть

$$x + n = m.$$

Чтобы по извѣстной суммѣ (m) и извѣстному слагаемому (n) найти другое слагаемое (x), нужно изъ суммы вычесть извѣстное слагаемое. Итакъ

$$x = m - n$$

Подставляя въ равенство (1) вмѣсто x найденную величину, имѣемъ:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ldots (2).$$

Отсюда *правило: при дѣленіи степеней одного и того же основанія нужно: основаніе въ частномъ написать то же самое, а изъ показателя дѣлимаго вычесть показатель дѣлителя.*

Изслѣдованіе. — Формула (2) даетъ мѣсто слѣдующимъ случаямъ:

$$1)\ m > n;\ 2)\ m = n;\ 3)\ m < n.$$

1-й случай. — Если $m > n$, то разность $m - n$ дастъ *положительное* (цѣлое) *число*, и частное a^{m-n} подходитъ подъ вышеданное опредѣленіе степени какъ произведенія равныхъ количеству a множителей. Такъ, если $m = 8$, а $n = 5$, то $a^m : a^n = a^{8-3} = a^3$, т.-е. $a.a.a..$ и т. д. Этотъ случай не представляетъ, слѣдовательно, ничего особеннаго.

2-й случай. Если $m = n$, то разность $m - n$ равна нулю, и частное принимаетъ видъ a^0. Выраженіе a^0 само по себѣ не имѣетъ никакого смысла, т.-е. его нельзя разсматривать въ смыслѣ степени, ибо показатель долженъ означать, сколько разъ основаніе берется множителемъ. Значеніе символа a^0 откроется, если мы обратимъ вниманіе на его происхожденіе. При $m = n$ дѣлимое a^m и дѣлитель a^n дѣлаются равными, а частное отъ раздѣленія количества самого на себя есть 1; поэтому

$$a^0 = 1,$$

а такъ какъ a означаетъ какое угодно количество, то заключаемъ, что *всякое количество въ нулевой степени даетъ единицу.*

Такимъ образомъ: $7^0 = 1$; $x^0 = 1$; $(a^2 - b^2)^0 = 1$ и т. п.

Здѣсь самъ собою возникаетъ вопросъ: если мы знаемъ, что $a^m : a^m$ есть ни что иное какъ 1, то для чего замѣняютъ 1 особымъ символомъ a^0, имѣющимъ только видъ степени, но не имѣющимъ смысла какъ степень? Это дѣлается для того, во-первыхъ, чтобы въ правилѣ показателей не дѣлать исключенія для случая $m = n$, другими словами, — въ видахъ *обобщенія* этого правила; и, во-вторыхъ, чтобы имѣть возможность сохранить въ частномъ букву a, которая иначе не вошла бы въ частное, ибо была бы замѣнена единицею.

3-й случай. — Если $m < n$, то разность $m - n$ отрицательна; напр: если n превышаетъ m на q единицъ, то $m - n = -q$, и частное имѣетъ видъ a^{-q}. Выраженіе a^{-q} опять не имѣетъ значенія степени, ибо a нельзя взять множителемъ отрицательное число разъ. Чтобы выяснить значеніе символа a^{-q}, постараемся частное въ случаѣ $m < n$ выразить въ иной формѣ.

Полагая, что n больше m на q единицъ, т.-е. $n = m + q$, можемъ частное $a^m : a^n$ представить въ видѣ $a^m : a^{m+q}$. Обозначивъ его буквою x, имѣемъ

$$a^m : a^{m+q} = x.$$

По опредѣленію дѣленія, имѣемъ отсюда

$$xa^{m+q} = a^m.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на a^m, находимъ:

$$\frac{xa^{m+q}}{a^m} = \frac{a^m}{a^m}.$$

Замѣтивъ, что частное $\frac{xa^{m+q}}{a^m}$ равно xa^q (ибо, умноживъ его на дѣлителя a^m, находимъ въ результатѣ дѣлимое xa^{m+q}), и что $\frac{a^m}{a^m} = 1$, получаемъ равенство

$$x \,.\, a^q = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{a^q}.$$

Но то же самое частное было представлено въ формѣ a^{-q}; поэтому

$$x^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

Такъ какъ a означаетъ какое угодно количество, то заключаемъ, что *всякое количество съ отрицательнымъ показателемъ равно единицѣ, дѣленной на то же количество съ положительнымъ показателемъ.*

Такимъ образомъ:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \qquad (a^2 - b^2)^{-5} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^5} \text{ и т. п.}$$

Отрицательные показатели введены для того, чтобы: во-первыхъ, въ правилѣ показателей не дѣлать исключенія для того случая, когда показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя, т.-е. въ видахъ *обобщенія* этого правила; и, во-вторыхъ, чтобы имѣть возможность дробь (какъ $\frac{1}{a^2}$) изображать безъ знаменателя, т.-е. въ формѣ цѣлаго алгебраическаго выраженія.

Итакъ, вводя показатели — нуль и отрицательные, мы можемъ всѣ случаи дѣленія степеней одного и того же основанія совершать по одному общему правилу: основаніе писать въ частномъ *безъ перемѣны*, а надъ нимъ показателя, равнаго разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.

Дѣленіе одночленовъ.

42. Пусть требуется раздѣлить $63a^9b^5c^5d^2$ на $-9a^4b^2c$. Знакъ частнаго долженъ быть (—), потому что дѣлимое и дѣлитель имѣютъ разные знаки. По опредѣленію дѣленія, въ частномъ должно быть такое количество, которое, будучи умножено на дѣлителя, даетъ дѣлимое; слѣд., коэффиціентъ частнаго есть такое число, которое, будучи умножено на 9, давало бы 63; такое число мы найдемъ, раздѣливъ 63 на 9; получимъ 7. Далѣе, чтобы въ произведеніи имѣть a^9, надо a^4 умножить на a^5; слѣд., буква a войдетъ въ частное съ показателемъ, равнымъ разности показателей этой буквы въ дѣлимомъ и дѣлителѣ. Такимъ же образомъ найдемъ, что буква b войдетъ въ частное — съ показателемъ 3, а буква c — съ показателемъ 4. Наконецъ, чтобы въ произведеніе вошло d^2, необходимо, — такъ какъ буквы d нѣтъ въ дѣлителѣ, — чтобы она вошла въ частное съ тѣмъ показателемъ, какой она имѣетъ въ дѣлимомъ. Итакъ

$$63a^9b^5c^5d^2 : -9a^4b^2c = -7a^5b^3c^4d^2$$

Отсюда имѣемъ

Правило. — *Чтобы найти частное отъ раздѣленія одного одночлена на другой, нужно: 1) коэффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффиціентъ дѣлителя, 2) а затѣмъ написать всѣхъ множителей дѣлимаго — каждаго съ показателемъ, равнымъ разности его показателей въ* ***дѣлимомъ и дѣлителѣ.***

Въ частномъ случаѣ, если какой-либо множитель находится только въ дѣлимомъ, онъ входитъ въ частное безъ измѣненія показателя; если же какой-либо множитель имѣетъ въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ одинаковаго показателя, то въ частное войдетъ съ нулевымъ показателемъ. ***Напримѣръ***

$$4a^2b^3c^5 : 2ab^3c = 2ab^0c^4.$$

Но, такъ какъ $b^0 = 1$, то можно частное представить въ видѣ $2ac^4$.

Примѣняя это правило, найдемъ, что:

$$1)\ 92a^3b^5x^2y^6 : 23a^2b^4x^2y^2 = 4aby^4.$$

$$2)\ 35a^3b^2(x+y)^4(x-2y)^3 : -7a^2(x+y)^3(x-2y) = -5ab^2(x+y)(x-2y)^2.$$

$$3)\ -24a^3b^4(a^2-b^2)(x+3y)^5 : -8b^4(x+3y)^2 = 3a^3(a^2-b^2)(x+3y)^3.$$

43. Признаки невозможнаго дѣленія одночленовъ. — Дѣленіе цѣлыхъ одночленовъ называется возможнымъ, если частное можетъ быть выражено *цѣлою* формулою, т.-е. не содержащею буквенныхъ дѣлителей; въ противномъ случаѣ,

— когда частное получается въ формѣ алгебраической дроби, дѣленіе считается *невозможнымъ*.

Изъ самаго опредѣленія невозможнаго въ алгебраическомъ смыслѣ дѣленія слѣдуетъ, что если не дѣлятся другъ на друга только численные коэффиціенты, то дѣленіе слѣдуетъ считать алгебраически возможнымъ. Напр. дѣля $4a^3b^2c$ на $3a^2b$, получимъ въ частномъ $\frac{4}{3}abc$ — выраженіе алгебраически цѣлое, такъ какъ оно не содержитъ буквенныхъ дѣлителей.

Дѣленіе одночленовъ невозможно въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

1) Когда показатель хотя одной буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлимомъ. Такъ дѣленіе $6a^3b^2$ на $2ab^4$ невозможно, потому что на какой бы *цѣлый* одночленъ ни умножили дѣлителя, всегда въ произведеніе буква b войдетъ съ показателемъ, большимъ 2: частное не можетъ быть, поэтому, выражено цѣлымъ одночленомъ.

Въ такомъ случаѣ дѣленіе только обозначается, и получается дробь

$$\frac{6a^3b^2}{2ab^4};$$

послѣдняя, какъ будетъ показано далѣе, можетъ быть упрощена сокращеніемъ.

2) Когда дѣлитель содержитъ такую букву, которой нѣтъ въ дѣлимомъ; напр. $4a^3b$ не дѣлится на $3a^2bd^2$. Въ самомъ дѣлѣ, на какой бы цѣлый одночленъ мы ни умножили дѣлителя, въ произведеніе непремѣнно войдетъ буква d, которой нѣтъ въ дѣлимомъ, а слѣд. частное не можетъ быть представлено цѣлымъ одночленомъ.

Обозначая дѣленіе, получимъ дробь

$$\frac{4a^3b}{3a^2bd^2}$$

которая также подлежитъ сокращенію.

Дѣленіе многочлена на одночленъ.

44. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a-b+c-d$ на одночленъ m. Частное не можетъ быть одночленомъ, потому что умноживъ одночленъ на одночленъ (m), въ произведеніи найдемъ одночленъ, между тѣмъ какъ должны получить многочленъ $a-b+c-d$. Итакъ, частное должно быть — многочленъ, для нахожденія котораго имѣемъ слѣдующее

Правило. — Чтобы найти частное отъ раздѣленія многочлена на одночленъ, нужно каждый членъ дѣлимаго раздѣлить на дѣлителя, соблюдая правило знаковъ.

Это правило доказывается a posteriori. Мы говоримъ, что

$$\frac{a-b+c-d}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}.$$

Для доказательства умножаемъ частное на дѣлителя: по правилу умноженія многочлена на одночленъ находимъ:

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}\right)\cdot m=\frac{a}{m}\cdot m-\frac{b}{m}\cdot m+\frac{c}{m}\cdot m-\frac{d}{m}\cdot m.$$

Но частное $\frac{a}{m}$, умноженное на дѣлителя m, даетъ дѣлимое, слѣд. $\frac{a}{m} \cdot m = a$; точно такъ же: $\frac{b}{m} \cdot m = b$; $\frac{c}{m} \cdot m = c$; и $\frac{d}{m} \cdot m = d$. Такимъ образомъ

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}\right) \cdot m = a - b + c - d.$$

т.-е. частное, умноженное на дѣлителя, воспроизвело дѣлимое, слѣд. это частное составлено вѣрно, и правило доказано.

Примѣры:

1) $(8a^4b^2 - 3a^3b^3 + 12a^2b^4) : 4a^2b^2 = 2a^2 - \frac{3}{4}ab + 3b^2.$

2) $\{28a^2b^3(x-y)^3 + 12a^2b^2(x^2-y^2)(x-y) - 5ab^2(x+y)(x^2-y^2)^2\} :$
$4ab^2(x-y) = 7ab(x-y)^2 + 3a^2(x-y)^2 - 2(x+y)^3(x-y).$

Дѣленіе многочлена на многочленъ.

45. Частное отъ раздѣленія нѣкотораго многочлена A на многочленъ B есть выраженіе алгебраически дробное, вида

$$\frac{A}{B}.$$

Въ большинствѣ случаевъ такое выраженіе нельзя замѣнить другимъ — простѣйшимъ. Но когда цѣлые многочлены A и B содержатъ одну и ту же букву, то возможенъ такой третій многочленъ C, *цѣлый* относительно той же буквы, который, будучи умноженъ на дѣлители, дастъ дѣлимое. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что дѣленіе полинома A на B *возможно*.

Укажемъ, какъ въ этомъ исключительномъ случаѣ находятъ частное.

Допуская, что многочленъ

$$8x^5 + 10x^4 - 31x^3 + 22x^2 - 29x + 12$$

дѣлится на многочленъ

$$4x^3 - 5x^2 + 3x - 4,$$

постараемся опредѣлить члены частнаго.

Написавъ дѣлитель справа отъ дѣлимаго, отдѣляютъ ихъ вертикальною чертою; затѣмъ, дѣлителя отдѣляютъ горизонтальною чертою отъ частнаго, котораго члены, по мѣрѣ ихъ нахожденія, и пишутъ подъ этою чертою.

$$\begin{array}{l}
\text{Дѣлимое} \ldots 8x^5 + 10x^4 - 31x^3 + 22x^2 - 29x + 12 \quad 4x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \ldots \text{дѣлитель} \\
\qquad -8x^5 \pm 10x^4 \mp 6x^3 \pm 8x^2 \qquad\qquad 2x^2 + 5x - 3 \ldots \qquad \text{частное} \\
\text{1-й остатокъ} \ldots 20x^4 - 37x^3 + 30x^2 - 29x + 12 \\
\qquad\qquad -20x^4 \pm 25x^3 \mp 15x^2 \pm 20x \\
\text{2-й остатокъ} \ldots\ldots -12x^3 + 15x^2 - 9x + 12 \\
\qquad\qquad\qquad \pm 12x^3 \mp 15x^2 \pm 9x \mp 12 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

По опредѣленію, дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное.

Но по свойству произведенія двухъ многочленовъ (§ 35), высшій членъ про-

произведенія происходитъ, *безъ приведенія*, отъ умноженія высшихъ членовъ сомножителей, т.-е. въ нашемъ случаѣ отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на высшій членъ частнаго. Поэтому, назвавъ высшій членъ частнаго буквою q, имѣемъ: $8x^5 = 4x^3 \times q$, откуда, замѣчая, что неизвѣстный сомножитель (q) опредѣляется дѣленіемъ произведенія ($8x^5$) на извѣстнаго сомножителя ($4x^3$), находимъ:

$$q = 8x^5 : 4x^3 = 2x^2.$$

Итакъ, чтобы найти высшій членъ частнаго, нужно высшій членъ дѣлимаго **раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.**

Для нахожденія слѣдующаго члена частнаго руководствуемся такими соображеніями. Дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго; а потому если изъ дѣлимаго вычесть произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, то остатокъ будетъ представлять произведеніе дѣлителя на сумму остальныхъ членовъ частнаго. Умноживъ дѣлителя на высшій членъ частнаго и вычтя произведеніе $8x^5 - 10x^4 + 6x^3 - 8x^2$ изъ дѣлимаго, находимъ остатокъ, равный $20x^4 - 37x^3 + 30x^2 - 29x + 12$. Такъ какъ этотъ остатокъ есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная со втораго, то его высшій членъ ($20x^4$) произошелъ безъ приведенія отъ умноженія высшаго члена дѣлителя ($4x^3$) на высшій изъ ненайденныхъ членовъ частнаго. Называя послѣдній буквою q', имѣемъ такимъ образомъ: $20x^4 = 4x^3 \,.\, q'$, откуда

$$q' = 20x^4 : 4x^3 = + 5x.$$

Итакъ, для нахожденія второго члена частнаго нужно высшій членъ перваго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Замѣчая, что первый остатокъ есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная со втораго, заключаемъ, что если вычтемъ изъ этого остатка произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго, то новый (второй) остатокъ будетъ представлять произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная съ третьяго. Умноживъ въ самомъ дѣлѣ дѣлителя на второй членъ частнаго и вычтя произведеніе изъ перваго остатка, находимъ второй остатокъ: $-12x^3 + 15x^2 - 9x + 12$. По свойству произведенія, высшій членъ этого остатка произошелъ безъ приведенія отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на высшій изъ ненайденныхъ членовъ частнаго. Слѣдоват., если назовемъ послѣдній буквою q'', то найдемъ равенство: $-12x^3 = 4x^3 \,.\, q''$, откуда $q'' = -12x^3 : 4x^3 = -3$. Отсюда заключаемъ, что для нахожденія третьяго члена частнаго надо высшій членъ второго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Такими же разсужденіями какъ и прежде убѣдимся, что для нахожденія четвертаго члена частнаго, въ предположеніи что онъ существуетъ, надо дѣлителя умножить на третій членъ частнаго и произведеніе вычесть изъ второго остатка. Сдѣлавъ это, находимъ въ новомъ остаткѣ 0. Это значитъ, что дѣленіе окончено, и послѣдній членъ частнаго равенъ -3. Все же частное равно $2x^2 + 5x - 3$.

Что частное найдено вѣрно, въ этомъ убѣждаемся, помноживъ дѣлителя на частное: въ произведеніи получается дѣлимое.

Припоминая ходъ дѣйствія, заключаемъ, что для отысканія послѣдовательныхъ членовъ частнаго намъ приходилось дѣлить высшіе члены дѣлимаго и каждаго остатка на высшій членъ дѣлителя. Чтобы имѣть эти высшіе члены всегда на первомъ мѣстѣ, а также для удобства приведенія, до начала дѣйствія располагаютъ дѣлимое и дѣлителя по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Соображая все сказанное, приходимъ къ слѣдующему правилу дѣленія многочлена на многочленъ:

Правило. Когда частное отъ раздѣленія двухъ цѣлыхъ полиномовъ можно представить въ формѣ цѣлаго полинома, члены частнаго находимъ слѣдующимъ образомъ:

Располагаемъ дѣлимое и дѣлителя по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Первый членъ дѣлимаго дѣлимъ на первый членъ дѣлителя: получаемъ первый членъ частнаго.

Вычитаемъ изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго и получаемъ первый остатокъ.

Первый членъ этого остатка дѣлимъ на первый членъ дѣлителя: находимъ второй членъ частнаго.

Вычитаемъ изъ перваго остатка произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго и получаемъ второй остатокъ.

Дѣлимъ первый членъ этого остатка на первый членъ дѣлителя: находимъ третій членъ частнаго и т. д., продолжая до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ получится ноль.

Вотъ еще примѣръ:

$$
\begin{array}{l|l}
12a^7-35a^6b-21a^5b^2-78a^4b^3+2a^3b^4+17a^2b^5-31ab^6+36b^7 & 4a^4-5a^3b-7a^2b^2+8ab^3-9b^4 \\
-12a^7+15a^6b+21a^5b^2-24a^4b^3+27a^3b^4 & 3a^3+5a^2b-7ab^2-4b^3 \\
\quad 20a^6b-3a^5b^2+54a^4b^3+29a^3b^4-17a^2b^5+31ab^6+36b^7 & \\
\quad \pm 20a^6b+24a^5b^2-35a^4b^3-40a^3b^4+45a^2b^5 & \\
\qquad 28a^5b^2+19a^4b^3+69a^3b^4-28a^2b^5+31ab^6+36b^7 & \\
\qquad +28a^5b^2-35a^4b^3+49a^3b^4-56a^2b^5-63ab^6 & \\
\qquad\quad -16a^4b^3+20a^3b^4-28a^2b^5-32ab^6+36b^7 & \\
\qquad\quad 16a^4b^3-20a^3b^4+28a^2b^5-32ab^6+36b^7 & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

(Измѣненные знаки вычитаемыхъ членовъ поставлены сверху).

46 Такъ какъ низшій членъ дѣлимаго есть также членъ неприводимый и происходитъ отъ умноженія низшихъ членовъ дѣлителя и частнаго, то можно начать дѣйствіе съ опредѣленія низшаго члена частнаго, который мы найдемъ, раздѣливъ низшій членъ дѣлимаго на низшій членъ дѣлителя.

Далѣе, дѣля низшій членъ перваго остатка на низшій членъ дѣлителя, найдемъ низшій изъ ненайденныхъ еще членовъ частнаго и т. д. Однимъ словомъ, дѣленіе многочленовъ можетъ быть выполнено въ порядкѣ, обратномъ вышеизложенному, т.-е. начиная съ низшаго и восходя послѣдовательно до высшаго члена частнаго.

Приводимъ примѣръ такого расположенія дѣйствія:

$$
\begin{array}{l|l}
6-15x+13x^2+54x^3-67x^4+38x^5-9x^6-56x^7 & 3-4x^2+5x^3-7x^4 \\
-6 \qquad \pm 8x^2 \mp 10x^3 \pm 14x^4 & 2-5x+7x^2+7x^3 \\
\hline
\quad -15x+21x^2+44x^3-53x^4+38x^5-9x^6-56x^7 & \\
\quad \pm 15x \qquad \mp 20x^3 \pm 25x^4 \mp 35x^5 & \\
\qquad 21x^2+24x^3-28x^4+3x^5-9x^6-56x^7 & \\
\qquad -21x^2 \qquad \pm 28x^4 \mp 35x^5 \pm 49x^6 & \\
\qquad\quad 24x^3 \qquad -32x^5+40x^6-56x^7 & \\
\qquad\quad -24x^3 \qquad \pm 32x^5 \mp 40x^6 \pm 56x^7 & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

47. Когда дѣлимое есть многочленъ неполный, т.-е. содержитъ не всѣ степени главной буквы, то сохраняютъ мѣста недостающихъ членовъ, чтобы можно было писать подобные члены одинъ подъ другимъ.

Примѣръ. Раздѣлить $14x^6 + 54x^5 - 39x^4 - 7x + 2$ на $2x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 3x + 1$.

Въ дѣлимомъ недостаетъ членовъ, содержащихъ x^3 и x^2; сохраняя мѣста, на которыхъ должны бы были находиться эти члены, располагаемъ дѣйствіе такъ.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
14x^6 & + 54x^5 & - 39x^4 & & & - 7x & + 2 & 2x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 3x + 1 \\ \cline{8-8}
-14x^6 & \mp 56x^5 & \pm 35x^4 & \pm 21x^3 & \mp 7x^2 & & & 7x^2 - x + 2 \\
& - 2x^5 & - 4x^4 & + 21x^3 & - 7x^2 & - 7x & + 2 & \\
& \pm 2x^5 & \pm 8x^4 & + 5x^3 & \mp 3x^2 & \pm x & & \\ \cline{2-7}
& & 4x^4 & + 16x^3 & - 10x^2 & - 6x & + 2 & \\
& & - 4x^4 & \mp 16x^3 & \pm 10x^2 & \pm 6x & \mp 2 & \\
& & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Признаки невозможнаго дѣленія многочленовъ.

48. [illegible] [illegible] отъ раздѣленія одного цѣлаго многочлена на другой можетъ [illegible] [illegible] [illegible] многочленомъ относительно входящихъ въ него буквъ, [illegible] [illegible] [illegible]; если же частное нельзя представить въ [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] невозможнымъ.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] нацѣло, или нѣтъ; въ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], не [illegible] на самомъ дѣлѣ [illegible].

I. Если дѣлитель содержитъ букву, которой нѣтъ въ дѣлимомъ, то на какой бы цѣлый многочленъ ни умножили дѣлителя, эта буква остается въ произведеніи, которое поэтому никогда не будетъ равняться дѣлимому. Значитъ, въ этомъ случаѣ частное не можетъ быть представлено въ формѣ цѣлаго многочлена, и дѣленіе невозможно. Напримѣръ,

$$8a^2 + 5ab - b^2$$

не можетъ раздѣлиться нацѣло на $4a + bc$, такъ какъ дѣлитель содержитъ букву c, которой нѣтъ въ дѣлимомъ. Частное изображаютъ въ видѣ дроби, означая дѣленіе горизонтальною чертою:

$$\frac{8a^2 + 5ab - b^2}{4a + bc}.$$

II. Когда дѣлимое есть одночленъ, а дѣлитель — многочленъ, то частное не можетъ быть выражено ни цѣлымъ одночленомъ, ни цѣлымъ многочленомъ. Одночленомъ оно не можетъ быть выражено потому, что произведеніе многочленнаго дѣлителя на одночленное частное дало бы многочленъ, между тѣмъ какъ дѣлимое одночленъ. Многочленомъ оно не можетъ быть выражено потому, что произведеніе многочлена-дѣлителя на многочленъ-частное содержитъ по меньшей мѣрѣ два неприводимыхъ члена, между тѣмъ какъ дѣлимое — одночленъ.

Такъ, дѣленіе a^2 на $a + b$ невозможно, и частное имѣетъ видъ дроби

$$\frac{a^2}{a + b}.$$

III. Если возможенъ цѣлый полиномъ (частное), который, будучи умноженъ на дѣлителя, давалъ бы дѣлимое, то высшій членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ высшихъ членовъ дѣлителя и частнаго, а низшій членъ дѣлимаго—произведеніемъ ихъ низшихъ членовъ. Поэтому, высшій членъ частнаго долженъ равняться частному отъ раздѣленія высшаго на высшій, а низшій членъ частнаго—частному отъ раздѣленія низшаго на низшій членовъ дѣлимаго и дѣлителя. Отсюда прямо слѣдуетъ, что если не дѣлится нацѣло высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя, или низшій на низшій, то дѣленіе невозможно.

Такъ, многочленъ

$$8x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 7x^2$$

не дѣлится на

$$5x^5 - 2x^4 + x^3,$$

потому что низшій членъ $7x^2$ дѣлимаго не дѣлится на низшій членъ x^3 дѣлителя.

Точно такъ же многочленъ

$$3x^2 - x + 1$$

не дѣлится на

$$x^4 + x^2 + 1,$$

такъ какъ высшій членъ дѣлимаго ($3x^2$) не дѣлится на высшій членъ (x^4) дѣлителя.

IV. Но если высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и низшій на низшій, то изъ этого еще никакъ не слѣдуетъ заключать, что дѣленіе возможно. Совершая въ этомъ случаѣ дѣленіе и продолжая его достаточно далеко, всегда можно открыть—возможно оно или нѣтъ.

При этомъ слѣдуетъ различать два случая:

1. Дѣлимое и дѣлитель расположены по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Въ этомъ случаѣ степень высшихъ членовъ послѣдовательныхъ остатковъ идетъ понижаясь. Для возможности дѣленія необходимо, чтобы высшій членъ каждаго остатка дѣлился на высшій членъ дѣлителя; поэтому, если дойдемъ до остатка, въ которомъ высшій членъ содержитъ главную букву въ меньшей степени чѣмъ высшій членъ дѣлителя, и слѣдовательно не дѣлится на высшій членъ дѣлителя, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Такъ, пусть требуется раздѣлить

$$2x^4 + x^3 - x^2 + 7x + 4$$

на

$$x^2 - x + 1.$$

Высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и низшій на низшій. Попробуемъ, не совершается ли дѣленіе на-цѣло:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +\ x^3 & -\ x^2 & +\ 7x & +\ 4 & x^2 - x + 1 \\
-\ 2x^4 & \pm\ 2x^3 & \mp\ 2x^2 & & & 2x^2 + 3x \\
\hline
 & 3x^3 & -\ 3x^2 & +\ 7x & +\ 4 & \\
 & -\ 3x^3 & \pm\ 3x^2 & \mp\ 3x & & \\
\hline
 & & & 4x & +\ 4 &
\end{array}$$

Высшій членъ второго остатка не дѣлится на высшій членъ дѣлителя: заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Иногда, прежде чѣмъ дойдемъ до такого остатка, можно ранѣе убѣдиться, возможно дѣленіе или нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что дѣленіе возможно, можно напередъ опредѣлить каковъ долженъ быть низшій членъ частнаго. Именно, если дѣленіе возможно, то дѣлимое будетъ произведеніемъ дѣлителя на частное, а потому низшій членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ низшихъ членовъ дѣлителя и частнаго; слѣдовательно, раздѣливъ низшій членъ дѣлимаго на низшій членъ дѣлителя, мы узнаемъ, каковъ долженъ быть низшій членъ частнаго Совершая дѣленіе, пусть мы дошли въ частномъ до члена той степени, какую мы ранѣе нашли для послѣдняго члена частнаго; для того чтобы дѣленіе было возможно, необходимо: 1) чтобы членъ, найденный нами въ частномъ, былъ равенъ частному отъ раздѣленія послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя; 2) чтобы слѣдующій остатокъ былъ равенъ нулю. Если хотя одно изъ этихъ условій не осуществляется, заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Приводимъ примѣры.

Раздѣлить $x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 2x^4$ на $x^2 - 5x + 1$.

Высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и низшій на низшій; при этомъ, если дѣленіе возможно, то послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть: $+2x^4 : +1 = +2x^4$.

Совершаемъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^7 & -3x^6 & -4x^5 & +2x^4 & x^2-5x+1 \\ \cline{5-5}
-x^7 & \pm 5x^6 & \mp x^5 & & x^5+2x^4 \\ \cline{2-4}
 & 2x^6 & -5x^5 & +2x^4 & \\
 & -2x^6 & \pm 10x^5 & \mp 2x^4 & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^5 & &
\end{array}$$

Раздѣливъ высшій членъ второго остатка на высшій членъ дѣлителя, находимъ $+2x^4$, т. е. какъ разъ такой членъ, какимъ долженъ быть послѣдній членъ частнаго, а такъ какъ слѣдующій остатокъ не равенъ нулю, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Другой примѣръ: раздѣлить

$$8x^6 + 10x^5 - 32x^4 - 3x^3 + 54x^2 - 20x \text{ на } 4x^3 + 5x^2 - 2x.$$

Первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя, и послѣдній на послѣдній; притомъ, частное отъ этого послѣдняго дѣленія есть $-20x : -2x$ или $+10$. Членъ $+10$ долженъ быть послѣднимъ въ частномъ, если дѣленіе совершается нацѣло.

Выполняемъ дѣйствіе:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
8x^6 & +10x^5 & -32x^4 & -3x^3 & +54x^2 & -20x & 4x^3+5x^2-2x \\ \cline{7-7}
-8x^6 & \mp 10x^5 & \pm 4x^4 & & & & 2x^3-7x+8 \\ \cline{3-6}
 & & -28x^4 & -8x^3 & +54x^2 & -20x & \\
 & & \pm 28x^4 & \pm 35x^3 & \mp 14x^2 & & \\ \cline{6-6}
 & & & 32x^3 & +40x^2 & -20x & \\
 & & & -32x^3 & \mp 40x^2 & \pm 16x & \\ \cline{6-6}
 & & & & & -4x &
\end{array}$$

Членъ частнаго, несодержащій буквы x, оказывается равнымъ $+8$, а не $+10$, какъ должно бы быть при возможномъ дѣленіи: заключаемъ, что дѣленіе невозможно. Вычтя изъ второго остатка произведеніе $(4x^3 - 5x^2 - 2x)$. 8, находимъ послѣдній остатокъ: $-4x$.

2. Дѣлимое и дѣлитель расположены по восходящимъ степенямъ главной буквы.

Въ этомъ случаѣ степень низшаго члена послѣдовательныхъ остатковъ идетъ постепенно увеличиваясь, а потому низшіе члены остатковъ всегда будутъ дѣлиться на низшій членъ дѣлителя. Невозможность дѣленія открываемъ слѣдующимъ образомъ. Раздѣливъ высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя, мы узнаемъ, каковъ долженъ быть высшій членъ частнаго, въ предположеніи, что дѣленіе возможно. Если, дойдя въ частномъ до члена, содержащаго главную букву въ степени, равной избытку показателя главной буквы въ послѣднемъ членѣ дѣлимаго надъ ея показателемъ въ послѣднемъ членѣ дѣлителя, найдемъ, что этотъ членъ отличенъ отъ члена, полученнаго дѣленіемъ послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя, или если этотъ членъ будетъ и = указанному частному, но слѣдующій затѣмъ остатокъ не будетъ 0, то дѣленіе невозможно.

Пусть, наприм., требуется раздѣлить

$$4 - 3x + 5x^2 + x^3 - 19x^4 \text{ на } 1 - 2x - x^2.$$

Здѣсь первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя и послѣдній членъ дѣлимаго на послѣдній дѣлителя.

Если дѣленіе возможно, послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть

$$(-19x^4) : (-x^2) = +19x^2,$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4 & -3x & +5x^2 & +x^3 & -19x^4 & 1 - 2x - x^2 \\
-4 & \pm 8x & \pm 4x^2 & & & 4 + 5x + 19x^2 \\
\hline
 & 5x & +9x^2 & +x^3 & -19x^4 & \\
 & -5x & \pm 10x^2 & \pm 5x^3 & & \\
\hline
 & & 19x^2 & +6x^3 & -19x^4 & \\
 & & -19x^2 & -38x^3 & +19x^4 & \\
\hline
 & & & 44x^3 & &
\end{array}$$

Третій членъ частнаго дѣйствительно $+19x^2$, но затѣмъ остатокъ не есть ноль: заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Еще примѣръ: раздѣлить

$$-2 + x - 5x^3 + 4x^4 \text{ на } -1 - 2x + x^2.$$

Если дѣленіе возможно, послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть $+4x^2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-2 & +x & & -5x^3 & +4x^4 & -1 - 2x + x^2 \\
\pm 2 & \pm 4x & \mp 2x^2 & & & 2 - 5x + 12x^2 \\
\hline
 & 5x & -2x^2 & -5x^3 & +4x^4 & \\
 & 5x & +10x^2 & -5x^3 & & \\
\hline
 & & -12x^2 & & +4x^4 & \\
 & & \pm 12x^2 & \pm 24x^3 & \mp 12x^4 & \\
\hline
 & & & 24x^3 & -8x^4 &
\end{array}$$

[illegible] $+4x^2$ находимъ въ частномъ $-12x^2$; кромѣ того, соотвѣтствую[illegible]ъ долженъ бы быть нулемъ, а онъ равенъ $24x^5-8x^4$. Значитъ, [illegible] невозможно.

[illegible]ность случая дѣленія цѣлыхъ полиномовъ, расположенныхъ по воз[illegible]ымъ степенямъ главной буквы (при соблюденіи условія дѣлимости край[illegible]новъ дѣлимаго на крайніе члены дѣлителя), заключается въ возмож[illegible] полученія въ частномъ неограниченнаго числа цѣлыхъ членовъ. Обусло[illegible]ся это тѣмъ, что степени низшихъ членовъ остатковъ идутъ, постоянно [illegible]ваясь. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ, продолжая дѣленіе, получили бы четвертый членъ $-24x^6$ и т. д.

49. Когда частное отъ раздѣленія цѣлыхъ относительно x полиномовъ одного на другой не можетъ быть въ точности выражено цѣлымъ полиномомъ съ конечнымъ числомъ членовъ, то оно можетъ быть представлено въ видѣ суммы, состоящей изъ нѣкотораго цѣлаго относительно x полинома (когда таковой существуетъ и не сводится къ нулю) и дроби, имѣющей числителемъ одинъ изъ остатковъ, а знаменателемъ — дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B будутъ два цѣлые по буквѣ x полинома, расположенные или по восходящимъ, или по нисходящимъ степенямъ буквы x, — въ послѣднемъ случаѣ пусть степень A не ниже степени B, — и положимъ, что въ частномъ получился цѣлый по буквѣ x многочленъ Q, а въ остаткѣ R. Замѣчая, что остатокъ R происходитъ послѣ вычитанія изъ A произведенія BQ, находимъ:

$$R=A-BQ.$$

или, выражая уменьшаемое посредствомъ вычитаемаго и остатка, находимъ

$$A=BQ+R\ldots(1),$$

отсюда, раздѣливъ обѣ части на B, имѣемъ

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}\ldots(2).$$

Различаемъ теперь два случая: 1) A и B расположены по восходящимъ степенямъ буквы x; 2) A и B расположены по нисходящимъ степенямъ x-са.

Въ первомъ случаѣ преобразованіе, указанное равенствомъ (2), возможно выполнить безчисленнымъ множествомъ способовъ. Въ самомъ дѣлѣ, число цѣлыхъ по буквѣ x остатковъ въ этомъ случаѣ неограниченно, и мы можемъ остановиться на какомъ угодно изъ нихъ. Такъ, дѣля 1 на $1-x$, и, останавливаясь послѣдовательно на 2-мъ, на 3-мъ, на 4-мъ и т. д. остаткахъ, найдемъ преобразованія:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x};\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x};\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2$$
$$+x^3+\frac{x^4}{1-x}\text{ и т. д.}$$

Пусть теперь полиномы A и B расположены по нисходящимъ степенямъ буквы x, и пусть степень A не ниже степени B; то число преобразованій, выражаемыхъ равенствомъ (2), будетъ ограниченное. Степени послѣдовательныхъ остатковъ въ этомъ случаѣ идутъ, все понижаясь, и обыкновенно останавливаются на томъ остаткѣ, котораго степень по крайней мѣрѣ на 1-цу ниже степени дѣлителя. Пусть R и будетъ такой именно остатокъ, а Q — цѣлая часть частнаго; при этомъ ограниченіи преобразованіе, указанное равенствомъ (2).

возможно исполнить только *однимъ единственнымъ* способомъ; т.-е. при ограниченіи, что степень R ниже степени B, существуетъ *только одна пара* цѣлыхъ полиномовъ Q и R, дающихъ равенство (2), или, что то же (1). Чтобы доказать это, допустимъ, что существуетъ другая пара цѣлыхъ по буквѣ x полиномовъ Q' и R', гдѣ степень R' ниже степени B, такихъ, что

$$A = BQ' + R';$$

если это такъ, то полиномы $BQ + R$ и $BQ' + R'$, какъ равные одному и тому же полиному A, должны быть совершенно одинаковы, или, какъ говорятъ, *тождественны*:

$$BQ + R = BQ' + R',$$

т.-е. что, по выполненіи указанныхъ дѣйствій по обѣ стороны знака = должны получиться совершенно одинаковые полиномы. Вычитая отъ равныхъ равныя $R + BQ'$, найдемъ $BQ - BQ' = R' - R$, что можно представить въ видѣ $B(Q - Q') = R' - R$. Но такое равенство возможно только тогда, когда $Q = Q'$ и вмѣстѣ съ тѣмъ $R = R'$, ибо въ противномъ случаѣ $Q - Q'$, будучи цѣлымъ по буквѣ x полиномомъ или, въ крайнемъ случаѣ, будучи независимымъ отъ x числомъ, по умноженіи на B дастъ полиномъ степени или высшей, или, по меньшей мѣрѣ, равной степени полинома B, между тѣмъ какъ R и R', будучи по степени x-са ниже B, дадутъ въ разности полиномъ необходимо низшей степени, чѣмъ степень B, и такимъ образомъ полиномы $B(Q - Q')$ и $R' - R$ были бы неодинаковой степени и, слѣдовательно, не могли бы быть тождественны между собою.

Итакъ, необходимо должно быть Q' тождественно съ Q и R' тождественно съ R; и потому при указанныхъ условіяхъ преобразованіе, представляемое равенствомъ (1), а слѣдовательно и (2), возможно выполнить только однимъ способомъ.

Такъ, если $A = 6x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 25x + 4$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, то полное частное отъ раздѣленія A на B будетъ

$$2x^2 + 3x - 4 + \frac{14x + 8}{3x^2 - 2x + 1},$$

и, по доказанному, выразить полное частное въ такой формѣ (т.-е. въ формѣ цѣлаго полинома + дроби) возможно только однимъ этимъ способомъ, если желаемъ, чтобы степень остатка была ниже степени дѣлителя.

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{x^3 - 7x + 4}{x + 3} = x^2 - 3x + 2 - \frac{2}{x + 3};$$

въ иной формѣ преобразованіе и не можетъ быть выполнено, если хотимъ, чтобы степень остатка была ниже степени дѣлителя.

50. *Раздѣлить полиномъ* A *послѣдовательно на полиномы* B, C, D,.. значитъ раздѣлить A на B, потомъ частное на C, затѣмъ частное этого новаго дѣленія на D и т. д.

Теорема. *Если полиномъ* A *раздѣлить послѣдовательно на полиномы* B, C, D,.. (не необходимо различные между собою), *то послѣднее полученное частное есть вмѣстѣ съ тѣмъ частное отъ раздѣленія* A *на произведеніе* BCD.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что полиномы расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы, имѣемъ тождества:

$$A = BQ_1 + R_1,$$
$$Q_1 = CQ_2 + R_2,$$
$$Q_2 = DQ_3 + R_3,$$

причемъ всѣ полиномы R_1, R_2, R_3, необходимо, низшей степени сравнительно съ B, C, D. Подставляя въ первое тождество вмѣсто Q_1 равное ему выраженіе $CQ_2 + R_2$, имѣемъ

$$A = B(CQ_2 + R_2) + R_1,$$

а сюда вмѣсто Q_2 подставляя $DQ_3 + R_3$, найдемъ

$$A = B[C(DQ_3 + R_3) + R_2] + R_1,$$

или

$$A = BCD \,.\, Q_3 + (BCR_3 + BR_2 + R_1).$$

Легко убѣдиться, что степень полинома въ скобкахъ ниже степени произведенія BCD. Слѣдовательно, послѣднее тождество показываетъ, что, раздѣляя A на BCD, ***находимъ въ частномъ*** Q_3 и въ остаткѣ $BCR_3 + BR_2 + R_1$; теорема доказана.

Если послѣдовательныя дѣленія совершаются на-цѣло, то, значитъ, A дѣлится на BCD, и частное отъ раздѣленія A на BCD есть послѣднее полученное частное. Обратно, если $A = BCD \,.\, Q$, то A дѣлится на B, и въ частномъ получится CDQ, это частное въ свою очередь, дѣлится на C, и частнымъ этого новаго дѣленія будетъ DQ, это частное дѣлится на D, и частнымъ этого третьяго дѣленія будетъ Q.

Слѣдствіе. Основываясь на этомъ, если требуется узнать, дѣлится ли полиномъ A на $(x-a)^p$ (гдѣ p — цѣлое положительное число), можно поступать такъ. Дѣлимъ A на $x-a$; пусть дѣленіе совершается безъ остатка; частное этого дѣленія дѣлимъ опять на $x-a$ и т. д. Если всѣ p дѣленій совершаются безъ остатка, то заключаемъ, что A дѣлится на $(x-a)^p$, и частное послѣдняго дѣленія будетъ частнымъ отъ раздѣленія A на $(x-a)^p$.

Замѣчательные случаи дѣленія.

51 Приведемъ нѣкоторые частные случаи дѣленія, заслуживающіе особаго вниманія вслѣдствіе частаго ихъ примѣненія.

I. ***Разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность основаній.***

Пусть требуется раздѣлить $x^m - a^m$ на $x - a$. Совершая дѣленіе, имѣемъ.

$$\begin{array}{l|l}
x^m - a^m & x - a \\ \cline{2-2}
\underline{-x^m \pm ax^{m-1}} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} \\
\quad ax^{m-1} - a^m & \\
\quad \underline{-ax^{m-1} \pm a^2x^{m-2}} & \\
\qquad a^2x^{m-2} - a^m & \\
\qquad \underline{-a^2x^{m-2} \pm a^3x^{m-3}} & \\
\qquad\quad a^3x^{m-3} - a^m & \\
\qquad\quad \ldots & \\
\qquad\quad a^{m-1}x - a^m & \\
\qquad\quad \underline{-a^{m-1}x \pm a^m} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Расположивъ дѣлимое и дѣлителя по убывающимъ степенямъ буквы x, дѣлимъ первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя и находимъ первый членъ частнаго, въ которомъ показатель буквы x, какъ равный разности показателей той же буквы въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, будетъ $= m - 1$. Первый членъ частнаго есть x^{m-1}. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ дѣлимаго, получаемъ первый остатокъ: $ax^{m-1} - a^m$. Раздѣливъ ax^{m-1} на x, находимъ второй членъ частнаго: ax^{m-2}. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ: $a^2x^{m-2} - a^m$. Подобнымъ же образомъ найдемъ, что третій членъ частнаго $= a^2x^{m-3}$, а третій остатокъ $a^3x^{m-3} - a^m$.

Не продолжая дѣйствія, разсмотримъ законъ составленія послѣдовательныхъ остатковъ. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что всѣ остатки — двучлены, которыхъ вторые члены одинаковы и равны $-a^m$, первые же члены представляютъ произведенія степеней буквъ a и x, причемъ показатели буквы a идутъ послѣдовательно увеличиваясь на 1, а показатели буквы x уменьшаясь на 1, сумма же обоихъ показателей всегда равна m. Изъ этого слѣдуетъ, что, продолжая дѣленіе, мы непремѣнно дойдемъ до такого остатка, первый членъ котораго будетъ имѣть букву a съ показателемъ $m - 1$, а слѣдовательно букву x съ показателемъ 1, такъ какъ сумма показателей должна равняться m. Этотъ остатокъ будетъ слѣдовательно, $a^{m-1}x - a^m$. Дѣля первый его членъ на x, найдемъ въ частномъ членъ a^{m-1}; а умноживъ этимъ членомъ дѣлителя и вычтя произведеніе изъ остатка, находимъ, что слѣдующій остатокъ есть 0: значитъ, $x^m - a^m$ **дѣлится безъ остатка на** $x - a$.

Мы не могли выполнить всѣхъ частныхъ дѣленій вслѣдствіе неопредѣленности числа m; мѣста, гдѣ надо подразумѣвать промежуточные остатки и члены частнаго, обозначены точками.

Законъ частнаго. — Всматриваясь въ составъ частнаго, замѣчаемъ, что оно **имѣетъ слѣдующія свойства:**

1. Всѣмъ его членамъ предшествуетъ знакъ (+), потому что они происходятъ отъ дѣленія первыхъ членовъ остатковъ, предшествуемыхъ знакомъ (+), на первый членъ дѣлителя, имѣющій тотъ же знакъ.

2. Первый членъ частнаго есть x^{m-1}, послѣдній a^{m-1}; что же касается промежуточныхъ членовъ, то они представляютъ произведенія степеней обѣихъ буквъ x и a, причемъ показатели буквы x идутъ послѣдовательно уменьшаясь на 1, а показатели буквы a — послѣдовательно увеличиваясь на 1; такъ что сумма показателей въ каждомъ членѣ равна $m - 1$. Если въ первомъ членѣ подразумѣвать множителемъ a^0, а въ послѣднемъ x^0, то можно сказать, что члены частнаго расположены по убывающимъ степенямъ буквы x, которой показатели идутъ, уменьшаясь на 1, начиная съ $m - 1$ и кончая нулемъ; и по возрастающимъ степенямъ буквы a, которой показатели идутъ, увеличиваясь на 1, начиная съ 0 и кончая $m - 1$.

3. Число членовъ частнаго равно m, т.-е. степени дѣлимаго.

Въ самомъ дѣлѣ, показатели буквы a, наприм., идутъ послѣдовательно увеличиваясь на 1, начиная съ 0 и кончая $m - 1$; но послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 0 до $m - 1$ включительно ровно m. Столько же членовъ и въ частномъ.

При помощи выведенной нами формулы

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} \quad \ldots (A)$$

можно прямо писать частное отъ раздѣленія разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на разность основаній. Вотъ примѣры:

1. $\frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$.

2. $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. Раздѣлить, по формулѣ (A), $125a^3 - 8b^3$ на $5a - 2b$.

Замѣчая, что $125a^3 = 5.5.5.a.a.a = 5a.5a.5a = (5a)^3$, и что $8b^3 = 2.2.2.b.b.b = 2b.2b.2b = (2b)^3$, имѣемъ:

$$\frac{125a^3 - 8b^3}{5a - 2b} = \frac{(5a)^3 - (2b)^3}{5a - 2b} = (5a)^2 + (5a)(2b) + (2b)^2 = 25a^2 + 10ab + 4b^2.$$

4. Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{\frac{1}{243}a^5 - m^5}{\frac{1}{3}a - m} = \frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^5 - m^5}{\frac{1}{3}a - m} = \left(\frac{1}{3}a\right)^4 + \left(\frac{1}{3}a\right)^3.m + \left(\frac{1}{3}a\right)^2.m^2 + \frac{1}{3}a.m^3 +$$

$$+ m^4 = \frac{1}{81}a^4 + \frac{1}{27}a^3m + \frac{1}{9}a^2m^2 + \frac{1}{3}am^3 + m^4.$$

Замѣчаніе. Такъ какъ x и a означаютъ какія угодно количества, то можемъ положить $a = -a'$. Полагая въ формулѣ (A) вмѣсто a количество $-a'$, и замѣтивъ, что дѣлимое обращается въ $x^m - (-a')^m$, а дѣлитель въ $x - (-a')$ или въ $x + a'$, находимъ:

$$\frac{x^m - (-a')^m}{x + a'} = x^{m-1} + (-a')x^{m-2} + (-a')^2x^{m-3} + \ldots + (-a')^{m-2}x +$$

$$+ (-a')^{m-1}.$$

Изъ правила знаковъ при умноженіи заключаемъ, что $(-a')^2 = (-a')(-a') = +a'^2$; $(-a')^3 = (-a')^2(-a') = (+a'^2)(-a') = -a'^3$; $(-a')^4 = -a'^3.-a' = +a'^4$ и т. д. Однимъ словомъ: четныя степени количества $-a'$ даютъ знакъ $+$, а нечетныя знакъ $-$. Замѣтивъ это, различаемъ два случая: m — четнаго и m — нечетнаго.

1. m — число четное. — Въ такомъ случаѣ будетъ: $m - 1$ — число нечетное, $m - 2$ — четное, $m - 3$ — нечетное и т. д. А потому найдемъ, что: $(-a')^m = +a'^m$; $(-a')^{m-1} = -a'^{m-1}$; $(-a')^{m-2} = +a'^{m-2}$ и т. д. Принимая это въ соображеніе, найдемъ, что послѣднее равенство принимаетъ видъ

$$\frac{x^m - a'^m}{x + a'} = x^{m-1} - a'.x^{m-2} + a'^2.x^{m-3} - a'^3.x^{m-4} + \ldots + a'^{m-2}x - a'^{m-1} \ldots \text{(B)}.$$

Отсюда заключаемъ, что *разность одинаковыхъ четныхъ степеней дѣлится безъ остатка и на сумму основаній*, при чемъ законъ составленія частнаго отличается отъ вышеуказаннаго только чередованіемъ знаковъ.

Напримѣръ, $x^6 - a^6$ дѣлится не только на $x - a$, но и на $x + a$, причемъ частное будетъ

$$\frac{x^6 - a^6}{x + a} = x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5.$$

2. ***m* — число нечетное.** — Въ такомъ случаѣ, $m-1$ будетъ число четное, $m-2$ — нечетное и т. д. Поэтому: $(-a')^m = -a'^m$, сл. дѣлимое будетъ $x^m-(-a'^m) = x^m+a'^m$; затѣмъ, $(-a')^{m-1}$ будетъ $= +a'^{m-1}$; $(-a')^{m-2} = -a'^{m-2}$ и т. д., и мы получимъ:

$$\frac{x^m+a'^m}{x+a'} = x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'^2x^{m-3}-a'^3x^{m-4}+\ldots-a'^{m-2}x+a'^{m-1} \ldots (C).$$

Равенство (C) показываетъ, что *сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму основаній*, причемъ въ частномъ знаки чередуются.

Напримѣръ:

1. $\frac{x^7+a^7}{x+a} = x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^4x^2-a^5x+a^6$.

2. $\frac{x^5+1}{x+1} = x^4-x^3+x^2-x+1$.

II. *Сумма одинаковыхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится безъ остатка на разность этихъ количествъ.*

Пусть требуется раздѣлить сумму x^m+a^m на $x-a$:

$$\begin{array}{l|l}
x^m+a^m & x-a \\
\cline{2-2}
-x^m\pm ax^{m-1} & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1} \\
\quad ax^{m-1}+a^m & \\
\quad -ax^{m-1}\pm a^2x^{m-2} & \\
\qquad a^2x^{m-2}+a^m & \\
\qquad \underline{-a^2x^{m-2}\pm a^3x^{m-3}} & \\
\qquad\quad a^3x^{m-3}+a^m & \\
\qquad\quad \ldots\ldots & \\
\qquad\quad a^{m-1}x+a^m & \\
\qquad\quad -a^{m-1}x\pm a^m & \\
\qquad\qquad 2a^m &
\end{array}$$

Дѣленіе будетъ возможно, если, найдя въ частномъ членъ $+a^{m-1}$, получимъ въ остаткѣ 0; но совершая дѣленіе, мы нашли въ частномъ членъ $+a^{m-1}$ и затѣмъ въ остаткѣ $2a^m$: заключаемъ, что дѣленіе не совершается безъ остатка. Что касается цѣлой части частнаго, то она составлена совершенно по тому же закону, какъ и въ первомъ случаѣ. Полное частное будетъ

$$\frac{x^m+a^m}{x-a} = x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a} \ldots (D).$$

Слѣдствія. Полагая въ этой формулѣ $a = -a'$, находимъ

$$\frac{x^m+(-a')^m}{x-(-a')} = x^{m-1}+(-a')x^{m-2}+(-a')^2x^{m-3}+\ldots+(-a')^{m-1}+\frac{2(-a')^m}{x-(-a')}.$$

Разсмотримъ опять два случая: m — четнаго и m — нечетнаго.

1-й случай. — m — число четное. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m+a'^m}{x+a'}=x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'^2x^{m-3}-a'^3x^{m-4}+\ldots-a'^{m-1}+\frac{2a'^m}{x+a'} \ldots (E).$$

Откуда заключаемъ, что *сумма одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на сумму тѣхъ же количествъ, и что остатокъ равенъ удвоенному второму члену дѣлимаго.*

Такъ,

$$\frac{x^4+a^4}{x+a}=x^3-ax^2+a^2x-a^3+\frac{2a^4}{x+a}.$$

2-й случай. — m — нечетное число. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m-a'^m}{x+a'}=x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'^2x^{m-3}-\ldots+a'^{m-1}-\frac{2a'^m}{x+a'} \ldots (F)$$

Слѣдовательно, *разность одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на сумму этихъ количествъ, и остатокъ равенъ удвоенному второму члену дѣлимаго.*

Такъ,

$$\frac{x^5-a^5}{x+a}=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4-\frac{2a^5}{x+a}.$$

Выдѣляя изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ тѣ, когда дѣленіе совершается безъ остатка, приходимъ къ слѣдующему выводу: *разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ всегда дѣлится на разность основаній; разность одинаковыхъ четныхъ степеней дѣлится, кромѣ того, и на сумму основаній; сумма же одинаковыхъ нечетныхъ степеней — на сумму основаній.*

Теорема, доказанная въ этомъ параграфѣ, извѣстна подъ именемъ теоремы Безу (Bezout).

ГЛАВА VI.

Разложеніе алгебраическихъ выраженій на множители. Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффиціентами.

52. Разложить выраженіе на множители — значитъ представить его въ формѣ произведенія, иначе говоря, въ формѣ одночлена. Опредѣленнаго неизмѣннаго правила для такого преобразованія нѣтъ; знаніе теоремъ и навыкъ въ преобразованіяхъ позволяютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ открыть, каковы множители даннаго выраженія.

Естественно, первое, что нужно сдѣлать — это выдѣлить множителя, общаго всѣмъ членамъ даннаго выраженія, если таковой имѣется. Затѣмъ, дальнѣйшее разложеніе совершается примѣненіемъ одного изъ слѣдующихъ трехъ пріемовъ: 1) формулъ замѣчательныхъ случаевъ умноженія и дѣленія; 2) метода опредѣленной группировки членовъ; 3) метода двухчленныхъ дѣлителей. Откладывая изложеніе послѣдняго метода до слѣдующей главы, ознакомимся въ этой главѣ съ остальными изъ указанныхъ пріемовъ.

53. Вынесеніе за скобки общаго множителя членовъ даннаго многочлена. — Пусть всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, напр.,

$$AD - BD + CD;$$

замѣтивъ, что величина многочлена не измѣнится, если мы его помножимъ и раздѣлимъ на одно и то же количество, множимъ и дѣлимъ на D; находимъ

$$AD - BD + CD = D\left(\frac{AD - BD + CD}{D}\right).$$

Выполнивъ дѣленіе $AD - BD + CD$ на D по правилу дѣленія многочлена на одночленъ, найдемъ въ частномъ $A - B + C$; слѣд.

$$AD - BD + CD = D(A - B + C).$$

Отсюда видимъ, что *если всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, то этотъ множитель можно вынести за скобки, написавъ въ скобкахъ частное отъ раздѣленія даннаго многочлена на общій множитель его членовъ.*

Такъ, всѣ члены многочлена $35b^2c^4 - 7bc^3d^2 + 49ab^2c^2d + 343b^3c^3$ имѣютъ общимъ множителемъ $7bc^2$, который и выносимъ за скобки; въ скобкахъ же пишемъ частное отъ раздѣленія многочлена на $7bc^2$; такимъ образомъ найдемъ:

$$35b^2c^4 - 7bc^3d^2 + 49ab^2c^2d + 343b^3c^3 = 7bc^2(5bc^2 - cd^2 + 7abd + 49b^2c).$$

Иногда выраженіе, получившееся въ скобкахъ, бываетъ способно къ дальнѣйшему разложенію, либо къ другимъ преобразованіямъ, могущимъ его упростить. Напр., $14a^5b^2 - 28a^4b^3 + 14a^3b^4$, по вынесеніи за скобки общаго множителя $14a^3b^2$, приводится къ виду $14a^3b^2(a^2 - 2ab + b^2)$; замѣчая затѣмъ, что $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, замѣняемъ данное выраженіе простѣйшимъ

$$14a^3b^2(a - b)^2.$$

54. Методъ примѣненія замѣчательныхъ формулъ умноженія и дѣленія. — Можно иногда съ успѣхомъ примѣнять къ разложенію на множители формулы замѣчательныхъ случаевъ умноженія и дѣленія.

Простѣйшая изъ этихъ формулъ есть

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \ldots (1).$$

Замѣтивъ далѣе, что

$$\frac{A^3 - B^3}{A - B} = A^2 + AB + B^2 \text{ и } \frac{A^3 + B^3}{A + B} = A^2 - AB + B^2,$$

и опредѣляя изъ того и другого равенства дѣлимое по дѣлителю и частному, имѣемъ:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \ldots (2)$$
$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \ldots (3)$$

Затѣмъ имѣемъ:

$$A^4 - B^4 = (A^2)^2 - (B^2)^2 = (A^2 + B^2)(A^2 - B^2) = (A^2 + B^2)(A + B)(A - B) \ldots (4).$$

$$A^6 - B^6 = (A^3)^2 - (B^3)^2 = (A^3 + B^3)(A^3 - B^3) =$$
$$= (A + B)(A - B)(A^2 + AB + B^2)(A^2 - AB + B^2) \ldots (5).$$

Вотъ примѣры примѣненія этихъ формулъ:

1) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$.
2) $(a + b - c)^2 - (a - 2b + 3c)^2 = (2a - b + 2c)(3b - 4c)$.
3) $a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4) = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.
4) $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
5) $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

6) Разложить на множители

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Придавъ къ этому выраженію и вычтя изъ него $2a^2b^2$, находимъ:

$$4a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$= (2ab)^2 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + 2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 =$$
$$= (2ab)^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 =$$
$$= (2ab)^2 - \{(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4\} =$$
$$= (2ab)^2 - \{(a^2 + b^2) - c^2\}^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) =$$
$$= [(a + b)^2 - c^2][-(a - b)^2 + c^2]$$
$$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

Разсмотримъ еще разложеніе выраженій $A^4 + B^4$, $A^4 + B^4 + A^2B^2$, $A^4 + B^4 - kA^2B^2$.

Придавая къ первому изъ этихъ выраженій и вычитая изъ него $2A^2B^2$, находимъ:

$$A^4 + B^4 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4 - 2A^2B^2 = (A^2 + B^2)^2 - (\sqrt{2} \,.\, AB)^2 =$$
$$= (A^2 + B^2 + AB\sqrt{2})(A^2 + B^2 - AB\sqrt{2}).$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$A^4 + B^4 + A^2B^2 = (A^2 + B^2)^2 - A^2B^2 = (A^2 + B^2 + AB)(A^2 + B^2 - AB).$$

$$A^4 + B^4 - kA^2B^2 = (A^2 + B^2)^2 - (k + 2)A^2B^2 =$$
$$= (A^2 + B^2 + AB\sqrt{k + 2})(A^2 + B^2 - AB\sqrt{k + 2}).$$

55. Методъ группировки членовъ. — Если всѣ члены многочлена не имѣютъ общаго множителя, то иногда возможно бываетъ разбить ихъ на группы такъ, чтобы всѣ группы имѣли общаго множителя, который и выносится за скобки. Общихъ правилъ для такихъ преобразованій нѣтъ; какъ ихъ совершать, укажутъ нижеслѣдующіе примѣры.

1. Разложить на множителя выраженіе $a^2 + bc - ac - ab$. Разбиваемъ многочленъ на двѣ группы: $a^2 - ac$ и $+ bc - ab$; вынося въ первой группѣ за

скобки a, находимъ $a(a-c)$; вынося во второй группѣ $-b$, получимъ $-b(a-c)$. Слѣд. данное выраженіе $= a(a-c)-b(a-c)$; вынеся здѣсь за скобки $a-c$, получаемъ окончательно $(a-c)(a-b)$.

2. Взявъ триномъ $x^2+(a+b)x+ab$, раскроемъ скобки и сгруппируемъ члены попарно; найдемъ

$$x^2+ax+bx+ab=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$$

Подобно этому, найдемъ

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab,$$
$$(x-a)(x+b)=x^2+(-a+b)x-ab.$$

Отсюда заключаемъ, что всегда можно перейти отъ тринома вида x^2+px+q къ произведенію двухъ биномовъ $(x+a)(x+b)$, какъ скоро удастся подыскать два такихъ числа a и b, *произведеніе которыхъ равнялось бы q, а алгебраическая сумма давала бы p*. Вотъ примѣры.

Пусть нужно разложить триномъ $x^2-10x+24$. Пробуемъ, нельзя ли свободный членъ $+24$ разложить на два такихъ множителя, — эти множители должны быть одинаковаго знака, — алгебраическая сумма которыхъ давала бы коэффиціентъ при первой степени x, т.-е. -10. Но 24 можно разложить на слѣдующія пары множителей:

$$1\times 24,\quad 2\times 12,\quad 3\times 8,\quad 4\times 6.$$
$$-1\times -24,\quad -2\times -12,\quad -3\times -8,\quad -4\times -6.$$

Изъ нихъ только послѣдняя пара дастъ въ суммѣ -10. Такимъ образомъ прямо находимъ, что искомые множители будутъ

$$x-4 \text{ и } x-6;\ \text{слѣд., } x^2-10x+24=(x-4)(x-6).$$

Пусть еще требуется разложить триномъ $x^2+2x-35$. Такъ какъ передъ свободнымъ членомъ стоитъ знакъ $-$, то пытаемся, нельзя ли разбить -35 на два такихъ множителя съ противоположными знаками, чтобы ихъ произведеніе было -35, а алгебраическая сумма $+2$. Множители -35 будутъ: ± 1 и ∓ 35, ± 5 и ∓ 7; требованію удовлетворяютъ: $+7$ и -5. Слѣд., искомые множители будутъ:

$$x+7 \text{ и } x-5, \text{ и } x^2+2x-35=(x-5)(x+7).$$

3. Взявъ $acx^2+(ad+bc)x+bd$, раскрывъ скобки и сгруппировавъ члены по два, имѣемъ

$$acx^2+adx+bcx+bd=ax(cx+d)+b(cx+d)=(ax+b)(cx+d).$$

Отсюда видно, что разложеніе тринома px^2+qx+r на множители вида $ax+b$ и $cx+d$ будетъ возможно, какъ скоро удастся разложить p на два множителя a и c, а r — на два множителя b и d такъ, чтобы средній коэффиціентъ q равнялся $ad+bc$.

Пусть, напр., требуется разложить триномъ $3x^2+7x-6$. Коэффиціентъ 3 разлагается только на 1 и 3. Послѣдній членъ -6 можетъ быть произведеніемъ -6 на 1, $+6$ на -1, -2 на $+3$, $+2$ на -3. Составляемъ теперь множители $ax + b$ и $cx - d$, причемъ для коэффиціентовъ a и c при x должно брать комбинаціи разложенія 3, а для b и d — комбинаціи разложенія -6. Такимъ образомъ испытываемъ комбинаціи:

$$(3x \mp 6)(x \pm 1),\ (3x \pm 1)(x \mp 6),\ (3x \pm 2)(x \mp 3),\ (3x \pm 3)(x \mp 2).$$

Изъ этихъ комбинацій дастъ $+7x$ для средняго члена — третья, если взять въ ней верхніе знаки: требуемое разложеніе будетъ, слѣдовательно,

$$(3x - 2)(x + 3)$$

Триномы вида $ax^2 + bx + c$ можно иногда легко разлагать *способомъ дополненія первыхъ двухъ членовъ до полнаго квадрата*, съ тѣмъ чтобы привести выраженіе къ разности двухъ квадратовъ. Вотъ примѣры.

Найти множители $x^2 + 7x + 12$. Обращаясь къ формулѣ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, замѣчаемъ, что x^2 можно разсматривать какъ квадратъ перваго члена пока неизвѣстнаго бинома; помноживъ и раздѣливъ $7x$ на 2, что дастъ $2 \cdot x \cdot \frac{7}{2}$, мы можемъ $7x$ разсматривать какъ удвоенное произведеніе перваго члена (x) искомаго бинома на второй, который, слѣд., равенъ $\frac{7}{2}$. Отсюда прямо видно, что если къ данному триному придать квадратъ этого второго члена, $\left(\frac{7}{2}\right)^2$, при чемъ, понятно, нужно и вычесть столько же, т.-е. если написать данный триномъ въ видѣ

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 - \left(\frac{7}{2}\right)^2,$$

то первые три члена даютъ квадратъ бинома $x + \frac{7}{2}$, такъ что данный триномъ можно написать въ видѣ

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{49}{4} - 12\right),\ \text{или}\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

а это, по формулѣ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, равно

$$\left(x + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right) = (x + 4)(x + 3).$$

Еще примѣръ, легко рѣшаемый этимъ способомъ: разложить

$$(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 12) - 280.$$

Раскрывая произведеніе, причемъ $x^2 + 7x$ считаемъ за одинъ членъ, имѣемъ

$$(x^2 + 7x)^2 + 18(x^2 + 7x) + 72 - 280.$$

Замѣтивъ, что второй членъ можно написать въ видѣ $2 \cdot (x^2 + 7x) \cdot 9$, находимъ, что для требуемаго преобразованія надо придать и вычесть 9^2, и тогда выраженіе будетъ

$$(x^2 + 7x + 9)^2 + 72 - 280 - 81 = (x^2 + 7x + 9)^2 - 289 = (x^2 + 7x + 9)^2 - (17)^2 = (x^2 + 7x + 26)(x^2 + 7x - 8) = (x^2 + 7x + 26)(x - 1)(x + 8)$$

4. Иногда разложеніе группировкой удается, если расположить данное выраженіе по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы. Такъ, въ выраженіи

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ мы не замѣчаемъ общаго множителя; но, расположивъ по убывающимъ степенямъ a, находимъ

$$a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c),$$

откуда прямо видевъ множитель $b-c$. Вынеся его за скобки, получимъ

$$(b-c)[a^2-a(b+c)+bc]=(b-c)[(a^2-ab)-(ac-bc)]$$
$$=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=(b-c)(a-b)(a-c).$$

5. Разложить на множители $a^2b^2(a-b)-a^2c^2(a-c)+b^2c^2(b-c)$.

Можно бы было начать такъ, какъ указано въ предыдущемъ примѣрѣ. Но можно идти еще такимъ путемъ.

Имѣемъ послѣдовательно:

$$a^2\{b^2(a-b)-c^2(a-c)\}+b^2c^2(b-c)$$
$$=a^2\{ab^2-ac^2+c^3-b^3\}+b^2c^2(b-c)$$
$$=a^2\{a(b^2-c^2)-(b^3-c^3)\}+b^2c^2(b-c)$$
$$=a^2\{a(b-c)(b+c)-(b-c)(b^2+bc+c^2)\}+b^2c^2(b-c)$$
$$=a^2(b-c)\{a(b+c)-(b^2+bc+c^2)\}+b^2c^2(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{a^2b(a-b)+a^2c(a-b)-c^2(b^2-a^2)\}$$
$$=(b-c)(a-b)\{a^2b+a^2c-c^2(a+b)\}$$
$$=(b-c)(a-b)\{b(a^2-c^2)+ac(a-c)\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)(ab+bc+ac).$$

6. Разложить на множители $a^{x+y}-a^yb^y+a^xb^x-b^{x+y}$.

Замѣчая, что показатели складываются при умноженіи степеней одной и той же буквы, замѣняемъ 1-й и 4-й члены произведеніями $a^x.a^y$ и b^xb^y, послѣ чего данное выраженіе приметъ видъ $a^xa^y-a^yb^y+a^xb^x-b^xb^y$, или $a^y(a^x-b^y)+$ $+b^x(a^x-b^y)$, и наконецъ $(a^x-b^y)(a^y+b^x)$.

7. Разложить на множители x^3+4x^2+x-6. Представивъ второй членъ въ видѣ $3x^2+x^2$, а третій — въ видѣ $3x-2x$, получаемъ выраженіе

$$x^3+3x^2+x^2+3x-2x-6=x^2(x+3)+x(x+3)-2(x+3)$$
$$=(x+3)(x^2+x-2)=(x+3)(x^2+2x-x-2)=(x+3)\{x(x+2)-$$
$$-(x+2)\}=(x+3)\{(x+2)(x-1)\}=(x+3)(x+2)(x-1).$$

Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффиціентами.

56. Если въ данныхъ для умноженія многочленахъ встрѣчаются члены, содержащіе одинаковыя степени главной буквы, то такіе члены разсматриваютъ какъ подобные по отношенію къ главной буквѣ и соединяютъ въ одинъ, вынося за скобку общую степень главной буквы, а многочленный множитель, такимъ образомъ полученный, считаютъ коэффиціентомъ этой степени. Пусть, напр., требуется умножить

$$ax^3+bx^3-a^2x^2+a^3x-3abx^2-b^2x^2+b^3x-a^4+3b^4 \text{ на}$$
$$ax^2+a^2x-b^2x-bx^2+a^3-2b^3.$$

Сдѣлавъ вынесеніе за скобки, представимъ первый многочленъ въ видѣ

$$(a+b)x^3 \quad (a^2+3ab+b^2)x^2+(a^3+b^3)x-a^4+3b^4,$$

а второй въ видѣ

$$(a-b)x^2+(a^2-b^2)x+a^3-2b^3.$$

Разсматриваемъ первый многочленъ какъ четырехчленъ, а второй какъ трехчленъ; $a+b$, $a^2+3ab+b^2$ и a^3+b^3 — какъ коэффиціенты при степеняхъ x перваго многочлена, $-a^4+3b^4$ какъ свободный членъ этого многочлена; $a-b$ и a^2-b^2 — какъ коэффиціенты, и a^3-2b^3 — какъ свободный членъ второго многочлена.

Чтобы многочлены уписались въ одной строкѣ, скобки замѣняютъ вертикальною чертою, справа отъ которой пишутъ степень буквы x, а слѣва одинъ подъ другимъ члены коэффиціента, каждый съ его знакомъ. Дѣйствіе располагаютъ слѣдующ. образ.

$$\begin{array}{r|ll|ll|ll}
a & x^3 & -a^2 & x^2 & +a^3 & x & -a^4 \\
+b & & -3ab & & +b^3 & & +3b^4 \\
 & & -b^2 & & & &
\end{array}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;\text{множимое}$$

$$\begin{array}{r|ll|ll}
a & x^2 & +a^2 & x & +a^3 \\
-b & & -b^2 & & -2b^3
\end{array}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;\text{множитель}$$

$$\left.\begin{array}{r|ll|ll|ll|ll|ll}
a^3 & x^5 & -a^3 & x^4 & +a^4 & x^3 & -a^5 & x^2 & -a^6 & x & -a^7 \\
-b^3 & & -2a^2b & & -a^3b & & -a^4b & & +a^4b^2 & & +2a^4b^3 \\
 & & -2ab^2 & & -ab^3 & & +3ab^4 & & +3a^2b^4 & & +3a^3b^4 \\
 & & +b^3 & & -b^4 & & -3b^5 & & -3b^6 & & -6b^7 \\
 & & +a^3 & & -a^4 & & +a^5 & & +a^6 & & \\
 & & +a^2b & & -3a^3b & & -a^3b^2 & & -a^5b^2 & & \\
 & & -ab^2 & & 3ab^3 & & +a^2b^3 & & -2b^6 & & \\
 & & -b^3 & & +b^4 & & -b^5 & & & & \\
 & & & & +a^4 & & -a^5 & & & & \\
 & & & & +a^3b & & -3a^4b & & & & \\
 & & & & -2ab^3 & & -a^3b^2 & & & & \\
 & & & & -2b^4 & & +2a^2b^3 & & & & \\
 & & & & & & +6ab^4 & & & & \\
 & & & & & & +2b^5 & & & &
\end{array}\right\}\;\text{Произведеніе до приведенія.}$$

$$\left.\begin{array}{r|ll|ll|ll|ll|ll}
a^2 & x^5 & -a^2b & x^4 & +a^4 & x^3 & -a^5 & x^2 & +a^4b^2 & x & -a^7 \\
-b^2 & & +ab^2 & & 3a^3b & & -2a^4b & & -a^5b^2 & & +2a^4b^3 \\
 & & & & +2ab^3 & & -2a^3b^2 & & +3a^2b^4 & & 3a^3b^4 \\
 & & & & -2b^4 & & +3a^2b^3 & & -5b^6 & & -6b^7 \\
 & & & & & & +9ab^4 & & & & \\
 & & & & & & -2b^5 & & & &
\end{array}\right\}\;\text{Произведеніе по приведеніи.}$$

Сперва умножаютъ всѣ члены множимаго на ax^2, потомъ на $-bx^2$, затѣмъ на $+a^2x$ и т. д., располагая и произведеніе вертикальными колоннами по степенямъ буквы x; соединивъ, наконецъ, подобные члены въ каждой колоннѣ, получаютъ окончательное произведеніе.

57. Пусть требуется раздѣлить многочленъ съ многочленными коэффиціентами на другой такого же рода. Дѣйствіе располагаютъ какъ обыкновенно, съ тою разницею, что вмѣсто скобокъ употребляютъ вертикальныя черты. Дѣленія коэффиціентовъ совершаютъ отдѣльно, называя эти дѣйствія частными дѣленіями. Все это указано въ нижеслѣдующемъ примѣрѣ.

$$\begin{array}{r|l|l|l}
a^4 & x^3 + a^4 & x^2 + 4a^3 & x + 4a^2 \\
-a^3b & \quad + 2a^3 & \quad + 10ab^2 & \quad - 9b^2 \\
ab^3 & \quad + a^2b^2 & & \\
-b^4 & \quad + 3a^2b & & \\
 & \quad - 2ab^2 & & \\
 & \quad - 3b^3 & & \\
 & \quad + b^4 & & \\
\hline
a^4 & x^3 + 2a^3 & x^2 & \\
-a^3b & \quad + 3a^2b & & \\
+ab^3 & \quad - 2ab^2 & & \\
-b^4 & \quad - 3b^3 & & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
a^2 & x \quad + 2a \\
-ab & \quad\;\; + 3b \\
+b^2 & \\
\hline
a^2 & x^2 \quad + a^2 \\
-b^2 & \qquad + ab \\
 & \qquad + b^2
\end{array}
\begin{array}{|l}
\\ \\ \\ \\
x \quad + 2a \\
\quad\;\; - 3b \\
\\
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
a^4 & x^2 + 4a^3 & x + 4a^2 \\
+a^2b^2 & \quad + 10ab^2 & \quad - 9b^2 \\
+b^4 & & \\
a^4 & x^2 + 2a^3 & x \\
+a^2b^2 & \quad + 5a^2b & \\
+b^4 & \quad + 5ab^2 & \\
 & \quad + 3b^3 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2a^3 & x + 4a^2 \\
-5a^2b & \quad - 9b^2 \\
+5ab^2 & \\
-3b^3 & \\
2a^3 & x + 4a^2 \\
-5a^2b & \quad - 9b^2 \\
+5ab^2 & \\
-3b^3 & \\
\hline
0. &
\end{array}$$

Частныя дѣленія, служащія для опредѣленія коэффиціентовъ частнаго:

1-ое частное дѣленіе.

$$\begin{array}{l|l}
a^4 - a^3b + ab^3 - b^4 & a^2 - ab + b^2 \\
\cline{2-2}
a^4 - a^3b + a^2b^2 & a^2 - b^2 \\
\quad -a^2b^2 + ab^3 - b^4 & \\
\quad -a^2b^2 + ab^3 - b^4 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

2-ое частное дѣленіе.

$$\begin{array}{l|l}
a^4 \qquad\quad - a^2b^2 \qquad + b^4 & a^2 - ab + b^2 \\
\cline{2-2}
a^4 - a^3b + a^2b^2 & a^2 + ab + b^2 \\
\quad a^3b \qquad\qquad\quad + b^4 & \\
\quad a^3b - a^2b^2 + ab^3 & \\
\qquad a^2b^2 - ab^3 + b^4 & \\
\qquad a^2b^2 \quad ab^3 + b^4 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

3-ье частное дѣленіе.

$$\begin{array}{l|l}
2a^3 - 5a^2b + 5ab^2 - 3b^3 & a^2 - ab + b^2 \\
\cline{2-2}
2a^3 - 2a^2b + 2ab^2 & 2a - 3b \\
\quad - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3 & \\
\quad - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3 & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

ГЛАВА VII.

О дѣлимости на биномы вида $x \pm a$. — Основанія способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. — Различныя приложенія предыдущихъ теоремъ.

58. Теорема I. *Если раціональный цѣлый относительно буквы* x *полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ этой буквы, раздѣлимъ на биномъ* x — a, *то въ остаткѣ получимъ результатъ подстановки въ этотъ полиномъ буквы* a *вмѣсто* x.

Приведемъ *доказательство д'Аламбера.*

Всякій полиномъ, цѣлый и раціональный относительно x, можно представить въ видѣ

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \dots + A_2x^2 + A_1x + A_0,$$

разумѣя подъ m какое-нибудь цѣлое положительное число, а подъ A_m, A_{m-1}, ... A_1, A_0 — нѣкоторые коэффиціенты, т.-е. выраженія, не содержащія буквы x. Если такой многочленъ раздѣлить на $x - a$, то окончательный остатокъ долженъ быть выраженіемъ, не содержащимъ буквы x; въ самомъ дѣлѣ, если допустить, что остатокъ содержитъ букву x хотя только въ первой степени, то можно бы было продолжать дѣленіе, потому что дѣлитель содержитъ также букву x въ первой степени. Означимъ этотъ, не содержащій буквы x, окончательный остатокъ черезъ R и постараемся опредѣлить R. Назвавъ для этого частное, которое, вообще говоря, будетъ многочленомъ, расположеннымъ по убывающимъ степенямъ буквы x, черезъ Q, и замѣтивъ, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ, получимъ

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots + A_1x + A_0 = (x - a).\ Q + R.$$

Замѣчая, что обѣ части этого равенства представляютъ лишь различныя формы одного и того же выраженія, убѣждаемся этимъ, что равенство наше есть ничто иное какъ *тождество*, т.-е. равенство, справедливое при всякой величинѣ входящихъ въ него буквъ. Слѣдовательно, оно будетъ справедливо и тогда, когда, въ частности, положимъ $x = a$. Но при такой подстановкѣ первая часть приметъ видъ

$$A_m a^m + A_{m-1}a^{m-1} + \dots + A_1a + A_0 \dots (1),$$

и слѣд. не будетъ содержать буквы x, такъ какъ и коэффиціенты A_m, ..., A_1, A_0 не содержатъ x. Что касается второй части, то въ выраженіи Q буква x также исчезнетъ; равно то $x - a$, при подстановкѣ a вмѣсто x, обратится въ $a - a$, или въ нуль, и слѣд. и произведеніе $Q(x - a)$, котораго одинъ множитель равенъ 0, также обратится въ 0. Во второй части останется, поэтому, только выраженіе R, которое не измѣнится отъ указанной подстановки, такъ какъ совсѣмъ не содержитъ буквы x. Итакъ, дѣлая $x = a$, мы вмѣсто прежняго равенства получимъ слѣдующее

$$A_m a^m + A_{m-1}a^{m-1} \dots + A_1a + A_0 = R,$$

которое и доказываетъ, что остатокъ имѣетъ форму даннаго многочлена, въ которомъ буква x замѣнена буквою a.

59. Если бы дѣлитель былъ $x + a$, то этотъ случай легко привести къ разсмотрѣнному, замѣтивъ, что $x + a$ можно представить въ видѣ разности $x - (-a)$. Отсюда прямо вытекаетъ

Теорема II, служащая дополненіемъ первой: *Если цѣлый раціональный относительно буквы* x *полиномъ раздѣлимъ на биномъ* x + a, *то въ остаткѣ получимъ результатъ подстановки въ этотъ полиномъ буквы* (— a) *вмѣсто* x.

Примѣры I Найти остатокъ отъ раздѣленія многочлена

$$3x^5 - 4x^4 - 2x^2 + 7$$

на $x - 2$.

Подставляя въ данный полиномъ 2 вмѣсто x, находимъ окончательный остатокъ

$$R = 3.2^5 - 4.2^4 - 2.2^2 + 7 = 96 - 64 - 8 + 7 = 31.$$

II. Найти остатокъ отъ раздѣленія тринома

$$x^2 - 8x + 15$$

на $x + 5$.

Подставляя въ данный триномъ (-5) вмѣсто x, получимъ $(-5)^2 - 8.(-5) + 15 = 25 + 40 + 15 = 80$. Окончательный остатокъ $= 80$.

60. Изъ доказанныхъ теоремъ вытекаютъ такія слѣдствія:

Слѣдствіе I. — Если многочленъ обращается въ ноль послѣ замѣны въ немъ буквы x буквою a, то онъ дѣлится на $x - a$; если многочленъ обращается въ ноль послѣ замѣны буквы x буквою $(-a)$, то онъ дѣлится на $x + a$.

Въ самомъ дѣлѣ, многочленъ, полученный послѣ замѣны буквы x буквою a или $(-a)$, есть ни что иное какъ окончательный остатокъ отъ раздѣленія даннаго многочлена въ первомъ случаѣ на $x - a$, во второмъ — на $x + a$. Но если окончат. остатокъ равенъ нулю, то это значитъ, что многочленъ дѣлится безъ остатка — въ первомъ случаѣ на $x - a$, во второмъ на $x + a$.

Слѣдствіе II, обратное предыдущему Если многочленъ дѣлится на $x - a$ или на $x + a$, то результатъ подстановки въ него — въ первомъ случаѣ буквы a, а во второмъ $(-a)$ вмѣсто x — долженъ быть равенъ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по условію, многочленъ дѣлится на $x - a$ или $x + a$, то остатокъ въ обоихъ случаяхъ долженъ быть равенъ нулю; но этотъ остатокъ есть результатъ подстановки вмѣсто x буквы a или $(-a)$; стало быть, этотъ результатъ долженъ быть равенъ нулю.

Примѣры. I. Трехчленъ $x^2 - 2x + 1$ обращается въ 0, если вмѣсто x подставить 1; слѣд. онъ дѣлится на $x - 1$.

II Многочленъ $4ax^3 - 7a^2x^2 - 6a^3x + 9a^4$ обращается въ 0 при $x = a$, а потому онъ дѣлится на $x - a$.

III. Триномъ $x^2 + 5x + 6$ обращается въ 0 при $x = -3$, слѣд. онъ дѣлится на $x + 3$.

61 Законъ составленія частнаго отъ раздѣленія цѣлаго относительно буквы x полинома на биномъ $x - a$.

Легко вывести законъ, по которому составляется частное дѣленія многочлена

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 \text{ на } x - a.$$

Въ самомъ дѣлѣ, совершая дѣленіе, найдемъ:

$$\begin{array}{l|l}
A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 & x - a \\ \cline{2-2}
-A_m x^m + A_m a x^{m-1} & A_m x^{m-1} + \left.\begin{matrix} A_m a \\ + A_{m-1} \end{matrix}\right| x^{m-2} + \left.\begin{matrix} A_m a^2 \\ + A_{m-1}a \\ + A_{m-2} \end{matrix}\right| x^{m-3} + \ldots + Px^{k-1} + \left.\begin{matrix} Pa \\ + A_{k-1} \end{matrix}\right| x^{k-2} + \ldots \\
\quad \left.\begin{matrix} + A_m a \\ + A_{m-1} \end{matrix}\right| x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots & \\
\quad \begin{matrix} - A_m a \\ - A_{m-1} \end{matrix}\; x^{m-1} + \begin{matrix} A_m a^2 \\ + A_{m-1}a \end{matrix}\; x^{m-2} & \\
\qquad\qquad \left.\begin{matrix} A_m a^2 \\ + A_{m-1}a \\ + A_{m-2} \end{matrix}\right| x^{m-2} + A_{m-3}x^{m-3} + \ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad\qquad Px^k + A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots & \\
\qquad\qquad\quad -Px^k + Pax^{k-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \left.\begin{matrix} + Pa \\ + A_{k-1} \end{matrix}\right| x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots &
\end{array}$$

Найдя первые три члена частнаго, замѣчаемъ, что частное есть полиномъ степени $m-1$, при чемъ:

Коэффиціентъ перваго члена частнаго равенъ коэффиціенту 1-го члена дѣлимаго;

Коэффиціентъ 2-го члена частнаго равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на a, сложенному со вторымъ коэффиціентомъ дѣлимаго;

Коэффиціентъ третьяго члена частнаго равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на a, сложенному съ третьимъ коэффиціентомъ дѣлимаго.

Докажемъ, что этотъ законъ общій. Пусть, слѣдуя обыкновенному правилу дѣленія, мы нашли въ частномъ членъ Px^{k-1}. Онъ получился отъ раздѣленія перваго члена соотвѣтствующаго остатка на x; сл. первый членъ остатка есть Px^k, и потому весь остатокъ будетъ $Px^k + A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots$ Умножая членъ частнаго Px^{k-1} на дѣлителя и вычитая это произведеніе изъ сказаннаго остатка, въ новомъ остаткѣ получимъ

$$(Pa + A_{k-1})x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots$$

Раздѣливъ первый членъ этого остатка на x, находимъ слѣдующій членъ частнаго

$$(Pa + A_{k-1}) \,.\, x^{k-2}.$$

Коэффиціентъ его равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на a, сложенному съ коэффиціентомъ того же порядка дѣлимаго. Общность закона коэффиціентовъ такимъ образомъ доказана.

Если окажется, что дѣлимый полиномъ *неполный*, т.-е. въ немъ недостаетъ членовъ съ какими либо промежуточными степенями главной буквы, то для приложенія предыдущаго правила слѣдуетъ возстановить недостающіе члены, внося ихъ съ коэффиціентомъ 0.

62. Если дѣлитель будетъ $x + a$, то разсматривая его какъ $x - (-a)$, заключаемъ, что для нахожденія частнаго нужно только въ частное § 61 вмѣсто a подставить $(-a)$; сдѣлавъ это, найдемъ

$$\begin{array}{lll} A_m x^{m-1} & -A_m a & x^{m-2} + A_m a^2 \quad x^{m-3}\ \dots \\ & +A_{m-1} & \qquad -A_{m-1}a \\ & & \qquad +A_{m-2} \end{array}$$

62. Примѣры I. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$5x^4 - 23x^2 + 3x - 58 \text{ на } x - 2.$$

Дополняя данный полиномъ членомъ съ x^3, имѣемъ

$$5x^4 + 0\,.\,x^3 - 23x^2 + 3x - 58.$$

Коэфф. 1-го чл. частнаго 5 а 1-й чл. частнаго $5x^3$

» 2-го » » $= 5\,.\,2 + 0$ т.-е. $+10$ » 2-й » » $+10x^2$

» 3-го » » $+10\,.\,2 - 23$ т.-е. -3 » 3-й » » $= -3x$

» 4-го » » $=(-3)\,.\,2 + 3,$ -3 » 4-й » » $= -3$

Искомое частное, поэтому, $5x^3 + 10x^2 - 3x - 3$.

Остатокъ $R = 5\,.\,2^4 - 23\,.\,2^2 + 3\,.\,2 - 58 = 80 - 92 + 6 - 58 = -64.$

Итакъ: $\dfrac{5x^4 - 23x^2 + 3x - 58}{x - 2} = 5x^3 + 10x^2 - 3x - 3 + \dfrac{-64}{x - 2}$

II. Такимъ же образомъ найдемъ

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x + 1} = x^3 - 2x^2 + 2x - 2 + \frac{3}{x + 1}.$$

III. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$x^3 - 9x^2 + 2x - 1 \text{ на } 2x - 3.$$

Для приложенія нашего правила нужно дѣлимое расположить по степенямъ $2x$, разсматривая $2x$ какъ главную букву. Множа и дѣля первый членъ на 8, изображаемъ его въ видѣ $\frac{1}{8}(2x)^3$; множа и дѣля второй членъ на 4, пишемъ его въ видѣ $\frac{3}{4}(2x)^2$. Дѣлимое так. обр. будетъ

$$\frac{1}{8}(2x)^3 - \frac{3}{4}(2x)^2 + (2x) - 1.$$

Затѣмъ, прилагая правило, найдемъ

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{2x - 3} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} - \frac{\frac{11}{8}}{2x - 3}.$$

63. Обобщеніе теоремы § 58 Способомъ, указаннымъ въ § 58, докажемъ, что *остатокъ отъ раздѣленія цѣлаго по буквѣ x полинома на биномъ вида $px \pm q$ есть результатъ подстановки въ этотъ полиномъ такого значенія x, при которомъ биномъ $px \pm q$ обращается въ ноль.*

Разсмотримъ, наприм., случай дѣленія на $px - q$, и пусть частное будетъ Q, а остатокъ, который не будетъ содержать буквы x, пусть будетъ R; имѣемъ

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots + A_0 = (px - q)\,.\,Q + R,$$

Дадимъ x-у значеніе $\frac{q}{p}$, при которомъ $px - q$ обращается въ ноль; при этомъ R, какъ не содержащій буквы x, останется безъ измѣненія, и получимъ

$$A_m\left(\frac{q}{p}\right)^m + A_{m-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{m-1} + \dots + A_0 = R,$$

[illegible] теорема и доказывается. Подобнымъ же образомъ докажемъ теорему и для случая, когда дѣлителемъ будетъ $px - q$.

Слѣдствія. — Отсюда непосредственно вытекаетъ: 1) если полиномъ обращается въ нуль по замѣнѣ въ немъ буквы x количествомъ $\frac{q}{p}$, то онъ дѣлится на $px - q$; и 2) если полиномъ дѣлится на $px + q$, то результатъ подстановки въ него количества $-\frac{q}{p}$ вмѣсто x равенъ нулю.

64. Теорема III. — *Для того чтобы цѣлый относительно x полиномъ дѣлился на $x - a$ или на $x + a$, необходимо, чтобы низшій* (свободный) *членъ его дѣлился на a.*

Въ самомъ дѣлѣ, если полиномъ P дѣлится, наприм., на $x - a$, то

$$P = (x - a) \,.\, Q,$$

гдѣ Q — цѣлый относительно x полиномъ; изъ этого равенства слѣдуетъ, что низшій членъ полинома P, какъ произведенія, равенъ произведенію a на низшій членъ частнаго Q, а слѣд. долженъ дѣлиться на a.

65. Теорема IV. — *Если полиномъ P, цѣлый относительно x, дѣлится на каждый изъ биномовъ $x - a$, $x - b$, $x - c$, гдѣ a, b и c неравны между собою, то онъ дѣлится и на ихъ произведеніе.*

По условію, полиномъ P дѣлится на $x - a$; пусть частное будетъ Q, гдѣ Q есть также цѣлый относительно x полиномъ; въ такомъ случаѣ

$$P = (x - a) \,.\, Q \;.\;.\;.\; (1).$$

Но полиномъ P, по условію, дѣлится и на $x - b$, слѣдов. при $x = b$ онъ обращается въ нуль. Итакъ, если въ предыдущее равенство вмѣсто x подставимъ b, то первая часть его обратится въ нуль; слѣдов. и вторая, при подстановкѣ въ нее b вмѣсто x, должна обратиться въ нуль, т.-е. должно быть

$$(b - a) \,.\, Q_b = 0,$$

гдѣ Q_b означаетъ выраженіе Q, въ которомъ x замѣненъ буквою b. Мы имѣемъ произведеніе двухъ множителей: $b - a$ и Q_b, равное 0; для этого необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ былъ нулемъ. Но множитель $b - a$ не есть 0, ибо, по условію, b неравно a; слѣд. Q_b должно быть нулемъ. Итакъ, Q обращается въ нуль при $x = b$, слѣд. оно дѣлится на $x - b$. Означивъ частное этого дѣленія черезъ Q', гдѣ Q' есть цѣлый относит. x полиномъ, имѣемъ

$$Q = (x - b) \,.\, Q' \;.\;.\;.\; (2).$$

Вставляя вмѣсто Q его величину въ равенство (1), получаемъ

$$P = (x - a)(x - b)\, Q' \;.\;.\;.\; (3).$$

По условію, P дѣлится на $x - c$, слѣд. полиномъ P, при $x = c$, обращается въ нуль; поэтому и вторая часть равенства (3), при $x = c$, должна обращаться въ нуль, т.-е. должно быть:

$$(c - a)(c - b)\, Q'_c = 0.$$

[illegible] значеніе полинома Q' при $x = c$. Но разности $c - a$ и $c - b$ неравны нулю, по условію, a, b и c различны, слѣдов. чтобы произведеніе было нулемъ, нужно чтобы было $Q'_c = 0$. Это значитъ, что Q' дѣлится на $x - c$; обозначивъ частное этого дѣленія черезъ Q'', имѣемъ

$$Q' = (x - c) . Q''.$$

Внося величину Q' въ равенство (3), получаемъ

$$P = (x - a)(x - b)(x - c) . Q''.$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Примѣръ. Доказать, что полиномъ

$$x^2y^r + y^2z^r + z^2x^r - x^ry^2 - y^rz^2 - z^rx^2$$

дѣлится на произведеніе $(x - y)(x - z)(y - z)$.

Подставляя въ данный полиномъ y вмѣсто x, находимъ, что онъ обращается въ 0; слѣдоват. онъ дѣлится на $x - y$. Такимъ же образомъ убѣждаемся, что какъ при $x = z$, такъ и при $y = z$, полиномъ обращается въ 0; слѣдов. дѣлится какъ на $x - z$, такъ и на $y - z$. Дѣлясь на каждый изъ биномовъ $x - y$, $x - z$, $y - z$ въ отдѣльности, онъ, въ силу теоремы IV, дѣлится и на ихъ произведеніе.

66. Предыдущія теоремы служатъ для нахожденія цѣлыхъ дѣлителей вида $x - a$ нѣкотораго даннаго цѣлаго относительно x полинома. При помощи теоремы III можно опредѣлить, какіе цѣлые биномы этого вида *могутъ быть* дѣлителями, а при помощи теоремы II, слѣдствіе I, опредѣляемъ тѣ изъ нихъ, которые въ самомъ дѣлѣ служатъ дѣлителями даннаго полинома.

Очевидно, что число дѣлителей полинома не можетъ превышать его степени; иначе, въ силу теоремы IV, онъ долженъ бы былъ дѣлиться на полиномъ, котораго степень выше его собственной, а это невозможно.

Приводимъ примѣры.

1. Найти всѣхъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей полинома

$$x^4 - 17x^3 + 98x^2 - 232x + 192,$$

если таковые имѣются.

Находимъ дѣлителей числа 192; это будутъ числа 2, 3, 4, 6, 8 и т. д. По теоремѣ третьей, искомые дѣлители, если только они существуютъ, будутъ вида $x \pm 2$, $x + 3$, $x + 4$, $x + 6$, . . .

Подставляя въ данный полиномъ вмѣсто x число 2, легко убѣдимся, что полиномъ обращается въ ноль; стало быть онъ дѣлится на $x - 2$.

Подставляя вмѣсто x число -2, убѣдимся, что полиномъ не обращается въ ноль; слѣд. $x + 2$ не есть его дѣлитель.

Подставляя вмѣсто x число 3, убѣдимся, что полиномъ обращается въ ноль; слѣд. дѣлится на $x - 3$.

Подставивъ вмѣсто x число -3, замѣтимъ, что полиномъ не обращается въ ноль; слѣд. не дѣлится на $x + 3$.

Продолжая такимъ же образомъ, найдемъ, что данный полиномъ имѣетъ дѣлителями $x - 4$ и $x - 8$.

Мы уже нашли четыре дѣлителя: $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$, $x - 8$; другихъ цѣлыхъ дѣлителей не можетъ быть, такъ какъ данный полиномъ — четвертой степени.

II. Найти цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей полинома

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc,$$

если таковые существуютъ.

Въ силу теоремы III, искомыми дѣлителями могутъ быть только

$$x-a,\ x-b,\ x-c;\ x+a,\ x+b,\ x+c.$$

Но при $x=a$ полиномъ обращается въ

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+ac+bc)a-abc,$$

что, какъ легко видѣть, приводится къ нулю. Слѣдоват. $x-a$ есть искомый дѣлитель.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что $x-b$ и $x-c$ также суть дѣлители даннаго полинома.

Нашъ полиномъ — третьей степени; мы нашли трехъ дѣлителей; другихъ не может быть; слѣд. задача рѣшена.

67. Такимъ же образомъ, какъ мы доказали теорему IV, докажемъ, что если полиномъ дѣлится въ отдѣльности на каждый изъ биномовъ $px+q$, $p'x+q'$, $p''x+q''$, при условіи, что значенія x: $-\frac{q}{p}, -\frac{q'}{p'}, -\frac{q''}{p''}$, при которыхъ эти дѣлители обращаются въ ноль, всѣ различны, то онъ дѣлится и на ихъ произведеніе.

68. Слѣдствія теоремы IV.

I. Если полиномъ P, цѣлый относительно x, m-й степени:

$$A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+\ .\ \ .\ \ .+A_1x+A_0$$

обращается въ ноль при m различныхъ значеніяхъ буквы x : a, b, c, . . . h, i, k, то онъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$A_m(x-a)(x-b)(x-c)\ .\ \ .\ \ .\ (x-i)(x-k).$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть полиномъ четвертой степени

$$P=A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$$

обращается въ ноль при четырехъ различныхъ значеніяхъ x: a, b, c и d. Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ IV, онъ дѣлится на произведеніе

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

которое само четвертой степени; стало быть частное не содержитъ x и есть нѣкоторое число; пусть это число будетъ A. Данный полиномъ равенъ произведенію $A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Если выполнить умноженіе и расположить члены по убывающимъ степенямъ x, то полученный многочленъ долженъ быть тождественъ заданному, т.-е. состоять изъ совершенно такихъ же членовъ. А потому и высшіе члены обоихъ должны быть равны, т.-е. $A_4x^4=Ax^4$, откуда $A=A_4$: теорема доказана, и

$$P=A_4(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

II. *Опредѣленіе.* Если цѣлый относительно x полиномъ обращается въ ноль при всякомъ значеніи x, то говорятъ, что онъ *тождественно равенъ нулю.*

Докажемъ, что если цѣлый относительно x полиномъ m-ой степени, обращается въ ноль при нѣсколькихъ значеніяхъ x, число которыхъ превышаетъ m, то онъ тождественно равенъ нулю (т.-е. равенъ нулю при всякомъ x).

Пусть, наприм., полиномъ

$$P = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

обращается въ ноль при пяти различныхъ значеніяхъ x: a, b, c, d, e. Мы доказали, что если полиномъ P обращается въ ноль при четырехъ значеніяхъ x: a, b, c и d, то онъ беретъ видъ

$$P = A_4(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ . \ . \ . \ (1).$$

Но, по условію, P обращается въ ноль также и при $x = e$; слѣдов.

$$A_4(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 0;$$

но какъ множители $e - a$, $e - b$, . . . отличны отъ нуля, то чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо, чтобы A_4 равнялось нулю. Но если $A_4 = 0$, то изъ (1) видно, что каково бы ни было x, всегда будетъ $P = 0$.

Итакъ, P равно 0 при всякомъ x, т.-е. тождественно равняется нулю.

69. Теорема V. *Если цѣлый относительно x полиномъ $f(x)$ дѣлится въ отдѣльности на $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, $(x-c)^\gamma$, . . . гдѣ a, b, c . . . неравныя между собою числа, то онъ дѣлится и на произведеніе*

$$(x-a)^\alpha \,.\, (x-b)^\beta \,.\, (x-c)^\gamma.$$

Пусть $f(x) = (x-a)^\alpha \,.\, \varphi(x)$ и $f(x) = (x-b)^\beta \,.\, \psi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ частныя отъ раздѣленія $f(x)$ на $(x-a)^\alpha$ и $(x-b)^\beta$. Имѣемъ

$$(x-a)^\alpha\varphi(x) = (x-b)^\beta\psi(x) \ . \ . \ . \ (1).$$

Замѣнивъ въ этомъ тождествѣ x буквою b, получимъ

$$(b-a)^\alpha\varphi(b) = 0$$

и какъ $b - a$, по условію, не есть 0, то должно быть $\varphi(b) = 0$; другими словами, результатъ подстановки буквы b вмѣсто x въ $\varphi(x)$, обращаетъ эту функцію въ 0, слѣд. $\varphi(x)$ дѣлится на нѣкоторую степень β' разности $(x - b)$, такъ что должно быть

$$\varphi(x) = (x-b)^{\beta'} \,.\, \varphi_1(x), \ . \ . \ .$$

съ условіемъ $\varphi_1(b) \neq 0$. Докажемъ, что $\beta' = \beta$. Для этого подставимъ въ тождество (1) $(x-b)^{\beta'}\varphi_1(x)$ вмѣсто $\varphi(x)$; найдемъ

$$(x-a)^\alpha(x-b)^{\beta'}\varphi_1(x) = (x-b)^\beta\psi(x).$$

Если бы было $\beta' < \beta$, то обѣ части можно бы было раздѣлить на $(x-b)^{\beta'}$, и положивъ въ частныхъ $x = b$, нашли бы

$$(b-a)^\alpha\varphi_1(b) = 0,$$

но это невозможно, такъ какъ ни $(b-a)^\alpha$, ни $\varphi_1(b)$ не равны нулю. Заключаемъ, что нельзя допустить, чтобы β' было меньше β. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что β' не можетъ быть и больше β. Слѣдовательно $\beta' = \beta$, и потому

$$\varphi(x) = (x - b)^{\beta} \varphi_1(x),$$

и слѣдовательно

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \varphi_1(x).$$

Продолжая подобныя же разсужденія, докажемъ, что $\varphi_1(x)$ дѣлится на $(x - c)$, а слѣд. $f(x)$ на $(x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} (x - c)^{\gamma}$ и т. д. Теорема доказана.

70. Теорема VI. *Чтобы цѣлый относительно x полиномъ тождественно (т.-е. при всякомъ значеніи x) равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы всѣ коэффиціенты его равнялись нулю.*

Пусть данный полиномъ будетъ

$$P = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Такъ какъ этотъ полиномъ долженъ быть равенъ нулю при всякомъ x; стало быть, въ частности, онъ долженъ быть равенъ нулю и при $x = 0$. Но при $x = 0$ всѣ члены, содержащіе x, обращаются въ 0, слѣд. равенство

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \ . \ . \ . \ (I)$$

обращается въ

$$E = 0 \ . \ . \ . \ (II).$$

Откинувъ въ равенствѣ (I) E, какъ количество, равное 0, а въ остальныхъ членахъ вынеся за скобки x, получимъ равенство

$$P = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

Для того, чтобы P равнялось 0 при всякомъ x, необходимо, чтобы одинъ изъ его сомножителей всегда равнялся нулю; но x равняется нулю не всегда, а только при $x = 0$, слѣдовательно, необходимо, чтобы второй множитель всегда равнялся нулю. Такъ какъ $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ долженъ быть равенъ 0 при всякихъ значеніяхъ x, то онъ долженъ быть нулемъ и при $x = 0$. Но положивъ въ немъ $x = 0$, обратимъ его въ D, а равенство $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ въ

$$D = 0 \ . \ . \ . \ (III).$$

Откинувъ въ полиномѣ P члены Dx и E, какъ равные 0, а въ остальныхъ вынеся за скобки x^2, получимъ произведеніе

$$P = x^2(Ax^2 + Bx + C),$$

которое должно быть равно 0 при всякомъ x. Отсюда, подобно предыдущему, докажемъ, что

$$C = 0 \ . \ . \ . \ (IV)$$

и т. д. Такимъ образомъ всѣ коэффиціенты полинома P должны быть равны 0. Доказали, что это условіе необходимо. Но оно и достаточно, потому что если всѣ коэффиціенты равны 0, то и полиномъ P равенъ нулю.

71. Теорема VII. *Если два цѣлые относительно x полинома остаются равными при всякомъ значеніи x, то они тождественны.*

Пусть полиномы

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$
$$\text{и } ax^3 + bx^2 + dx + e$$

имѣютъ одинаковую численную величину при всякомъ x; тогда ихъ разность будетъ тождественно равна нулю. Но эта разность есть

$$Ax^5 + Bx^4 + (C - a)x^3 + (D - b)x^2 + (E - d)x + (F - e);$$

слѣд., по теоремѣ V, имѣемъ:

$$A = 0;\ B = 0;\ C = a;\ D = b;\ E = d;\ F = e;$$

Изъ того, что $A = 0$ и $B = 0$, заключаемъ, что члены Ax^5 и Bx^4 исчезаютъ, такъ что число членовъ въ обоихъ полиномахъ одинаково; а какъ $C = a$, $D = b$, $E = d$ и $F = e$, то коэффиценты при одинаковыхъ степеняхъ x равны. Оба полинома ничѣмъ не отличаются одинъ отъ другого, или, что тоже, тождественны.

Примѣчаніе. Теоремы VI и VII служатъ основаніемъ *способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ*, имѣющаго многочисленнѣйшія и разнообразнѣйшія приложенія въ алгебрѣ. Изобрѣтеніе этого способа приписываютъ знаменитому французскому математику и философу Декарту (Cartesius).

Различныя приложенія предыдущихъ теоремъ.

72 *Приложеніе I.*—Выведемъ условія дѣлимости суммы или разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на сумму или разность основаніи.

1. Пусть требуется раздѣлить $x^m - a^m$ на $x - a$. Подставивъ въ дѣлимое букву a вмѣсто x, найдемъ окончательный остатокъ; онъ будетъ $= a^m - a^m$ или 0, откуда заключаемъ, что дѣленіе совершается безъ остатка.

Для нахожденія частнаго представляемъ дѣлимое въ видѣ полнаго многочлена m-ой степени;

$$x^m + 0 \,.\, x^{m-1} + 0 \,.\, x^{m-2} + \,.\;.\;.\; + 0 \,.\, x - a^m.$$

По правилу § 61, высшій членъ частнаго равенъ x^{m-1}. Второй членъ частнаго содержитъ x^{m-2}; а коэффиціентъ его найдемъ, помноживъ коэффиціентъ перваго члена частнаго на a, что дастъ a, и придавъ сюда второй коэфф. дѣлимаго т.-е. 0; итакъ, второй членъ частнаго $= ax^{m-2}$. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \,.\;.\;. + a^{m-1} \;.\;.\;.\; (1).$$

2. Раздѣлить $x^m + a^m$ на $x - a$ Подставляя въ дѣлимое вмѣсто x букву a, найдемъ окончательный остатокъ $a^m + a^m = 2a^m$. Отсюда заключаемъ, что дѣленіе не совершается безъ остатка Составляя частное по предыдущему, получимъ

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \,.\;.\;. + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a} \;.\;.\;\; (2).$$

3. Раздѣлить $x^m - a^m$ на $x + a$ Подставивъ въ дѣлимое вмѣсто x коли-

чество $(-a)$, найдемъ окончат. остатокъ. Онъ будетъ: α) при m четномъ равенъ $(-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0$. Частное же будетъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-2}x - a^{m-1} \;\ldots (3).$$

β) при m нечетномъ остатокъ $= (-a)^m - a^m = -a^m - a^m = -2a^m$; частное же

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x + a} \;\ldots (4).$$

4. Раздѣлить $x^m + a^m$ на $x + a$. Подставляя въ дѣлимое вмѣсто x букву $(-a)$, найдемъ окончательный остатокъ. Онъ будетъ: α) при m четномъ: $(-a)^m + a^m = a^m + a^m = 2a^m$, такъ что

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-2}x - a^{m-1} + \frac{2a^m}{x + a} \;\ldots (5).$$

β) при m нечетномъ $(-a)^m + a^m = -a^m + a^m = 0$; слѣдов. дѣленіе совершается безъ остатка и частное

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-1} \;\ldots (6).$$

Отсюда заключаемъ, что 1) $x^m - a^m$ всегда дѣлится на $x - a$; 2) $x^m - a^m$ дѣлится на $x + a$, если m четное; 3) $x^m + a^m$ никогда не дѣлится на $x - a$, но дѣлится на $x + a$ при m нечетномъ. Такимъ образомъ нашли тѣ же выводы, какіе получили раньше непосредственнымъ дѣленіемъ. Новый пріемъ далъ тѣ же результаты быстрѣе.

73. *Приложеніе II.*—Мы видѣли, что $x^m - a^m$ всегда дѣлится на $x - a$; но при m четномъ дѣлится еще на $x + a$. Слѣдовательно, когда m четное, $x^m - a^m$, дѣлясь на биномы $x + a$ и $x - a$, дѣлится, по теоремѣ IV, и на ихъ произведеніе $(x - a)(x + a)$, т.-е на $x^2 - a^2$. Итакъ: разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность квадратовъ тѣхъ же количествъ. Частное будетъ

$$\frac{x^m - a^m}{x^2 - a^2} = x^{m-2} + a^2x^{m-4} + a^4x^{m-6} + \ldots + a^{m-4}x^2 + a^{m-2}.$$

74. *Приложеніе III.* — 1. При какомъ численномъ значеніи K полиномъ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + K$$

дѣлится безъ остатка на $x - 3$?

Чтобы полиномъ дѣлился на $x - 3$, нужно, чтобы результатъ подстановки въ него 3 вмѣсто x обращался въ нуль, т.-е. чтобы

$$3^3 - 3 \,.\, 3^2 + 5 \,.\, 3 + K = 0, \text{ или } 15 + K = 0.$$

Послѣднее равенство возможно только при $K = -15$.

2. При какомъ значеніи K полиномъ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + K$$

дѣлится на $x + 3$?

Нужно, чтобы результатъ подстановки въ этотъ полиномъ числа (— 3) вмѣсто x былъ равенъ нулю, т.-е. чтобы

$$(-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + K = 0, \text{ или } -69 + K = 0;$$

а это возможно только при $K = 69$.

3. При какомъ значенiи K полиномъ

$$x^3 - 3x^2 + 5x + K$$

раздѣлится на $3x - 2$?

На осн. § 63, Слѣдств., заключаемъ, что необходимо, чтобы результатъ подстановки въ данный полиномъ числа $\frac{2}{3}$ вмѣсто x былъ нулемъ, т.-е. чтобы

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{2}{3} + K = 0, \text{ или } \frac{62}{27} + K = 0,$$

а это возможно только при $K = -\frac{62}{27}$.

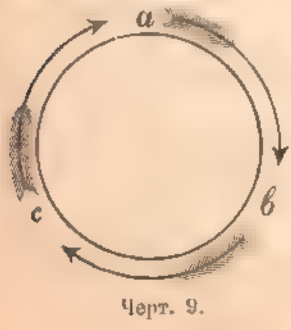
75 *Приложенiе IV.*—Теорема IV, § 65 можетъ быть примѣнена къ разложенiю многочленовъ на множители. Методъ разложенiя, на ней основанный, называется *методомъ двучленныхъ дѣлителей* и состоитъ въ слѣдующемъ. Расположивъ многочленъ по степенямъ какой-либо буквы, x напримѣръ, стараются открыть двучленныхъ дѣлителей $x - a$, $x - b$, . . . , $x - k$; составляютъ изъ нихъ произведенiе $(x - a)(x - b) \ldots (x - k)$; дѣлятъ на него данный полиномъ P, и если въ частномъ получается выраженiе Q, то

$$P = (x - a)(x - b) \ldots (x - k) \cdot Q.$$

Разложенiе такимъ образомъ будетъ совершено.

Впрочемъ, слѣдуетъ замѣтить, что этотъ методъ не такъ удобенъ въ практическомъ отношенiи, какъ выше указанные методы разложенiя; потому что въ случаѣ большого числа возможныхъ дѣлителей придется дѣлать слишкомъ много вычисленiй, чтобы выбрать тѣ изъ нихъ, которые дѣйствительно служатъ дѣлителями даннаго полинома. Поэтому онъ употребляется лишь въ рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ; такъ, наприм., онъ весьма удобенъ для разложенiя *симметричныхъ* выраженiй.

Круговая перестановка. — Разсмотримъ выраженiе $bc + ca + ab$; членъ, несодержащiй буквы a, поставленъ на первомъ мѣстѣ, а остальные члены можно получить послѣдовательно ***круговою перестановкою буквъ***, т.-е. перемѣною a на b, b на c и c на a *). Такое же расположенiе буквъ легко видѣть и въ выраженiи $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$, въ самомъ дѣлѣ, изъ $a^2(b - c)$



Черт. 9.

---

*) Если a, b и c поставить на окружности круга (черт. 9) и, выходя отъ нѣкоторой буквы, a, двигаться по окружности круга въ направленiи, указанномъ стрѣлкой, то мы будемъ слѣдовать въ циклическомъ порядкѣ abc, bca, cab. Слѣдованiе этому порядку важно въ задачахъ, гдѣ имѣютъ дѣло съ разностями трехъ буквъ. Такъ, когда мы пишемъ $b - c$, $c - a$, $a - b$, мы слѣдуемъ циклическому порядку; но нарушаемъ этотъ порядокъ, когда пишемъ $b - c$, $a - c$, $a - b$ или $a - c$, $b - a$, $b - c$. Если съ самаго начала слѣдовать циклическому порядку, то вычисленiя сокращаются и дѣлаются легче.

круговою перестановкою получаемъ $b^2(c-a)$, а отсюда снова круговою перестановкою выводимъ $c^2(a-b)$. Тоже самое замѣчаемъ въ выраженіи

$$(y-z)(z-x)(x-y).$$

Симметричныя выраженія.—Выраженіе, которое не измѣняется отъ перестановки какой угодно пары буквъ, въ него входящихъ, одной на мѣсто другой, называется *симметричнымъ* выраженіемъ. Такъ, выраженія $a+b$, ab, a^2+b^2, a^2-ab+b^2, a^n+b^n суть симметричныя выраженія изъ двухъ буквъ. $a+b+c$, $bc+ca+ab$, $a^3+b^3+c^3-3abc$ симметричныя выраженія изъ трехъ буквъ; потому что, наприм., $ab=ba$, $a^2+b^2=b^2+a^2$; $a+b+c=a+c+b=c+a+b$ . . . Но $a-b$, $\frac{a}{b}$, x^y, очевидно, несимметричны, ибо, наприм., $a-b$ неравно $b-a$, и т. д. Замѣтимъ, что единственная симметричная функція первой степени относительно a, b, c есть $M(a+b+c)$, гдѣ M — числовой коэффиціентъ.

Выраженія, которыя остаются безъ измѣненія величины при круговой перестановкѣ входящихъ въ нихъ буквъ, называются *циклически-симметричными*. Таково, наприм., выраженіе $(b-c)(c-a)(a-b)$, ибо величина его не измѣняется, если на мѣсто a поставить b, c на мѣсто b, и a на мѣсто c.

Очевидно, произведеніе, или частное двухъ симметричныхъ выраженій симметрично; ибо если ни то, ни другое не измѣняется при перестановкѣ двухъ буквъ одной на мѣсто другой, то и произведеніе, и частное останутся безъ измѣненія при такой перестановкѣ.

Ясно также, что произведеніе, или частное двухъ циклически-симметричныхъ выраженій суть также выраженія циклически-симметричныя.

Послѣ этихъ предварительныхъ указаній переходимъ къ примѣрамъ.

Примѣръ I. Разложить на множители

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\ .\ .\ .\ (1).$$

Положивъ въ этомъ выраженіи $b=c$, убѣдимся, что оно обращается въ нуль; слѣдов. $b-c$ есть множитель этого выраженія. Такимъ же точно образомъ докажемъ, что и $c-a$, и $a-b$ суть множители даннаго выраженія. Слѣдовательно, оно содержитъ множитель $(b-c)(c-a)(a-b)$.

Но данное выраженіе есть выраженіе *четвертой* степени, слѣдоват., кромѣ трехъ найденныхъ множителей, оно должно содержать еще одного множителя *первой* степени. Кромѣ того, этотъ множитель долженъ быть *симметричнымъ* выраженіемъ относительно буквъ a, b и c. Заключаемъ, что этотъ множитель долженъ быть $=a+b+c$.

Итакъ, данное выраженіе должно быть

$$L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)\ .\ .\ .\ (2),$$

гдѣ L есть нѣкоторое *число*, остающееся безъ всякаго измѣненія, каковы бы ни были значенія a, b и c.

Чтобы найти L, замѣтимъ, что (1) и (2) тождественны, а слѣдов. коэффиціенты, наприм., при a^3, должны быть равны. Въ (1) этотъ коэффиціентъ есть $b-c$; во (2) онъ есть $-L(b-c)$; слѣдов. $L=-1$; а потому выраженіе (1) разлагается въ формѣ

$$-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

Для нахожденія L можно еще дать частныя значенія буквамъ a, b и c. Положивъ, наприм., $a=0$, $b=1$, $c=2$; (1) обратится въ -6, а (2) въ 6L; слѣдов. $6L=-6$, откуда $L=-1$.

Примѣръ II. Разложить $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$

Убѣждаемся, что данное выраженіе обращается въ 0 при $y=z$, слѣдоват. $y-z$ есть множитель даннаго выраженія. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что множителями его будутъ $z-x$ и $x-y$. А какъ данное выраженіе есть выраженіе 5-й степени и циклически-симметрично, то оно должно быть =

$$(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}\;.\;\;.\;(1)$$

гдѣ въ фигурныхъ скобкахъ написана самая общая форма циклически-симметричнаго выраженія второй степени.

Для опредѣленія L, безъ труда найдемъ, что коэффиціентъ при x^4y въ данномъ выраженіи есть -5, а въ (1) это будетъ $-L$, слѣдов. $L=5$.

Для нахожденія M, полагаемъ $x=0$, $y=1$, $z=2$, и сравниваемъ данное выраженіе со (2); найдемъ

$$-1+32-1=(-1).2.(-1)[5.5+2M],$$

откуда $M=-5$. Искомое разложеніе будетъ

$$5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

Примѣръ III. Разложить на множители

$$a(b-c)^5+b(c-a)^5+c(a-b)^5.$$

Легко убѣдиться, что $b-c$, $c-a$, $a-b$ служатъ множителями. Слѣдоват. данное выраженіе, будучи симметричнымъ выраженіемъ 6 степени,

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+$$
$$M[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]+Nabc\}\;.\;\;.\;\;.\;(1).$$

Остается опредѣлить числовые коэффиціенты L, M и N.

Коэффиціентъ при a^5b въ данномъ выраженіи равенъ -1, а въ (1) равенъ $-L$; слѣдов. $L=1$.

Коэффиціенты при a^4b^2 въ данномъ выраженіи 0, а во (2) есть $L-M$; слѣдов. $L-M=0$, $L=M=1$.

Чтобы найти N, положимъ $a=1$, $b=2$, $c=3$; сравнивая данное съ (1), находимъ

$$-1+64-3=2(1+8+27+5+16+27+6N),$$

откуда $N=-9$. Итакъ, данное выраженіе =

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+$$
$$+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-9abc\}.$$

Примѣръ IV. Разложить полиномъ

$$P=a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c)-a^2b^2d^2(a-b)(a-d)(b-d)$$
$$+a^2c^2d^2(a-c)(a-d)(c-d)-b^2c^2d^2(b-c)(b-d)(c-d).$$

Легко убѣдиться, что полиномъ P обращается въ ноль при $a=b$, $a=c$, $a=d$, $b=c$ и т. д.; потому онъ дѣлится на $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$ и т. д. Попытаемся выдѣлить этихъ множителей. Вынося изъ первыхъ двухъ членовъ $a^2b^2(a-b)$, а изъ двухъ другихъ $c^2d^2(c-d)$, получимъ:

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2(a-b)\{c^2(a-c)(b-c)-d^2(a-d)(b-d)\} \\ &\quad + c^2d^2(c-d)\{a^2(a-c)(a-d)-b^2(b-c)(b-d)\}. \end{aligned}$$

Располагая первый членъ въ первыхъ фигурныхъ скобкахъ по убывающимъ степенямъ c, а второй по убывающимъ степенямъ буквы d; затѣмъ, первый членъ во вторыхъ фигурныхъ скобкахъ по убывающимъ степенямъ буквы a, а второй—буквы b, имѣемъ:

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2(a-b)\{c^4-c^3(a+b)+c^2ab-d^4+d^3(a+b)-d^2ab\} \\ &\quad + c^2d^2(c-d)\{a^4-a^3(c+d)+a^2cd-b^4+b^3(c+d)-b^2cd\} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2(a-b)\{c^4-d^4-(c^3-d^3)(a+b)+(c^2-d^2)ab\} \\ &\quad + c^2d^2(c-d)\{a^4-b^4-(a^3-b^3)(c+d)+(a^2-b^2)cd\} \end{aligned}$$

Теперь видно, что въ первыхъ фигурныхъ скобкахъ имѣется множитель $c-d$, а во вторыхъ $a-b$; вынося ихъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2(a-b)(c-d)\{(c^2+d^2)(c+d)-(c^2+cd+d^2)(a+b)+ab(c+d)\} \\ &\quad + c^2d^2(c-d)(a-b)\{(a^2+b^2)(a+b)-(a^2+ab+b^2)(c+d)+cd(a+b)\} \end{aligned}$$

Вынося теперь за скобки $(a-b)(c-d)$, и означивъ третій множитель буквою P', положимъ

$$P=(a-b)(c-d)\,.\,P';$$

гдѣ

$$\begin{aligned} P' &= a^2b^2\{(c^2+d^2)(c+d)-(c^2+cd+d^2)(a+b)+ab(c+d)\} \\ &\quad + c^2d^2\{(a^2+b^2)(a+b)-(a^2+ab+b^2)(c+d)+cd(a+b)\} \\ &= a^2b^2\{(c^2+d^2)(c-a)+d(c^2+d^2)-b(c^2+d^2)-cd(a+b)+ab(c+d)\} \\ &\quad + c^2d^2\{(a^2+b^2)(a-c)+b(a^2+b^2)-d(a^2+b^2)-ab(c+d)+cd(a+b)\} \\ &= a^2b^2\{(a-c)(bc+bd-c^2-d^2-cd)+d^2(d-b)\} \\ &\quad + c^2d^2\{(a-c)(a^2+ab+b^2-ad-bd)-b^2(d-b)\} \\ &= (a-c)\{a^2b^2(bc+bd-c^2-d^2-cd)+c^2d^2(a^2+ab+b^2-ad-bd)\} \\ &\quad + b^2d^2(d-b)(a^2-c^2). \end{aligned}$$

Вынося $a-c$, положимъ

$$P'=(a-c)P'',$$

гдѣ

$$\begin{aligned} P'' &= a^2b^2\{c(b-c)+d(b-c)\}-a^2b^2d^2+c^2d^2a^2+c^2d^2\{a(b-d)+b(b-d)\} \\ &\qquad\qquad + b^2d^2(d-b)(a+c) \\ &= a^2b^2(b-c)(c+d)-a^2d^2(b^2-c^2)+c^2d^2(b-d)(a+b)+b^2d^2(d-b)(a+c) \\ &= a^2(b-c)\{b^2(c+d)-d^2(b+c)\}+d^2(b-d)\{c^2(a+b)-b^2(a+c)\} \\ &= a^2(b-c)\{c(b^2-d^2)+bd(b-d)\}+d^2(b-d)\{a(c^2-b^2)+bc(c-b)\}. \end{aligned}$$

Здѣсь мы можемъ вынести за скобки $(b-c)(b-d)$; полагаемъ

$$P''=(b-c)(b-d)P''',$$

гдѣ

$$\begin{aligned} P''' &= a^2\{c(b+d)+bd\}-d^2\{a(b+c)+bc\} \\ &= bc(a^2-d^2)+acd(a-d)+abd(a-d)=(a-d)(abc+abd+acd+bcd). \end{aligned}$$

Итакъ, окончательно

$$P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(abc+abd+acd+bcd).$$

76. *Приложеніе V.* При какихъ значеніяхъ буквъ a и b полиномъ $x^3 + 8x^2 + 5x - a$ дѣлится безъ остатка на $x^2 + 3x - b$?

Вопросъ можно рѣшить двоякимъ путемъ.

1-й методъ. Онъ состоитъ въ томъ, что совершаютъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе, доводя его до остатка, степень котораго была бы ниже степени дѣлителя, затѣмъ выражаютъ, что остатокъ долженъ быть *тождественно равенъ нулю.*

Выполняемъ дѣленіе:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 8x^2 + 5x - a & x^2 + 3x - b \\
\cline{2-2}
-x^3 \mp 3x^2 \pm bx & x + 5 \\
\qquad\quad 5x^2 \begin{matrix}+5\\+b\end{matrix} x - a & \\
\quad -5x^2 \mp 15x \pm 5b & \\
\qquad\qquad \begin{matrix}b\\-10\end{matrix} x \begin{matrix}-a\\+5b\end{matrix} &
\end{array}$$

Чтобы дѣленіе совершалось безъ остатка, остатокъ долженъ быть тождественно равенъ нулю; а для этого, по теоремѣ VI, § 70, необходимо и достаточно, чтобы

$$b - 10 = 0\ .\ .\ .\ (1) \text{ и } 5b - a = 0\ .\ .\ .\ (2).$$

Равенство (1) возможно только при $b = 10$.

Подставляя 10 вмѣсто b въ равенство (2), имѣемъ

$$50 - a = 0,$$

что возможно только при $a = 50$.

Итакъ, искомыя значенія a и b суть: $a = 50$, $b = 10$.

Не трудно провѣрить, что $x^3 + 8x^2 + 5x - 50$ дѣлится безъ остатка на $x^2 + 3x - 10$.

2-й методъ (неопредѣленныхъ коэффиціентовъ). Выражаютъ, что дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлый полиномъ, котораго степень равна разности степеней дѣлимаго и дѣлителя, ибо такова должна быть степень частнаго.

Такимъ образомъ пишемъ:

$$x^3 + 8x^2 + 5x - a = (x^2 + 3x - b)(px + q),$$

такъ какъ общій видъ цѣлаго полинома первой степени есть $px + q$.

Располагая вторую часть по степенямъ x, имѣемъ тождество

$$x^3 + 8x^2 + 5x - a = p\,.\,x^3 + \left.\begin{matrix}3p\\+q\end{matrix}\right| x^2 \begin{matrix}-bp\\+3q\end{matrix} x - bq.$$

Отсюда, по теор. VII, § 71, приравнивая между собою коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ буквы x, имѣемъ четыре условія для опредѣленія a, b, p и q; а именно:

$$p = 1; \qquad 3p + q = 8; \qquad -b\,.\,p + 3q = 5; \qquad bq = a.$$

Подставляя во второе равенство 1 вмѣсто p, находимъ: $3 + q = 8$, откуда $q = 5$. Подставивъ въ третье равенство вмѣсто p и q ихъ величины, имѣемъ:

$= b + 15 = 5$, что возможно только при $b = 10$. Наконецъ, вставляя въ четвертое равенство вмѣсто b и q ихъ величины, находимъ: $a = 50$.

Итакъ: $a = 50$; $b = 10$; $p = 1$ и $q = 5$.

Стало быть дѣленіе безъ остатка возможно только при $a = 50$ и $b = 10$; а частное $(px + q)$ есть $x + 5$.

77. *Приложеніе VI.* Въ какомъ случаѣ $x^m - a^m$ дѣлится на $x^p - a^p$?

Выполняемъ дѣйствіе, чтобы найти законъ образованія послѣдовательныхъ остатковъ:

$$\begin{array}{l|l}
x^m - a^m & x^p - a^p \\
\underline{x^m \pm a^p x^{m-p}} & x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots \\
\quad a^p x^{m-p} - a^m & \\
\quad \underline{a^p x^{m-p} \pm a^{2p} x^{m-2p}} & \\
\qquad a^{2p} x^{m-2p} - a^m & \\
\qquad \underline{- a^{2p} x^{m-2p} \pm a^{3p} x^{m-3p}} & \\
\qquad\qquad a^{3p} x^{m-3p} - a^m & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Итакъ, если h означаетъ нѣкоторое цѣлое число, одинъ изъ остатковъ будетъ имѣть видъ

$$a^{hp} x^{m-hp} - a^m.$$

Поэтому, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая цѣлая величина h, при которой этотъ остатокъ *тождественно равнялся бы нулю.*

Онъ имѣетъ видъ многочлена, расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, и условія тождественности остатка нулю будутъ различны въ зависимости отъ того, будетъ ли $m - hp$ равно 0, или отлично отъ нуля.

Если $m - hp$ отлично отъ нуля, то коэффиценты при степеняхъ x должны быть равны нулю, т.-е.

$$a^{hp} = 0 \quad \text{и} \quad a^m = 0;$$

это возможно только при $a = 0$. Но такой выводъ не соотвѣтствуетъ задачѣ.

Если $m - hp = 0$, то $x^{m-hp} = 1$; и остатокъ обратится въ нуль, когда

$$a^{hp} = a^m,$$

т.-е. когда $m = h \cdot p$.

Итакъ, необходимо и достаточно, чтобы m было кратнымъ числа p.

Въ такомъ случаѣ:

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots + a^{m-2p} x^p + a^{m-p}.$$

ГЛАВА VIII.

Общій наивысшій дѣлитель и наинизшее кратное алгебраическихъ выраженій.

78. *Дѣлителемъ* цѣлаго алгебраическаго выраженія называется такое другое цѣлое выраженіе, на которое первое дѣлится на-цѣло. Такъ, $4x^2y$ есть дѣлитель выраженія $48x^3y^2z$; $x - 1$ есть дѣлитель тринома $x^2 - 2x + 1$; $x^4 - a^4$ имѣетъ дѣлителями $x - a$, $x + a$, $x^2 - a^2$ и $x^2 + a^2$.

Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ выраженій называется такое цѣлое выраженіе, которое дѣлитъ данныя на-цѣло или безъ остатка. Такъ, выраженія $(a-b)^2$ и a^2-b^2 имѣютъ общимъ дѣлителемъ $a-b$. Взявъ выраженія $a^3+a^2b-ab^2-b^3$, $a^3-3ab^2+2b^3$ и $a^3-2a^2b-ab^2+2b^3$, и разложивъ ихъ на множители, находимъ:

$$a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a+b)^2(a-b);$$
$$a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b);$$
$$a^3-2a^2b-ab^2+2b^3=(a+b)(a-b)a-2b);$$

откуда видно, что данные многочлены имѣютъ общимъ дѣлителемъ биномъ $a-b$.

Цѣлыя выраженія, не имѣющія никакихъ общихъ дѣлителей, называются *первыми между собою* или *взаимно простыми*. Такъ, $a+b$ и $a-b$ выраженія взаимно простыя.

Общимъ наивысшимъ дѣлителемъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется произведеніе всѣхъ простыхъ дѣлителей, общихъ даннымъ выраженіямъ. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ общій наивысшій дѣлитель есть $a-b$, потому что иныхъ общихъ дѣлителей данныя выраженія и не имѣютъ. Взявъ выраженія x^4-a^4 и $x^3+2ax^2-a^2x-2a^3$ и разложивъ ихъ на множители, находимъ:

$$x^4-a^4=(x+a)(x-a)(x^2+a^2);$$
$$x^3+2ax^2-a^2x-2a^3=(x+a)(x-a)(x+2a);$$

замѣчаемъ, что простые дѣлители, общие этимъ выраженіямъ, суть: $x+a$ и $x-a$; ихъ произведеніе x^2-a^2 и есть общій наивысшій дѣлитель двухъ данныхъ выраженій.

Очевидно, что если данныя выраженія раздѣлимъ на ихъ общаго наивысшаго дѣлителя, то черезъ это изъ нихъ исключатся *общие* ихъ *дѣлители*, а потому частныя не будутъ имѣть уже никакихъ общихъ дѣлителей, т.-е. будутъ первыя между собою. Отсюда вытекаетъ другое опредѣленіе общаго наивысшаго дѣлителя: *это есть такой общій дѣлитель, по раздѣленіи на который данныхъ выраженій, получаются частныя первыя между собою.* Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, раздѣливъ выраженія x^4-a^4 и $x^3+2ax^2-a^2x-2a^3$ на общаго дѣлителя x^2-a^2, получаемъ частныя x^2+a^2 и $x+2a$ — первыя между собою. Заключаемъ, что, по опредѣленію, x^2-a^2 и будетъ общій наивысшій дѣлитель данныхъ выраженій.

Примѣчаніе I.—Между алгебраическимъ общимъ наивысшимъ дѣлителемъ и общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ (въ ариѳметикѣ) есть существенное различіе. Общій наибольшій дѣлитель чиселъ есть такой ихъ общій дѣлитель, который по *величинѣ* больше всѣхъ другихъ общихъ дѣлителей. Отсюда и названіе его – *наибольшій*. Но общій наивысшій дѣлитель алгебраическихъ выраженій, какъ содержащій произведеніе всѣхъ общихъ дѣлителей, очевидно, будетъ *по степени выше* другихъ общихъ дѣлителей; но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы онъ былъ больше по величинѣ: такъ a^2 не необходимо больше a; напр., если a есть положительное число меньшее 1, то a^2 меньше a.

Примѣчаніе II.—Для краткости слова: общій дѣлитель будемъ означать начальными буквами о. д.; также слова: общій наивысшій дѣлитель — буквами о. н. д.

Переходимъ къ изложенію способовъ опредѣленія общаго наивысшаго дѣлителя алгебраическихъ выраженій.

79. Способъ разложенія на множителей—Пусть требуется найти о. н. д. одночленовъ

$$65a^5b^2c,\quad 30a^7b^2 \text{ и } 45a^4b^{11}d,$$

т.-е. такихъ выраженій, которыя прямо даны въ формѣ произведеній.

Согласно съ первымъ опредѣленіемъ, нужно составить произведеніе всѣхъ общихъ простыхъ дѣлителей — численныхъ и буквенныхъ. Произведеніе общихъ простыхъ числовыхъ дѣлителей есть о. н. д. коэффиціентовъ и = 5. Что касается буквенныхъ производителей, то нужно взять только общія буквы съ наименьшими показателями; общія буквы суть a и b; наименьшій показатель буквы a есть 4, буквы b—2, сл. о. н. д. $= 5a^4b^2$.

Выраженіе, такимъ образомъ составленное, удовлетворяетъ и второму опредѣленію общаго наиб. дѣлителя; въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ на него данные одночлены, получаемъ частныя: $13ac$, $6a^3b$ и $9b^9d$ — первыя между собою. Отсюда *Правило. Для составленія о. н. д. одночленовъ нужно къ общему наиб. дѣлителю коэффиціентовъ приписать всѣ общія буквенные множители съ наименьшими показателями.*

Что касается многочленовъ, то, когда они легко разлагаются на множителей, и употребляютъ способъ разложенія на производителей, или, что то же, превращаютъ многочлены въ одночлены и прилагаютъ къ нимъ предыдущее правило. Вотъ примѣры.

I. Найти о. н. д. многочленовъ

$$9a^2x^2 - 36 \text{ и } 12a^2x^2 + 48ax + 48.$$

Разлагая на множители, найдемъ:

$$9a^2x^2 - 36 = 3^2 \,.\, (ax + 2)(ax - 2);$$
$$12a^2x^2 + 48ax + 48 = 4 \,.\, 3\,(ax + 2)^2.$$

Взявъ произведеніе общихъ простыхъ множителей, найдемъ

$$\text{о. н. д.} = 3\,(ax + 2).$$

II. Найти о. н. д. многочленовъ

$$x^4y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^4 \text{ и } x^4y^2 - 4x^2y^4.$$

Разлагая на множители, находимъ:

$$x^4y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^4 = x^2y^2(x - 2y)(x - y),$$
$$x^4y^2 - 4x^2y^4 = x^2y^2(x + 2y)(x - 2y);$$

слѣд. о. н. д. $= x^2y^2(x - 2y)$.

III. Найти о. н. д. полиномовъ

$$x^3 + 1 \text{ и } x^3 + mx^2 + mx + 1.$$

Разложивъ на множители, получимъ

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$
$$x^3 + mx^2 + mx + 1 = (x + 1)(x^2 - x + mx + 1);$$

слѣд. о. н. д. $= x + 1$.

IV. Найти о. н. д. полиномовъ

$$3x^2y - 3x^3 + 3zy - 3xz \quad \text{и}$$
$$15x^2y - 30xyz + 15z^2y - 15x^3 + 30x^2z - 15xz^2.$$

По разложеніи на множителей, найдемъ, что

$$\text{1-й полиномъ} = 3(x^2 + z)(y - x),$$
$$\text{2-й полиномъ} = 3\ .\ 5(y - x)(x - z)^2.$$

Отсюда: о. н. д. $= 3(y - x)$.

80. Способъ послѣдовательнаго дѣленія. Такъ какъ многочлены только въ рѣдкихъ случаяхъ легко поддаются разложенію на простыхъ множителей, то и предыдущій способъ прилагается съ успѣхомъ только въ исключительныхъ случаяхъ. Вообще же, для опредѣленія о. н. д. полиномовъ пользуются общимъ способомъ, который носитъ названіе *способа послѣдовательнаго дѣленія*. Нахожденіе о. н. д. этимъ способомъ основывается на слѣдующихъ теоремахъ.

81 Теорема I. — *О. н. д. двухъ выраженій не измѣнится, если одно изъ нихъ помножимъ или раздѣлимъ на количество, первое съ другимъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, о. н. д. есть произведеніе множителей, *общихъ* тому и другому выраженію, а потому если введемъ (умноженіемъ), или уничтожимъ (дѣленіемъ) въ одномъ изъ нихъ множителя, не входящаго въ составъ другого выраженія, то отъ этого прибавится къ первому, или уничтожится въ немъ множитель, котораго нѣтъ во второмъ, а слѣд. *общіе* множители останутся тѣ же; значитъ не измѣнится и о. н. д.

Эта теорема облегчаетъ вычисленія, позволяя избѣгать дробныхъ коэффиціентовъ въ частныхъ.

82 Теорема II.— *О. н. д. у дѣлимаго и дѣлителя служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка.*

Пусть данные многочлены суть M и N; обозначивъ частное отъ раздѣленія M на N буквою Q, а остатокъ R, и замѣтивъ, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ, имѣемъ

$$M = N \times Q + R\ .\ .\ .\ (1).$$

Обозначивъ общаго дѣлителя многочленовъ M и N буквою Δ, раздѣлимъ на Δ обѣ части полученнаго равенства, найдемъ:

$$\frac{M}{\Delta} = \frac{N}{\Delta} \times Q + \frac{R}{\Delta}.$$

Но, по условію, Δ есть общій дѣлитель многочленовъ M и N, слѣд. частныя $\frac{M}{\Delta}$ и $\frac{N}{\Delta}$ суть выраженія цѣлыя; обозначивъ ихъ соотвѣтственно черезъ M' и N', представимъ послѣднее равенство въ видѣ

$$M' = N' \times Q + \frac{R}{\Delta}, \text{ откуда } \frac{R}{\Delta} = M' - N' \times Q.$$

Это равенство показываетъ, что $\frac{R}{\Delta}$ есть выраженіе цѣлое, ибо равно цѣлому выраженію $M' - N' \times Q$, значитъ, R дѣлится на-цѣло на Δ

Итакъ, мы доказали, что *всякій* дѣлитель, общій дѣлимому и дѣлителю, служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка; а слѣд. и общій наив. дѣлитель дѣлимаго и дѣлителя служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка.

83. Теорема III, обратная. *О. н. д. у дѣлителя и остатка служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя.*

Пусть Δ_1 будетъ общимъ дѣлителемъ выраженій N и R. Раздѣливъ обѣ части равенства (1) на Δ_1, получимъ

$$\frac{M}{\Delta_1}=\frac{N}{\Delta_1}\cdot Q+\frac{R}{\Delta_1};$$

Но, по условію, $\frac{N}{\Delta_1}$ есть цѣлое выраженіе, равно какъ и $\frac{R}{\Delta_1}$; обозначивъ ихъ буквами N' и R' получимъ

$$\frac{M}{\Delta_1}=N'\times Q+R'.$$

Это равенство показываетъ, что $\frac{M}{\Delta_1}$ равно суммѣ двухъ цѣлыхъ выраженій; значитъ, Δ_1 есть дѣлитель многочлена M.

Итакъ, мы доказали, что *всякій* дѣлитель, общій дѣлителю и остатку, служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя; а слѣд. и общій наив. дѣлитель дѣлителя и остатка служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя.

Изъ этихъ двухъ теоремъ выводится слѣдующая

84. Теорема IV. *О. н. д. дѣлимаго и дѣлителя равенъ о. н. дѣлителю дѣлителя и остатка.*

Обозначимъ о. н. д. многочленовъ M и N, т. е. дѣлимаго и дѣлителя, буквою D, а о. н. д. N и R, т. е. дѣлителя и остатка, буквою D'. Въ силу теоремы II, выраженіе D должно быть общимъ дѣлителемъ многочленовъ N и R, [illegible] дѣлителя и остатка выраженіе D' — общаго наив. дѣлителя многочленовъ N и R. А, по теоремѣ III, выраженіе D' должно дѣлить на-цѣло многочлены M и N, а слѣд. и ихъ общаго наив. дѣлителя D. Такимъ образомъ D и D' должны дѣлить другъ друга на-цѣло; но это возможно только тогда, когда они равны. Итакъ

$$D=D',$$

и теорема доказана.

85. На послѣдней теоремѣ и основанъ способъ послѣдовательнаго дѣленія.

Пусть данные многочлены суть M и N. Ихъ общій наив. дѣл. можетъ содержать производителей одночленныхъ и многочленныхъ. Начинаютъ съ того, что отдѣляютъ въ многочленахъ M и N одночленныхъ производителей отъ многочленныхъ. Одночленный производитель многочлена M есть общій множитель всѣхъ членовъ этого многочлена; вынося его за скобки и означая черезъ α, а многочленъ, заключающійся въ скобкахъ, черезъ A, имѣемъ:

$$M=\alpha.\ A.$$

Такъ же точно, вынося за скобки общаго множителя β всѣхъ членовъ многочлена N и обозначая выраженіе, заключающееся въ скобкахъ, буквою B, получимъ:

$$N=\beta.\ B.$$

Производители — одночлены, общіе многочленамъ M и N, заключаются въ α и β; а производители — многочлены, общіе многочленамъ M и N, содержатся въ A и B. Такъ какъ о. н. д. многочленовъ M и N есть произведеніе всѣхъ ихъ общихъ простыхъ множителей или дѣлителей, то очевидно, мы его найдемъ, если общаго наив. дѣлителя количествъ α и β помножимъ на о. н. д. многочленовъ A и B. Обозначимъ о. н. д. многочленовъ M и N буквою Δ; о. н. д. одночленовъ α и β — буквою d; и о. н. д. многочленовъ A и B буквою D. На основаніи сказаннаго имѣемъ:

$$\Delta = d.\ D.$$

Пусть, напримѣръ:

$$M = 9ab^2x^5 - 30ab^2x^3 + 45ab^2x + 24ab^2;$$
$$N = 6a^4b^2cx^6 - 12a^4b^2cx^5 - 36a^4b^2cx^4 + 24a^4b^2cx^3 + 78a^4b^2cx^2 + 36a^4b^2cx.$$

Вынося изъ всѣхъ членовъ перваго многочлена за скобки $3ab^2$, а изъ всѣхъ членовъ второго $6a^4b^2cx$, получимъ:

$$M = 3ab^2(3x^5 - 10x^3 + 15x + 8).$$
$$N = 6a^4b^2cx(x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6).$$

Общ. н. д. d одночленовъ $3ab^2$ и $6a^4b^2cx$ есть $3ab^2$. Теперь намъ слѣдуетъ опредѣлить D, т.-е. о. н. д. многочленовъ

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8 \quad \text{и}$$
$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6$$

Раздѣлимъ A на B. Если бы A раздѣлилось на B безъ остатка, то B и было бы о. н. д., потому что тогда всѣ производители B содержались бы въ A. Но если бы A не раздѣлилось на B безъ остатка, то все-таки рѣшеніе вопроса подвинется впередъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дѣленіе A на B даетъ частное Q и остатокъ R; въ такомъ случаѣ

$$A = B \times Q + R \ldots (1).$$

причемъ степень главной буквы остатка будетъ ниже чѣмъ въ дѣлителѣ B. Замѣтивъ теперь, что, по теоремѣ IV, о. н. д. многочленовъ A и B равенъ о. н. д. многочленовъ B и R, заключаемъ, что вопросъ сводится къ отысканію о. н. д. между прежнимъ дѣлителемъ и остаткомъ, т.-е. между многочленами съ меньшими степенями главной буквы, и слѣд. болѣе простыми. Если бы притомъ B раздѣлилось на R, тогда R и было бы искомымъ общимъ наив. дѣлителемъ. Но пусть при дѣленіи B на R получается въ частномъ Q′ и въ остаткѣ R′; тогда

$$B = Q' \times R + R' \ldots (2)$$

Хотя дѣленіе B на R и не привело къ окончательному нахожденію о. н. д., но рѣшеніе задачи опять упростилось. Дѣйствительно, мы знаемъ, что о. н. д. между B и R равенъ о. н. д. между R и R′, такъ что вопросъ приведенъ къ нахожденію о. н. д. между многочленами R и R′, болѣе простыми, ибо показатель главной буквы въ R′ меньше показателя ея въ R.

Пусть R дѣлится безъ остатка на R′ и даетъ въ частномъ Q″, такъ что

$$R = Q'' \times R' \ldots (3).$$

Не трудно провѣрить, что послѣдній дѣлитель R' и есть искомый о. н. д. многочленовъ A и B. Въ самомъ дѣлѣ, равенство (3) показываетъ, что R' есть о. н. д. для самого себя и R; но о. н. д. остатка и дѣлителя (равенство (2)) равенъ о. н. д. дѣлимаго и дѣлителя, т.-е. многочленовъ B и R; а отсюда, въ силу равенства (1) заключаемъ, что R', будучи о. н. д. для B и R, служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ (по теор. IV) и общ. наиб. дѣлителемъ для A и B, что и требовалось доказать.

При послѣдовательныхъ дѣленіяхъ, здѣсь указанныхъ, возможны два случая: 1) или мы дойдемъ до остатка равнаго нулю; въ такомъ случаѣ, какъ доказано, послѣдній дѣлитель и будетъ искомымъ о. н. д. многочленовъ A и B; или 2) послѣ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ дѣленій, дойдемъ до остатка, который не содержа главной буквы, не будетъ, однакоже, нулемъ. Что такой случай возможенъ, объясняется тѣмъ, что степень главной буквы въ послѣдовательныхъ остаткахъ постоянно понижается; слѣд. непремѣнно дойдемъ до остатка, не содержащаго главной буквы. Легко доказать, что если этотъ остатокъ не нуль, то слѣдуетъ заключить, что многочлены A и B не имѣютъ общаго [illegible] дѣлителя, т.-е. первые между собою. Дѣйствительно, мы видѣли, что [illegible] остатки послѣ каждаго дѣйствія, а потому онъ долженъ бы [illegible] содержащій главной буквы. Для этого о. н. д. самъ не [illegible] буквы, но въ такомъ случаѣ, чтобы онъ могъ раздѣлить [illegible] A и B, онъ долженъ дѣлить каждый коэффиціентъ [illegible] въ этихъ полиномахъ, а это невозможно, [illegible] уже исключены (они заключаются въ α и β).

[illegible] эту теорію къ примѣру [illegible] (Дѣлимъ A на B (могли бы, впрочемъ, дѣлить B на A, потому что въ данномъ случаѣ полиномы — одинаковой степени отн. x).

$$[illegible] \quad \underline{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6} \quad B$$

$$-3x^5 + 6x^4 + 18x^3 - 12x^2 - 39x - 18 \quad 3$$

$$R = \quad 6x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 24x - 10$$

Въ остаткѣ степень буквы x ниже чѣмъ въ дѣлителѣ, поэтому первое дѣленіе [illegible], оно показываетъ, что B не есть о. н. д.

Слѣдуя теоріи, теперь нужно дѣлителя раздѣлить на первый остатокъ. Но, замѣчая что члены остатка имѣютъ общаго множителя 2, перваго съ новымъ дѣлителемъ, мы на основаніи теоремы I можемъ сократить этотъ остатокъ на 2, не измѣняя этимъ о. н. д. Черезъ это новый дѣлитель упростится и будетъ равенъ

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5.$$

Для избѣжанія дробныхъ коэффиціентовъ въ частномъ и въ остаткахъ, множимъ новое дѣлимое на 3, что возможно, такъ какъ 3 есть количество первое съ $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5$. Совершаемъ дѣленіе

$$3x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 39x + 18 \quad \underline{3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5}$$

$$-3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 5x \qquad x, \; 5$$

$$-10x^4 - 12x^3 + 24x^2 + 44x + 18 \text{ . . . остатокъ}$$

$$-5x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 22x + 9 \text{ . . . остатокъ, по раздѣленіи на 2}$$

$$-15x^4 - 18x^3 + 36x^2 + 66x + 27 \text{ . . . остатокъ, по умноженіи на 3}$$

$$\underline{+15x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 60x - 25}$$

$$2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

Степень главной буквы въ первомъ остаткѣ не ниже чѣмъ въ дѣлителѣ, а это даетъ возможность продолжать дѣленіе. Но такъ какъ коэффиціентъ перваго члена остатка не дѣлится на коэффиціентъ перваго члена дѣлителя, то мы условимся считать второе дѣленіе законченнымъ, и полученный остатокъ —окончательнымъ въ этомъ дѣленіи. Теперь, слѣдуя теоріи, мы должны искать о. н. д. между $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5$ и полученнымъ остаткомъ; приэтомъ, остатокъ принимаемъ за дѣлимое, а дѣлителя оставляемъ прежняго. Приступая къ новому дѣленію, сокращаемъ дѣлимое на 2 и умножаемъ его на 3, что позволительно, потому что ни 2, ни 3 не входятъ множителями въ дѣлитель. Чтобы не переписывать дѣлителя, продолжаютъ дѣленіе въ томъ же столбцѣ, только членъ частнаго (-5) отдѣляютъ отъ частнаго прежняго дѣленія занятою, чтобы этимъ показать, что -5 не принадлежитъ къ числу членовъ одного и того же частнаго, а есть частное новаго, особаго, дѣленія.

Это дѣленіе даетъ остатокъ $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$, и вопросъ приведенъ къ отысканію о. н. д. между этимъ остаткомъ и дѣлителемъ. Во избѣжаніе дробныхъ коэффиціентовъ въ частномъ и остаткахъ, сокращаемъ дѣлителя на 2, и дѣлимъ

$$\begin{array}{rl}
3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
3x^4 + 9x^3 \mp 9x^2 - 3x \quad\; & 3x - 5. \\
-5x^3 - 15x^2 - 15x - 5 & \\
-5x^3 - 15x^2 - 15x - 5 & \\
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

Послѣдній дѣлитель $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ и есть о. н. д. многочленовъ A и B.

Итакъ, мы нашли, что $d = 3ab^2$, а $D = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; сл. о. н. д. данныхъ многочленовъ M и N, или

$$\Delta = d.\ D = 3ab^2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 3ab^2x^3 + 9ab^2x^2 + 9ab^2x + 3ab^2.$$

86. Приводимъ еще примѣры.

I. Найти о. н. д. многочленовъ:

$$M = 2a^2x^5 - 28a^2x^4 + 142a^2x^3 - 308a^2x^2 + 240a^2x \text{ и}$$
$$N = 3ax^3 - 30ax^2 + 87ax - 60a.$$

Выносимъ за скобки общихъ множителей членовъ каждаго многочлена:

$$M = 2a^2x(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120),$$
$$N = 3a(x^3 - 10x^2 + 29x - 20).$$

Отсюда имѣемъ: $d = a$.

Ищемъ о. н. д. многочленовъ, заключенныхъ въ скобки.

Первое дѣленіе.

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 & x^3 - 10x^2 + 29x - 20 \\
x^4 \pm 10x^3 \mp 29x^2 \pm 20x \qquad\; & x - 4 \\
4x^3 + 42x^2 - 134x + 120 & \\
\pm\ \underline{4x^3 \mp 40x^2 \pm 116x \mp 80} & \\
2x^2 - 18x + 40 &
\end{array}$$

Сокративъ остатокъ на 2, принимаемъ $x^2 - 9x + 20$ за дѣлителя слѣдующаго дѣленія.

Второе дѣленіе.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 - & 10x^2 + & 29x - & 20 & x^2 - 9x + 20 \\
x^3 \mp & 9x^2 \pm & 20x & & x - 1 \\
 - & x^2 + & 9x - & 20 & \\
 - & x^2 + & 9x - & 20 & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

Заключаемъ, что $x^2 - 9x + 20$ есть о. н. д. многочленовъ, содержащихся въ скобкахъ. Итакъ,

$$\Delta = d,\ \mathrm{D} = a(x^2 - 9x + 20) = ax^2 - 9ax + 20a.$$

II. Найти о. н. д. многочленовъ

$$\mathrm{M} = x^5 - 8x^4 + 13x^3 + 57x^2 - 198x + 135 \text{ и}$$
$$\mathrm{N} = 2x^3 - 15x^2 + 37x - 15.$$

[illegible] $\Delta = 1$. Постараемся опредѣлить D. Умноживъ предварительно [illegible] M на 2, дѣлимъ.

Первое дѣленіе.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 - & 16x^4 + & 26x^3 + & 114x^2 - & 396x + & 270 & 2x^3 - 15x^2 + 37x - 15 \\
2x^5 \mp & 15x^4 \pm & 37x^3 \mp & 15x^2 & & & x^2, -x, -37 \\
 - & x^4 - & 11x^3 + & 129x^2 - & 396x + & 270, & \text{умноживъ на 2:} \\
 - & 2x^4 - & 22x^3 + & 258x^2 - & 792x + & 540 & \\
 \mp & 2x^4 \pm & 15x^3 \mp & 37x^2 \pm & 15x & & \\
 & - & 37x^3 + & 295x^2 - & 807x + & 540, & \text{умноживъ на 2:} \\
 & - & 74x^3 + & 590x^2 - & 1614x + & 1080 & \\
 & \pm & 74x^3 \mp & 555x^2 \pm & 1369x \mp & 555 & \\
 & & & 35x^2 - & 245x + & 525 &
\end{array}$$

Сократвъ остатокъ на 35, дѣлимъ

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 - & 15x^2 + & 37x - & 15 & x^2 - 7x + 15 \\
-2x^3 \pm & 14x^2 \mp & 30x & & 2x - 1 \\
 - & x^2 + & 7x - & 15 & \\
 - & x^2 + & 7x - & 15 & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

Итакъ, $\mathrm{D} = x^2 - 7x + 15$.

$$\Delta = d,\ \mathrm{D} = x^2 - 7x + 15.$$

III. Найти о. н. д. многочленовъ

$$\mathrm{M} = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 12, \text{ и}$$
$$\mathrm{N} = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 5$$

Умноживъ предварительно M на 4, дѣлимъ

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 20x - 48 & 4x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \\ \hline 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x & x^2 - 1 \end{array}$$

$$2x^3 - 6x^2 - 15x - 48\text{, умноживъ на 2:}$$

$$4x^3 - 12x^2 + 30x - 96$$

$$4x^3 \mp 6x^2 + 6x + 5$$

$$-18x^2 + 36x - 101$$

Умноживъ дѣлителя на 9, дѣлимъ его на послѣдній остатокъ:

$$\begin{array}{l|l} 36x^3 + 54x^2 + 54x + 45 & -18x^2 + 36x - 101 \\ \cline{2-2} 36x^3 - 72x^2 + 202x & -2x - 7 \end{array}$$

$$126x^2 - 256x + 45$$

$$126x^2 - 252x + 707$$

$$-4x - 662$$

Раздѣливъ остатокъ на (— 2), дѣлимъ

$$\begin{array}{l|l} 18x^2 - 36x + 101 & 2x + 331 \\ \cline{2-2} -18x^2 \mp 2979x & 9x^2 - 3015 \\ \hline \end{array}$$

$$-3015x + 101\text{, умноживъ на 2:}$$

$$-6030x + 202$$

$$-6030x - 997965$$

$$+998167$$

При послѣднемъ дѣленіи мы нашли остатокъ, не содержащій главной буквы, *не равный нулю*, то заключаемъ, что данные многочлены не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

IV. Найти о. н. д. многочленовъ

$$a^3(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b(2b^2 + 3bc + c^2) + ab^3(b + c) \text{ и}$$

$$a^2(b^2 - c^2) - ab(2b^2 + bc - c^2) + b^3(b + c).$$

Принявъ a за главную букву, посмотримъ, не имѣютъ ли коэффиціенты каждаго многочлена общихъ множителей; и для этого разложимъ коэффиціенты на множителей. Имѣемъ

$$b^2 + 2bc + c^2 = (b + c)^2;$$

$$2b^2 + 3bc + c^2 = 2b^2 + 2bc + bc + c^2 = 2b(b + c) + c(b + c) = (b + c)(2b + c);$$

$$b^2 - c^2 = (b + c)(b - c);$$

$$2b^2 + bc - c^2 = b^2 + b^2 + bc - c^2 = b(b + c) + (b + c)(b - c) = (b + c)(2b - c).$$

Такимъ образомъ находимъ, что всѣ члены перваго многочлена имѣютъ общаго множителя $a(b + c)$, всѣ члены второго: $(b + c)$; слѣд. можемъ представить многочлены въ видѣ:

$$a(b + c)\{(b + c)a^2 - b(2b + c)a + b^3\} \text{ и}$$

$$(b + c)\{(b - c)a^2 - b(2b - c)a + b^3\}.$$

Отсюда видно, что $d = b + c$. Затѣмъ, сокративъ первый многочленъ на [illegible] c), второй на $b + c$, и помноживъ всѣ члены перваго на $b - c$, дѣлимъ

$$\begin{array}{r|r|l|r|l}
+b^2 & a^2 - 2b^3 & a + b^4 & +b & a^2 - 2b^2 a + b^3 \\
-c^2 & +b^2c & -b^3c & -c & +bc \\
 & +bc^2 & & & \\
 & & & \multicolumn{2}{c}{b + c}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
\mp b^2 & a^2 \pm 2b^3 & a \mp b^4 \\
+c^2 & +b^2c & \mp b^3c \\
 & \mp bc^2 &
\end{array}$$

$$2b^2c \,.\, a - 2b^3c,$$ или, по сокращеніи на $2b^2c$:

$$a - b$$

Затѣмъ, дѣлимъ

$$\begin{array}{l|l}
+b\,a^2 - 2b^2\,a + b^3 & a - b \\
-c \quad\;\; +bc & \\
 & \begin{array}{r|l} +b & a - b^2 \\ -c & \end{array} \\
\begin{array}{r|l} \mp b & a^2 \pm b^2 \;\; a \\ \pm c & \;\;\; \mp bc \end{array} & \\
\quad\quad -b^2 \,.\, a + b^3 & \\
\quad\quad\;\; b^2 \,.\, a - b^3 & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

Итакъ, $D = a - b$. А потому

$$\Delta = d.\, D = (b + c)(a - b).$$

87. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее

Правило. — Чтобы найти о. н. д. двухъ многочленовъ, нужно: Сначала исключить общіе одночленные множители каждаго многочлена; причемъ, если случится, что означенные множители имѣютъ о. н. д., то послѣдній слѣдуетъ впослѣдствіи ввести множителемъ въ составъ искомаго об. н. д.

Затѣмъ высшій многочленъ дѣлятъ на низшій, преобразовавъ предварительно дѣлимое такъ, чтобы первый членъ его (предполагая, что многочлены расположены по степенямъ одной буквы) дѣлился на первый членъ дѣлителя.

Въ полученномъ отъ дѣленія остаткѣ сокращаютъ всѣхъ множителей общихъ коэффиціентамъ главной буквы, и дѣлятъ прежняго дѣлителя на тотъ остатокъ, поступая попрежнему.

Затѣмъ дѣлятъ первый остатокъ на второй и т. д., продолжая эти послѣдовательныя дѣленія до тѣхъ поръ, пока: или получится остатокъ нуль, — и тогда послѣдній дѣлитель есть искомый о. н. д.; или въ остаткѣ получится выраженіе, не содержащее главной буквы. — и тогда данныя выраженія суть количества первыя между собою, если не имѣютъ общаго множителя, независящаго отъ главной буквы, и не открытаго еще въ началѣ дѣйствія.

При выполненіи послѣдовательныхъ дѣленій слѣдуетъ умножать промежуточные остатки на такихъ множителей, чтобы первые члены ихъ дѣлились на первый членъ дѣлителя.

88. Иногда процессъ нахожденія о. н. д. можно ускорять на основаніи слѣдующей теоремы.

Теорема. *О. н. д. двухъ полиномовъ* A *и* B, *содержащихъ главную букву* x, *тотъ же, что и о. н. д. выраженій* $pA + qB$ *и* $rA + sB$, *гдѣ* p, q, r, s*—нѣкоторыя положительныя или отрицательныя количества, независящія отъ* x.

Во-первыхъ, очевидно, что всякій множитель общій полиномамъ A и B, будетъ также общимъ множителемъ и выраженій $pA + qB$ и $rA + sB$.

Во-вторыхъ, очевидно, что всякій множитель, общій выраженіямъ $pA + qB$ и $rA + sB$, служитъ также множителемъ выраженія $s(pA + qB) - q(rA + sB)$, или выраженія $(sp - qr)A$. А какъ $sp - qr$ не содержитъ x, то всякій множитель, общій выраженіямъ $pA + qB$ и $rA + sB$, долженъ быть множителемъ полинома A, если только не будетъ $sp - qr = 0$. Подобно этому, всякій множитель, общій выраженіямъ $pA + qB$ и $rA + sB$, будетъ также множителемъ и выраженія $r(pA + qB) - p(rA + sB)$ т.-е. выраженія $(rq - ps)B$, и слѣд. полинома B.

Такимъ образомъ доказано, что всякій множитель, общій полиномамъ A и B, служитъ общимъ множителемъ и для $pA + qB$ и $rA + sB$, и обратно, о. м. двухъ послѣднихъ выраженій будетъ также общимъ множителемъ и для A и B; а сл. и о. н. д. у A и B таковъ же какъ и у $pA + qB$ и $rA + sB$.

Примѣръ. Найти о. н. д. полиномовъ

$$3x^3 + 10x^2 + 7x - 2 \ldots (1) \quad \text{и} \quad 3x^3 + 13x^2 + 17x + 6 \ldots (2)$$

Вычитая (1) изъ (2), имѣемъ $3x^2 + 10x + 8 \ldots (3)$

Помноживъ (1) на 3 и сложивъ со (2), получимъ

$$x(12x^2 + 43x + 38) \ldots (4)$$

Слѣд. искомый о. н. д. тотъ же, что у (3) и у $12x^2 + 43x + 38 \ldots (5)$ Помноживъ (3) на 4 и вычтя изъ (4), имѣемъ $3(x + 2)$. Слѣд., иск. о. н. д. = о. н. д. (3) и $x + 2$.

Но (3) при $x = -2$ обращается въ 0, слѣдоват., искомый о. н. д. $= x + 2$.

89. Общій наивысшій дѣлитель нѣсколькихъ многочленовъ. — Пусть требуется найти о. н. д. нѣсколькихъ многочленовъ P, Q, R и S. Найдемъ о. н. д. между какими-нибудь двумя изъ данныхъ многочленовъ, напр. P и Q, и назвавъ его буквою D, замѣчаемъ, что D есть ничто иное, какъ произведеніе всѣхъ множителей, общихъ многочленамъ P и Q. — Если теперь найдемъ о. н. д. между D и R, то, назвавъ его буквою D′, замѣчаемъ, что D′ есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ D и R; а какъ D есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ P и Q, то D′ есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ P, Q и R. Найдя затѣмъ о. н. д. для D′ и S, пусть онъ будетъ D″,—убѣдимся, что онъ будетъ = произведенію всѣхъ множителей, общихъ многочленамъ P, Q, R и S. Поэтому D″ и будетъ о. н. д. данныхъ многочленовъ.

Отсюда

Правило.— Чтобы найти о. н. д. нѣсколькихъ многочленовъ, находятъ его сперва между какими-нибудь двумя многочленами; потомъ *между найденнымъ о. н. д. и третьимъ даннымъ многочленомъ; затѣмъ между вновь найденнымъ о. н. д. и четвертымъ многочленомъ и т. д. Послѣдній о. н. д. и будетъ требуемый.*

Примѣръ. Найти о. н. д. многочленовъ

$$\begin{aligned} P &= 8x^3 - 12x^2y - 10xy + 15y^2, \\ Q &= 6x^3 + 12x^2 - 9x^2y - 18xy, \\ R &= 6x^2 - 13xy + 6y^2, \\ S &= 4x^2 - 9y^2. \end{aligned}$$

О. н. д. многочленовъ R и S равенъ $2x - 3y$; о. н. д. многочленовъ P и $2x - 3y$ есть $2x - 3y$; наконецъ о. н. д. для Q и $2x - 3y$ есть также $2x - 3y$. Слѣдов. о. н. д. всѣхъ четырехъ многочленовъ есть $2x - 3y$.

90. Наинизшее кратное алгебраическихъ выраженій. — *Кратнымъ* даннаго цѣлаго выраженія наз. такое другое цѣлое выраженіе которое на данное дѣлится на-цѣло. Такъ $12a^4x^3y$ есть кратное выраженія $2a^2x$. Очевидно, что для даннаго выраженія существуетъ безчисленное множество кратныхъ.

Такъ, для $x - y$ кратными будутъ: $(x - y)^2$, $(x - y)^3$, $(x - y)^4$, . . . $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$, $x^4 - y^4$ и т. д.

Общимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій наз. такое, которое на всѣ данныя дѣлится безъ остатка. Такъ, если данныя выраженія суть:

$$2a^2b, \quad 3(a - b)^2, \quad a^2 - b^2;$$

то общими кратными ихъ будутъ:

$$\begin{gathered} 6a^2b\,(a - b)^2(a + b); \\ 12a^4b^3(a - b)^4(a + b); \\ 72a^4b^2(a - b)^3(a + b)^2 \text{ и т. д.} \end{gathered}$$

Очевидно, что для данныхъ выраженій существуетъ безчисленное множество общихъ кратныхъ.

Наинизшимъ кратнымъ данныхъ выраженій, расположенныхъ по степенямъ одной буквы, называется ихъ общее кратное, низшей степени относительно этой буквы.

Когда данныя выраженія — одночлены, то для составленія наинизшаго кратнаго нужно перемножить всѣ простые множители, взявъ каждый изъ нихъ съ наибольшимъ показателемъ. Такъ, если даны одночлены $10a^6b^2$, $12a^3b^3$, $6a^4bc^2d$, то, взявъ всѣхъ простыхъ множит. въ высшихъ степеняхъ, т.-е. 2^2, 3, 5, a^6, b^3, c^2 и d, найдемъ н. кр. $2^2.3.5.a^6.b^3.c^2.d$ или $60a^6b^3c^2d$

Такимъ же образомъ составляется и наинизшее кратное многочленовъ, когда послѣдніе легко разлагаются на множителей. Приводимъ примѣры.

I. **Найти н. к. для $x^2 - a^2$ и $x^3 - a^3$.**

$$\begin{gathered} x^2 - a^2 = (x + a)(x - a); \\ x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2). \end{gathered}$$

Н. кр. $= (x + a)(x - a)(x^2 + xa + a^2) = x^4 + ax^3 - a^3x - a^4$.

II. Найти н. кр. полиномовъ:

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 \quad \text{и} \quad x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3.$$

По разложеніи на множители, первый даетъ

$$x(x^2 - y^2) + 2y(x^2 - y^2) = (x + 2y)(x^2 - y^2);$$

а второй

$$x(x^2 - y^2) - 2y\,(x^2 - y^2) = (x - 2y)(x^2 - y^2).$$

Наим. кр. $= (x^2 - y^2)(x + 2y)(x - 2y) = (x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)$

91. Если разложеніе многочленовъ на множители представляетъ затрудненіе, то можно пользоваться слѣдующимъ пріемомъ.

Пусть A и B — данные многочлены, а D — ихъ о. н. д. Назвавъ частныя отъ раздѣленія многочленовъ A и B на D буквами A' и B', получимъ: $A = A'D$ и $B = B'D$. По свойству о. н. дѣлителя, A' и B' суть выраженія первыя между собою, а слѣд. ихъ наим. кр. $= A'B'$. Очевидно, что выраженіе наименьшей степени, дѣлящееся на $A'D$ и $B'D$, есть $A'B'D$. Итакъ, наим. кр. многочленовъ A и B есть $A'B'D$ . . . (1) Это выраженіе можно также представить въ видѣ $A'B$, если $B'D$ замѣнить черезъ B; или, въ видѣ $B'A$, замѣнивъ $A'D$ черезъ A. Наконецъ, перемноживъ: $A = A'D$ и $B = B'D$ найдемъ, $A'B'D^2 = AB$; раздѣливъ обѣ части на D, получимъ: $A'B'D = \frac{AB}{D}$. Итакъ, наим. кр. можетъ быть представлено въ каждой изъ слѣдующихъ формъ:

$$A'B'D, \quad AB', \quad BA' \quad \text{и} \quad \frac{AB}{D}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило нахожденія наинизшаго кратнаго двухъ многочленовъ: находятъ ихъ о. н. д.; дѣлятъ на него одно изъ данныхъ выраженій, и полученнымъ частнымъ умножаютъ другое; или: произведеніе данныхъ многочленовъ дѣлятъ на ихъ о. н. д.; или: о. н. д. множатъ на частныя, происходящія отъ раздѣленія данныхъ многочленовъ на этого наиб. дѣлителя.

Примѣчаніе I. Раздѣливъ н. к. $A'B'D$ на $A'D$ (или A), находимъ въ частномъ B'; а раздѣливъ на $B'D$ (или B), въ частномъ получаемъ A'; но A' и B' выраженія первыя между собою, сл. можно дать наименьшему кратному такое опредѣленіе: это есть такое кратное данныхъ выраженій, которое по раздѣленіи на нихъ, даетъ частныя первыя между собою.

Примѣръ. Найти н. к. многочленовъ

$$a^2 - ab - 12b^2 \quad \text{и} \quad a^2 + 5ab + 6b^2.$$

О. н. д. ихъ $= a + 3b$. Раздѣливъ первое выраженіе на $a + 3b$, находимъ въ частномъ $a - 4b$. Умноживъ второе выраженіе на это частное, найдемъ искомое н. к.

Итакъ, н. к. $= (a^2 + 5ab + 6b^2)(a - 4b) = a^3 + a^2b - 14ab^2 - 24b^3$.

Примѣчаніе II. Мы нашли, что наим. кр. для A и B равно $\frac{AB}{D}$; отсюда, назвавъ наим. кр. буквою L, имѣемъ

$$L \,.\, D = A \,.\, B,$$

[illegible] веденіе двухъ данныхъ выраженій равно произведенію ихъ наим. [illegible] об. наиб. дѣлитель.

92. [illegible]ли M есть н. к. для A и B, то очевидно, что всякое кратное количества M есть общее кратное для A и B.

93. *Всякое общее кратное двухъ алгебраическихъ выраженій есть кратное ихъ наинизшаго кратнаго.*

Пусть A и B — два данныя выраженія, M — ихъ н. к., и пусть N означаетъ какое-либо общее кратное. Допустимъ, если возможно, что при дѣленіи N на M получается остатокъ R (при частномъ Q). Въ такомъ случаѣ $R = N - QM$. Но N и M дѣлятся на A, сл. и R дѣлится на A; N и M дѣлятся на B, сл. и R дѣлится на B (§ 81). Но R есть выраженіе *низшей* степени чѣмъ M; сл. оказывается общее кратное количествъ A и B низшей степени, чѣмъ ихъ н. к. — нелѣпость; сл. остатокъ R не существуетъ, т.-е. N есть кратное количества M.

94. Пусть требуется найти н. к. нѣсколькихъ многочленовъ, напр., трехъ: A, B и C. Найдемъ н. к. двухъ изъ нихъ, напр. A и B: пусть оно будетъ M. Затѣмъ найдемъ н. к. для M и C; пусть оно будетъ L. Докажемъ, что L и будетъ служить н. к. для A, B и C.

Назовемъ н. кр. A, B и C буквою x. Всякое общее кратное количествъ M и C есть общее кратное и для A, B и C (§ 92); слѣд. L должно дѣлиться на x. Всякое общее кратное A и B есть кратное и для M (§ 93); сл. всякое общее кратное A, B и C есть общее кратное и для M и C; слѣд. x должно дѣлиться на L.

Итакъ, L должно дѣлиться на x, а x на L; поэтому $x = L$, и правило доказано.

Примѣчаніе. — Нахожденіе наим. кр. имѣетъ приложеніе въ приведеніи дробей къ общему знаменателю. О. н. д. въ элементарной алгебрѣ прилагается къ сокращенію дробей; въ Высшей Алгебрѣ онъ имѣетъ другія, важнѣйшія примѣненія, именно въ теоріи уравненій.

ГЛАВА IX.

Алгебраическія дроби.

Опредѣленіе.—Основное свойство алгебраической дроби. Сокращеніе алгебраическихъ дробей и приведеніе къ общему знаменателю.—Четыре основныя дѣйствія надъ дробями.

95. Опредѣленіе. — Мы видѣли, что когда дѣленіе одного алгебраическаго выраженія на другое невозможно, то дѣйствіе только обозначается: дѣлителя пишутъ подъ дѣлимымъ, отдѣляя ихъ горизонтальною чертою. Такимъ образомъ частное отъ раздѣленія A на B изображается въ формѣ

$$\frac{A}{B}.$$

Такое выраженіе называется *алгебраическою дробью*, причемъ дѣлимое получаетъ названіе *числителя*, а дѣлитель *знаменателя*. Итакъ, *алгебраическая дробь есть частное отъ раздѣленія числителя на знаменателя*.

Между дробями — ариѳметическою и алгебраическою есть существенная разница; въ самомъ дѣлѣ, числитель и знаменатель ариѳметической дроби суть числа цѣлыя и абсолютныя, между тѣмъ какъ члены алгебраической дроби могутъ быть какъ цѣлыми, такъ и дробными, какъ положительными, такъ и отрицательными, и вообще какими угодно алгебраическими выраженіями. Такимъ образомъ, понятіе объ алгебраической дроби *общѣе*, нежели объ ариѳметической, а отсюда вытекаетъ необходимость вывода свойствъ алгебраической дроби и доказательства правилъ дѣйствій надъ этими дробями независимо отъ вывода этихъ свойствъ и правилъ для дроби ариѳметической.

Выводъ упомянутыхъ свойствъ и правилъ долженъ вытекать изъ самого опредѣленія алгебраической дроби какъ частнаго отъ раздѣленія числителя на знаменателя.

96. Основное свойство алгебраической дроби состоитъ въ томъ, что величина ея не измѣнится, если числителя и знаменателя умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же количество. Докажемъ это.

Пусть величина дроби $\frac{A}{B}$ равна Q:

$$\frac{A}{B} = Q \ldots (1).$$

Замѣчая, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, имѣемъ

$$A = B \,.\, Q.$$

Означивъ буквою M какое-ниб. количество, умножимъ на него каждую изъ равныхъ величинъ A и B . Q, вслѣдствіе чего получимъ и произведенія равныя:

$$AM = BQM;$$

или, перемѣнивъ мѣста производителей Q и M во второй части,

$$AM = BM \times Q.$$

Это равенство показываетъ, что Q, будучи умножено на BM, даетъ въ произведеніи AM; слѣд. Q есть частное отъ раздѣленія AM на BM; такимъ образомъ:

$$\frac{AM}{BM} = Q.$$

Но Q есть ничто иное какъ $\frac{A}{B}$ [см. (1)]; слѣд.

$$\frac{AM}{BM} = \frac{A}{B} \cdots (2).$$

Это равенство показываетъ, что дробь $\frac{AM}{BM}$ можетъ быть замѣнена дробью $\frac{A}{B}$, т.-е. что *величина дроби не измѣнится, если числитель и знаменатель раздѣлимъ на одно и то же количество.*

На этомъ свойствѣ основано упрощеніе дроби *сокращеніемъ*.

Равенство (2) показываетъ также, что, наоборотъ, дробь $\frac{A}{B}$ можетъ быть [illegible] дробью $\frac{AM}{BM}$, т.-е. что *величина дроби не измѣнится, если числителя и знаменатель помножимъ на одно и то же количество.*

На этомъ свойствѣ основано *приведеніе дробей къ общему знаменателю.*

57. Сокращеніе. Для сокращенія дроби нужно ея числителя и знаменателя раздѣлить на ихъ общаго наивысшаго дѣлителя: отъ этого величина ея не измѣнится, но дробь будетъ приведена въ простѣйшій видъ, такъ какъ частныя отъ раздѣленія ея членовъ на ихъ о. н. д. будутъ количества первыя между собою.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ.

I. Сократить дробь

$$\frac{48a^3b^2x^4z}{60a^2bx^6}.$$

О. н. д. числителя и знаменателя есть $12a^2bx^4$. Раздѣливъ на это количество оба члена дроби, имѣемъ:

$$\frac{4abz}{5x^2}.$$

II. Сократить дробь

$$\frac{36a^5b^2-36a^3b^4}{54a^4b^3-108a^3b^4+54a^2b^5}.$$

Когда ч. и з. суть многочлены, легко поддающіеся разложенію на множители, то о. н. д. для нихъ находимъ этимъ способомъ:

$$\frac{36a^5b^2-36a^3b^4}{54a^4b^3-108a^3b^4+54a^2b^5}=\frac{36a^3b^2(a^2-b^2)}{54a^2b^3(a^2-2ab+b^2)}=\frac{18a^2b^2(a-b).2a(a+b)}{18a^2b^2(a-b)3b(a-b)}.$$

Замѣчая, что о. н. д. членовъ дроби равенъ $18a^2b^2(a-b)$, мы, раздѣливъ на него числителя и знаменателя, получимъ:

$$\frac{2a(a+b)}{3b(a-b)}.$$

III. Сократить дробь

$$\frac{x^{12}+a^{12}}{x^5+ax^4+a^4x+a^5}.$$

Знаменатель $=x^4(x+a)+a^4(x+a)=(x+a)(x^4+a^4)$.

Числитель $=(x^4)^3+(a^4)^3=(x^4+a^4)[(x^4)^2-x^4a^4+(a^4)^2]=$
$=(x^4+a^4)(x^8-x^4a^4+a^8)$.

По раздѣленіи обоихъ членовъ дроби на о. н. д. x^4+a^4, находимъ:

$$\frac{x^8-x^4a^4+a^8}{x+a}.$$

Въ этомъ примѣрѣ о. н. д. былъ x^4+a^4, ибо $x^8-x^4a^4+a^8$, не обращаясь въ ноль при $x=-a$, не дѣлится на $x+a$.

IV. Сократить дробь

$$\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{b^2c^2(b-c)-a^2c^2(a-c)+a^2b^2(a-b)}.$$

Числитель $= c\{b(b - c) - a(a - c)\} + ab(a - b) = c(a - b)(c - a - b) + ab(a - b) = (a - b)\{c(c - a) - bc + ab\} = -(a - b)(a - c)(b - c)$.

Въ § 54, 5, мы видѣли, что знаменатель $= (a - b)(a - c)(b - c)(ab - ac + bc)$. Итакъ, видно, что о. н. д. числителя и знаменателя есть $(a - b)(a - c)(b - c)$; раздѣливъ на него оба члена дроби, получимъ

$$\frac{1}{ab - ac + bc}.$$

V. Сократить дробь

$$\frac{(x + y)^5 - (x^5 + y^5)}{(x + y)^3 - (x^3 + y^3)}.$$

Оба члена числителя и оба члена знаменателя дѣлятся на $x + y$; раздѣливъ ихъ на этотъ биномъ, получимъ дробь

$$\frac{(x + y)^4 - (x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)}{(x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2)}.$$

Раскрывъ скобки въ числителѣ и знаменателѣ и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ

$$\frac{5x^3y + 5x^2y^2 + 5xy^3}{3xy}, \text{ или, сокративъ на } xy, \ \frac{5}{3}(x^2 + xy + y^2).$$

VI. Сократить дробь

$$\frac{2x^3 - 15x^2 + 37x - 15}{x^5 - 8x^4 + 13x^3 + 57x^2 - 198x + 135}.$$

Въ этомъ примѣрѣ разложеніе числителя и знаменателя на множители представляетъ затрудненія; поэтому опредѣляемъ о. н. д. способомъ послѣдовательныхъ дѣленій. Такимъ образомъ найдемъ, что о. н. д. $= x^2 - 7x + 15$. Сокративъ дробь, найдемъ

$$\frac{2x - 1}{x^3 - x^2 - 9x + 9}.$$

98. Приведеніе дробей къ общему знаменателю.—Здѣсь слѣдуетъ различать тѣ же случаи какъ и въ ариѳметикѣ:

1. Если каждые два знаменателя суть выраженія взаимно-простыя, нужно числителя и знаменателя каждой дроби помножать на произведеніе знаменателей прочихъ дробей. Черезъ это общимъ знаменателемъ всѣхъ дробей будетъ произведеніе всѣхъ знаменателей или ихъ наименьшее кратное, т.-е. общій знаменатель будетъ имѣть простѣйшую форму.

Поступая сказаннымъ образомъ надъ дробями

$$\frac{3}{2a}, \ \frac{m}{3b^2} \text{ и } \frac{n}{a + b},$$

знаменатели которыхъ—количества взаимно-простыя, найдемъ:

$$\text{вмѣсто первой дроби } \frac{3.3b^2(a + b)}{2a.3b^2(a + b)}, \text{ или } \frac{9b^2(a + b)}{6ab^2(a + b)},$$

$$\text{вмѣсто второй дроби } \frac{m.2a(a + b)}{3b^2.2a(a + b)}, \text{ или } \frac{2am(a + b)}{6ab^2(a + b)},$$

$$\text{вмѣсто третьей дроби } \frac{n.2a.3b^2}{2a.3b^2(a + b)}, \text{ или } \frac{6ab^2n}{6ab^2(a + b)}.$$

Когда знаменатели данныхъ дробей имѣютъ общихъ множителей, то наименьшее кратное знаменателей опять принимаемъ за общаго знаменателя; затѣмъ дѣлимъ это наим. кр. на знаменателя каждой дроби и полученнымъ частнымъ умножаемъ числителя и знаменателя соотвѣтствующей дроби. Приводимъ примѣры

I. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{4(1-x^2)},\ \frac{b}{8(1-x)},\ \frac{c}{2(1+x)},\ \frac{d}{1+x^2}.$$

Разлагая знаменателей на простые множители, получимъ:

$$4(1-x^2) = 2^2 . (1+x)(1-x);\quad 8(1-x) = 2^3 . (1-x);$$

остальные два знаменателя остаются въ данной формѣ.
Наим. кр. знаменателей, или об. знам. —

$$= 2^3 . (1+x)(1-x)(1+x^2), \text{ или } 8(1-x^4).$$

Раздѣливъ об. зн. на знаменателя первой дроби и умноживъ полученнымъ частнымъ $2(1+x^2)$ оба члена первой дроби, получимъ:

$$\frac{2a(1+x^2)}{8(1-x^4)}.$$

Раздѣливъ об. зн. на знаменателя второй дроби и помноживъ полученнымъ частнымъ $(1+x)(1+x^2)$ оба члена ея, найдемъ

$$\frac{b(1+x)(1+x^2)}{8(1-x^4)}.$$

Поступая подобнымъ же образомъ съ двумя остальными дробями, вмѣсто нихъ получимъ:

$$\frac{4c(1-x)(1+x^2)}{8(1-x^4)} \text{ и } \frac{8d(1-x^2)}{8(1-x^4)}.$$

II. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{1}{x^2-4},\ \frac{1}{x^2-3x+2},\ \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

Разлагая знаменателей на множители, найдемъ:

$$x^2-4=(x+2)(x-2);$$
$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$
$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1).$$

Наим. кратное знаменателей $=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$ или $(x^2-4)(x^2-1)$. Поступая какъ въ примѣрѣ I, найдемъ слѣдующія, соотвѣтственно равныя даннымъ, дроби:

$$\frac{x^2-1}{(x^2-4)(x^2-1)},\ \frac{(x+2)(x+1)}{(x^2-4)(x^2-1)},\ \frac{(x-2)(x-1)}{(x^2-4)(x^2-1)}.$$

III. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)},\ \frac{b}{(b-c)(b-d)(b-a)},\ \frac{c}{(c-d)(c-a)(c-b)},\ \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Здѣсь знаменатели уже даны въ формѣ произведеній простыхъ множителей. Замѣтивъ, что $a - b$, $a - c$, $a - d$ и т. д. получаются изъ $b - a$, $c - a$, $d - a$, . . . умноженіемъ на — 1, замѣняемъ данныя дроби следующими:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)},\quad \frac{-b}{(b-c)(b-d)(a-b)},\quad \frac{c}{(c-d)(a-c)(b-c)},\quad \frac{-d}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

Общій знаменатель $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$. Дѣля его на знаменателя каждой дроби поочередно, и умножая частнымъ оба члена соотвѣтствующей дроби, найдемъ искомыя дроби:

$$\frac{a(b-c)(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};\quad \frac{-b(a-c)(a-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};$$

$$\frac{c(a-b)(a-d)(b-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};\quad \frac{-d(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}.$$

III. Можетъ случиться, что одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ, т.-е. служитъ наим. кратнымъ всѣхъ знаменателей; онъ и будетъ **общимъ знаменателемъ.**

Примѣръ. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{a^2+b^2},\quad \frac{b}{a^2-b^2},\quad \frac{c}{a^4-b^4}.$$

Замѣчая, что $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$, находимъ, что знаменатель третьей дроби есть наим. кр. всѣхъ знаменателей; онъ и будетъ общимъ знаменателемъ. Третью дробь, какъ уже имѣющую общаго знаменателя, оставляемъ безъ перемѣны, а первыя двѣ приводимъ къ общему знаменателю пріемомъ, указаннымъ въ пунктѣ 2. Такимъ образомъ найдемъ, что данныя дроби могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$\frac{a(a^2-b^2)}{a^4-b^4},\quad \frac{b(a^2+b^2)}{a^4-b^4},\quad \frac{c}{a^4-b^4}.$$

99. Сложеніе и вычитаніе дробей. — Различаемъ два случая:

1. Сложить или вычесть дроби съ равными знаменателями:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Положимъ, что

$$\frac{a}{m}=q_1;\quad \frac{b}{m}=q_2;\quad \frac{c}{m}=q_3.$$

Зная, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, имѣемъ

$$a=mq_1,\quad b=mq_2,\quad c=mq_3.$$

Придавая къ равнымъ (a и mq_1) равныя количества (b и mq_2), получимъ и суммы равныя; слѣд.

$$a+b=mq_1+mq_2;$$

вычитая изъ равныхъ ($a + b$ и $mq_1 + mq_2$) равныя, найдемъ и остатки равные; слѣд.

$$a+b-c=mq_1+mq_2-mq_3,$$

Вынося за скобки m,

$$a+b-c=(q_1+q_2-q_3)\,.\,m;$$

$$q_1+q_2-q_3=\frac{a+b-c}{m}.$$

Подставляя q_1, q_2 и q_3 ихъ величинами, находимъ:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Отсюда *правило: чтобы сложить или вычесть дроби съ равными знаменателями, надо сложить или вычесть числители и подъ результатомъ подписать общаго знаменателя.*

2. Когда данныя дроби имѣютъ различныхъ знаменателей, то сперва приводятъ ихъ къ общему знаменателю, а затѣмъ поступаютъ по предыдущему правилу.

Примѣры. I. Найти сумму дробей

$$\frac{a^2-ab}{a+b}+\frac{a^2+ab}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{a}.$$

По приведеніи къ общему знаменателю, имѣемъ

$$\frac{(a^2-ab)(a-b)a+(a^2+ab)(a+b)a+(a^2-b^2)(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)a}=$$

$$\frac{a^4-2a^3b+a^2b^2+(a^4+2a^3b+a^2b^2)+(a^4-2a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)a}=\frac{3a^4+b^4}{a^3-ab^2}.$$

II. Выполнить дѣйствія:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

По приведеніи къ общему знаменателю $(x^2-1)(x^2-4)(x-3)$, имѣемъ послѣдовательно:

$$\frac{x(x+1)(x-2)-(x^2-4)(x-3)+(x^2-1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}=$$

$$\frac{x^3-x^2-2x-(x^3-3x^2-4x+12)+(x^3+2x^2-x-2)}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}=\frac{x^3+4x^2+x-14}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}.$$

Числитель не обращается въ ноль при $x=1$, -1, $+2$, -2 и $+3$, т. е. не дѣлится ни на одного множителя знаменателя, а потому результатъ не подлежитъ дальнѣйшему упрощенію.

III. Упростить выраженіе

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Общій знаменатель $=-(a-b)(b-c)(c-a)$; дѣля его на каждаго изъ знаменателей по порядку, получаемъ частныя:

$$-(b-c),\quad -(c-a),\quad -(a-b).$$

По приведеніи къ общему знаменателю, получимъ

$$\frac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Полагая въ числителѣ послѣдовательно $a=b$, $b=c$ и $c=a$, замѣчаемъ, что онъ въ каждомъ случаѣ обращается въ ноль, а потому дѣлится на $(a-b)$ $(b-c)$ $(c-a)$. Это произведеніе открываемъ въ числителѣ разложеніемъ на множители:

$$a^3c-a^3b-b^3c+ab^3-c^3(a-b)=c(a^3-b^3)-ab(a^2-b^2)-c^3(a-b)=$$
$$=(a-b)\{c(a^2+ab+b^2)-ab(a+b)-c^3\}=$$
$$=(a-b)\{(a^2-c^2)c-ab(a-c)-b^2(a-c)\}=$$
$$=(a-b)(a-c)\{(a+c)c-ab-b^2\}=$$
$$=(a-b)(a-c)\{a(c-b)+(b+c)(c-b)\}=$$
$$=(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Итакъ, данное выраженіе равно

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c.$$

IV. Упростить выраженіе

$$4b+\frac{(a-b)^2}{a}.$$

Если дробь соединена (плюсомъ или минусомъ) съ цѣлымъ выраженіемъ, то, помноживъ цѣлое и раздѣливъ на знаменателя дроби, получимъ сумму или разность двухъ дробей. Такъ, данное выраженіе умноженіемъ и дѣленіемъ $4b$ на a превращаемъ въ

$$\frac{4ab}{a}+\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{4ab+(a-b)^2}{a}=\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{a}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a}=\frac{(a+b)^2}{a}.$$

100. Умноженіе дробей. — Перемножить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Положивъ

$$\frac{a}{b}=p \text{ и } \frac{c}{d}=q,$$

имѣемъ отсюда

$$a=bp \text{ и } c=dq.$$

Помноживъ равныя количества a и bp на равныя c и dq, найдемъ и произведенія равныя; слѣд.

$$ac=bp\,.\,dq.$$

Перемѣнивъ во второй части мѣста сомножителей, получимъ

$$ac=bd\,.\,pq,$$

откуда

$$p\,.\,q=\frac{ac}{bd},$$

а. подставивъ $\frac{a}{b}$ вмѣсто p, и $\frac{c}{d}$ вмѣсто q,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\;\ldots\;(1).$$

Отсюда правило: *чтобы умножить дробь на дробь, надо числителя первой дроби помножить на числителя второй, знаменателя первой на знаменателя второй, и первое произведеніе раздѣлить на второе.*

Если въ равенствѣ (1) положимъ $d=1$, оно обратится въ

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b\times1};$$

замѣтивъ, что $\frac{c}{1}$ есть тоже что c, а $b\times1$ равно b, имѣемъ:

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}.$$

Итакъ, *чтобы умножить дробь на цѣлое выраженіе, надо числителя умножить на это цѣлое, и произведеніе раздѣлить на знаменателя дроби.*

Положимъ въ равенствѣ (1) $b=1$, получимъ

$$\frac{a}{1}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{1\times d},\ \text{или}\ a\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d},$$

уда правило: *для умноженія цѣлаго выраженія на дробь, надо цѣлое умножить на числителя дроби, и произведеніе раздѣлить на ея знаменателя.*

Примѣры. I. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a^2+ab}=\frac{(a^4-b^4)(a-b)}{(a^2-2ab+b^2)(a^2+ab)}=$

$=\frac{b^2)(a+b)(a-b)(a-b)}{(a-b)^2a(a+b)}$. Сокративъ дробь на $(a+b)(a-b)^2$, получимъ

мое произведеніе:

$$\frac{a^2+b^2}{a}.$$

II. $\frac{3b}{a^2-b^2}\times(a+b)=\frac{3b(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{3b}{a-b}.$

III. $(a^4-b^4)\times\frac{2a}{a^2+b^2}=\frac{(a^4-b^4).2a}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2).2a}{a^2+b^2}=$

$$=(a^2-b^2)\,.\,2a.$$

Примѣчаніе.—Доказанное правило распространяется на какое угодно число дробей; такъ

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh};$$

Въ самомъ дѣлѣ, по доказанному: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; умноживъ эту дробь на $\frac{e}{f}$

найдемъ $\frac{ace}{bdf}$; помноживъ эту дробь на четвертую $\frac{g}{h}$, найдемъ окончательное произведенie

$$\frac{aceg}{bdfh}.$$

Примѣръ. Вычислить

$$\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\times\frac{x-y}{x+y}\times\frac{(x+y)^5-x^5-y^5}{3x^2y-3xy^2}.$$

Прилагая предыдущее правило, найдемъ

$$\frac{(x^3+y^3)(x-y)[(x+y)^5-x^5-y^5]}{(x^3-y^3)(x+y)(3x^2y-3xy^2)}.$$

Замѣтивъ, что $(x+y)^5-x^5-y^5=(x+y)^5-(x^5+y^5)=$
$(x+y)(5x^3y+5x^2y^2+5yx^3)=(x+y).5xy.(x^2+xy+y^2)$,

представляемъ произведенie въ видѣ

$$\frac{5xy(x^3+y^3)(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}{3xy(x^3-y^3)(x+y)(x-y)},$$

откуда, по сокращенiи, найдемъ

$$\frac{5(x^3+y^3)}{3(x-y)}.$$

101. Дѣленie дробей.—Пусть требуется раздѣлить $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$.

Положимъ $\frac{a}{b}=p$ и $\frac{c}{d}=q$; имѣемъ отсюда

$$a=bp \quad \text{и} \quad c=dq.$$

Раздѣливъ равныя величины (a и bp) на равныя (c и dq), получимъ равныя; слѣд.

$$\frac{a}{c}=\frac{bp}{dq}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{d}{b}$, найдемъ

$$\frac{ad}{cb}=\frac{bpd}{dqb}.$$

Сокративъ вторую дробь на bd, найдемъ

$$\frac{ad}{bc}=\frac{p}{q}.$$

Подставивъ вмѣсто p и q ихъ величины, получимъ

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\ldots\ldots(1).$$

Отсюда правило: *чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числителя первой дроби умножить на знаменателя второй, а знаменателя пер-*

на числителя второй, и первое произведеніе раздѣлить на второе.

Полагая въ равенствѣ (1) $d = 1$, найдемъ

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a \times 1}{bc} \text{ или } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Откуда слѣдуетъ, что *для раздѣленія дроби на цѣлое выраженіе надо: числителя раздѣлить на произведеніе знаменателя на цѣлое выраженіе.*

Положивъ въ равенствѣ (1) $b = 1$, получимъ

$$\frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{1 \times c}, \text{ или } a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c} \cdot \cdot \cdot (2).$$

Слѣд., *чтобы раздѣлить цѣлое выраженіе на дробь, надо цѣлое умножить на знаменателя дроби и произведеніе раздѣлить на числителя.*

Примѣчаніе I.—Двѣ величины A и B называются *взаимно-обратными*, если ихъ произведеніе равно 1. Итакъ, когда A . B = 1, то A есть количество обратное величинѣ B, а B обратно количеству A. Изъ равенства AB = 1 находимъ

$$A = \frac{1}{B} \text{ и } B = \frac{1}{A},$$

откуда заключаемъ, что обратная данной величины равна частному отъ раздѣленія 1 на эту величину.

Очевидно, что дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ взаимно-обратны, потому что

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Имѣя въ виду это замѣчаніе, можемъ правило дѣленія на дроби выразить въ слѣдующей формѣ. Изъ правила умноженія дробей слѣдуетъ, что $\frac{ad}{bc}$ и $\frac{ad}{c}$ можно представить въ видѣ произведеній: $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ и $a \times \frac{d}{c}$; а потому равенства (1) и (2) можно написать въ видѣ:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \text{ и } a : \frac{c}{d} = a \times \frac{d}{c};$$

откуда видно, что для раздѣленія цѣлаго или дробнаго выраженія на дробь надо дѣлимое умножить на величину обратную дѣлителю.

Примѣчаніе II.—Мы нашли, что

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Величина дроби $\frac{ad}{bc}$ не измѣнится, если числителя и знаменателя раздѣлимъ на cd; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{ad}{cd}}{\frac{bc}{cd}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}.$$

Слѣд. при дѣленіи дроби на дробь можно поступать еще слѣдующимъ образомъ: числителя первой дроби раздѣлить на числителя второй, а знаменателя первой на знаменателя второй, и первое частное раздѣлить на второе.

Очевидно, что этотъ пріемъ слѣдуетъ примѣнять только тогда, когда числит. и знамен. дѣлимаго дѣлятся нацѣло на числ. и знам. дѣлителя.

Примѣры. I. $\frac{2a(ab-b^2)}{(a+b)^2} : a(a^2-b^2) = \frac{2ab(a-b)}{(a+b)^2 a(a-b)(a+b)} = \frac{2b}{(a+b)^3}$.

II. $7ax : \frac{14ax}{5by} = \frac{7.5axby}{14ax} = \frac{5by}{2}$.

III. $\frac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2} : \frac{(x+a)^2}{(x-a)^3} = \frac{(x-a)^4(x+a)}{(x-a)^2(x+a)^2} = \frac{(x-a)^2}{x+a}$.

IV. $\frac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3-y^3} : \frac{(a+x)^2}{x^2+xy+y^2} = \frac{(a+x)^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} : \frac{(a+x)^2}{x^2+xy+y^2}$.

Здѣсь числитель и знаменатель первой дроби дѣлятся соотвѣтственно на числ. и знам. второй, сл. частное $=$

$$\frac{(a+x)^3 : (a+x)^2}{[(x-y)(x^2+xy+y^2)] : (x^2+xy+y^2)} = \frac{a+x}{x-y}.$$

102. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ дѣйствія надъ дробями.

I. Упростить выраженіе

$$\frac{a-\frac{a-b}{1+ab}}{1+\frac{a(a-b)}{1+ab}}.$$

Умножаемъ прежде всего числителя и знаменателя данной дроби на $1+ab$, чтобы привести ихъ къ цѣлому виду; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{a(1+ab)-(a-b)}{1+ab+a(a-b)}.$$

Раскрывъ скобки въ числителѣ и знаменателѣ и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ

$$\frac{a^2b+b}{1+a^2}, \text{ или } \frac{b(1+a^2)}{1+a^2}, \text{ или } b.$$

Данное выраженіе равно, слѣдовательно, b.

II. Упростить выраженіе

$$\frac{\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(a^2-\frac{a^3+ab^2}{a+b}\right)}{1-\frac{a}{a+b}}$$

Чтобы привести оба члена дроби къ цѣлому виду, множимъ ихъ на $a(a+b)$; при чемъ въ числителѣ первый множитель умножаемъ на a, второй на $a+b$. Такимъ образомъ найдемъ

$$\frac{(a^2-b^2)(a^3+a^2b-a^3-ab^2)}{a(a+b)-a^2} = \frac{(a^2-b^2)ab(a-b)}{ab} = (a^2-b^2)(a-b).$$

III. Помножить

$$\frac{4x^3y^2}{5a^3}-\frac{3x^2y^3}{2a^2b}+\frac{2xy^4}{3ab^2}-\frac{y^5}{b^3}\quad\text{на}\quad\frac{2x^2y}{3a^2}-\frac{3xy^2}{5ab}-\frac{3y^3}{2b^2},$$

гдѣ оба сомножителя расположены по нисходящимъ степенямъ x.

$$\begin{array}{rrrrrr}
\frac{4x^3y^2}{5a^3} & -\frac{3x^2y^3}{2a^2b} & +\frac{2xy^4}{3ab^2} & -\frac{y^5}{b^3} & & \\
\frac{2x^2y}{3a^2} & -\frac{3xy^2}{5ab} & -\frac{3y^3}{2b^2} & & & \\
\hline
\frac{8x^5y^3}{15a^5} & -\frac{x^4y^4}{a^4b} & +\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2} & -\frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} & & \\
 & -\frac{12x^4y^4}{25a^4b} & +\frac{9x^3y^5}{10a^3b^2} & -\frac{2x^2y^6}{5a^2b^3} & +\frac{3xy^7}{5ab^4} & \\
 & & -\frac{12x^3y^5}{10a^3b^2} & +\frac{9x^2y^6}{4a^2b^3} & -\frac{xy^7}{ab^4} & +\frac{3y^8}{2b^5} \\
\hline
\frac{8x^5y^3}{15a^5} & -\frac{37x^4y^4}{25a^4b} & +\frac{13x^3y^5}{90a^3b^2} & +\frac{71x^2y^6}{60a^2b^3} & -\frac{2xy^7}{5ab^4} & +\frac{3y^8}{2b^5}.
\end{array}$$

IV. Раздѣлимъ полученный результатъ, это будетъ примѣръ дѣленія дробныхъ многочленовъ, расположенныхъ по степенямъ главной буквы.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
\frac{8x^5y^3}{15a^5} & -\frac{37x^4y^4}{25a^4b} & +\frac{13x^3y^5}{90a^3b^2} & +\frac{71x^2y^6}{60a^2b^3} & -\frac{2xy^7}{5ab^4} & +\frac{3y^8}{2b^5} & \frac{4x^3y^2}{5a^3}-\frac{3x^2y^3}{2a^2b}+\frac{2xy^4}{3ab^2}-\frac{y^5}{b^3} \\
\cline{7-7}
\mp\frac{8x^5y^3}{15a^5} & \pm\frac{x^4y^4}{a^4b} & \mp\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2} & \pm\frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} & & & \frac{2x^2y}{3a^2}-\frac{3xy^2}{5ab}-\frac{3y^3}{2b^2}. \\
\hline
 & -\frac{12x^4y^4}{25a^4b} & -\frac{3x^3y^5}{10a^3b^2} & +\frac{37x^2y^6}{20a^2b^3} & -\frac{2xy^7}{5ab^4} & & \\
 & \pm\frac{12x^4y^4}{25a^4b} & \mp\frac{9x^3y^5}{10a^3b^2} & \pm\frac{2x^2y^6}{5a^2b^3} & \mp\frac{3xy^7}{5ab^4} & & \\
\hline
 & & -\frac{6x^3y^5}{5a^3b^2} & +\frac{9x^2y^6}{4a^2b^3} & -\frac{xy^7}{ab^4} & +\frac{3y^8}{2b^5} & \\
 & & \pm\frac{6x^3y^5}{5a^3b^2} & \mp\frac{9x^2y^6}{4a^2b^3} & \pm\frac{xy^7}{ab^4} & \mp\frac{3y^8}{2b^5} & \\
\hline
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Опредѣленіе членовъ частнаго:

1. $\frac{8x^5y^3}{15a^5}:\frac{4x^3y^2}{5a^3}=\frac{8x^5y^3:4x^3y^2}{15a^5:5a^3}=\frac{2x^2y}{3a^2}$

2. $-\frac{12x^4y^4}{25a^4b}:\frac{4x^3y^2}{5a^3}=-\frac{12x^4y^4:4x^3y^2}{25a^4b:5a^3}=-\frac{3xy^2}{5ab}$

3. $-\frac{6x^3y^5}{5a^3b^2}:\frac{4x^3y^2}{5a^3}=-\frac{6x^3y^5:4x^3y^2}{5a^3b^2:5a^3}=-\frac{3y^3}{2b^2}.$

ГЛАВА X.

Возвышеніе въ степень.

Опредѣленіе. Правила знаковъ и показателей. Степень произведенія и дроби.— Возвышеніе одночлена въ степень.—Квадратъ и кубъ многочлена.

103. Опредѣленіе. — Въ этой главѣ мы разсмотримъ возвышеніе въ цѣлую положительную степень.

Возвысить количество въ цѣлую положительную степень значитъ повторить его множителемъ столько разъ, сколько въ показателѣ степени находится единицъ.

Такъ: $a^2 = a . a$; $a^3 = a . a . a$; $a^n = a . a . a . . .$ (n разъ).

Такимъ образомъ, возвышеніе въ степень есть частный случай умноженія, — случай, когда всѣ производители равны. Количество, возвышаемое въ степень, называется *основаніемъ степени*. Такъ, въ формулѣ a^3, a есть основаніе; въ выраженіи x^m основаніе есть x.

104. Правило знаковъ. Правило знаковъ при возвышеніи въ степень вытекаетъ непосредственно изъ правила знаковъ при умноженіи; но послѣднее остается одинаковымъ, будутъ ли производители даны съ ихъ окончательными знаками, или же окончательные ихъ знаки неизвѣстны, поэтому и правило знаковъ при возвышеніи въ степень въ обоихъ случаяхъ будетъ одно и то же.

1. *Случай возвышенія въ четную степень.* Пусть требуется количества $+a$ и $-a$ возвысить въ четную степень $2n$; это значитъ и то и другое основаніе надо повторять множителемъ $2n$ разъ. $+a$, взятое $2n$ разъ множителемъ, дастъ $+a^{2n}$; взявъ $(-a)$ множителемъ $2n$ разъ, можемъ все произведеніе разбить на n паръ, изъ которыхъ каждая дастъ знакъ $+$, а потому и искомая степень имѣетъ знакъ $+$:

$$\underbrace{(-a)(-a)}_{+} . \underbrace{(-a)(-a)}_{+} . \underbrace{(-a)(-a)}_{+} . \; . \; . \underbrace{(-a)(-a)}_{+},$$

слѣд. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$. Итакъ

$$(\pm a)^{2n} = +a^{2n},$$

т.-е. *четная степень всегда даетъ знакъ +, будетъ ли передъ основаніемъ знакъ + или —.*

2. *Случай возвышенія въ нечетную степень.* Если передъ основаніемъ находится знакъ +, то изъ правила знаковъ при умноженіи прямо слѣдуетъ, что и произведеніе будетъ имѣть тотъ же знакъ, слѣд.

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1} \; . \; . \; . \; (1)$$

Если передъ основаніемъ будетъ знакъ —, то возвышая $-a$ въ нечетную степень $2n+1$, мы получимъ произведеніе $2n+1$ множителей, изъ которыхъ составится n паръ, дающихъ знакъ $+$, и останется одинъ множитель $(-a)$, вслѣдствіе чего произведеніе будетъ имѣть знакъ $-$:

$$\underbrace{(-a)(-a)}_{+} . \underbrace{(-a)(-a)}_{+} . \underbrace{(-a)(-a)}_{+} . \; . \; . \underbrace{(-a)(-a)}_{+} . (-a),$$

Итакъ $$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Изъ (1) и (2) слѣдуетъ, что *нечетная степень имѣетъ такой же знакъ какъ и основаніе.*

Примѣры. $(-3)^2 = +9$; $(+5)^4 = +625$; $(+4)^3 = +64$; $(-4)^3 = -64$; $(+a)^4 = +a^4$; $(+a)^5 = +a^5$; $(-a)^5 = -a^5$, и т. д.

105. Правило показателей. — Пусть требуется a^m возвысить въ степень p, гдѣ a — какое угодно количество, а m и p — числа цѣлыя и положительныя. Возвысить a^m въ степень p значитъ повторить это выраженіе множителемъ p разъ; слѣд.

$$(a^m)^p = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \,.\;.\;.\; a^m \; (p \text{ разъ}).$$

Но при умноженіи показатели складываются, слѣд. вторую часть равенства можно представить въ видѣ $a^{m+m+m+\cdots}$, гдѣ m берется слагаемымъ p разъ; m, повторенное слагаемымъ p разъ, даетъ mp; слѣд.

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

Отсюда правило: *для возвышенія степени въ новую степень нужно показателя возвышаемаго количества помножить на показателя новой степени.*

Такъ: $$(a^4)^5 = a^{20};\; (a^{m-1})^{m+1} = a^{m^2-1} \text{ и т. д.}$$

106. Возвышеніе произведенія въ степень. — Пусть требуется произведеніе abc возвысить въ m-ую степень; это значитъ — повторить abc множителемъ m разъ; слѣд.

$(abc)^m = abc \,.\, abc \,.\, abc \,.\;.\;.\; abc$ (гдѣ abc взято m разъ): перемѣняя мѣста производителей, имѣемъ

$$abc \,.\, abc \,.\;.\;.\; abc = aaa \,.\;.\;.\; a \times bbb \,.\;.\;.\; b \times ccc \,.\;.\;.\; c;$$

здѣсь каждая изъ буквъ a, b и c берется множителемъ m разъ, слѣд. послѣднее выраженіе въ сокращенномъ видѣ — $a^m b^m c^m$. Итакъ

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Отсюда правило: *чтобы возвысить въ степень произведеніе должно каждаго множителя отдѣльно возвысить въ требуемую степень и результаты перемножить.*

107. Возвышеніе въ степень дроби. — Пусть требуется дробь $\frac{a}{b}$ возвысить въ m-ую степень; это значитъ дробь $\frac{a}{b}$ повторить множителемъ m разъ. По правилу умноженія дробей имѣемъ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \;.\;.\;.\; \frac{a}{b} \,(m \text{ разъ}) = \frac{a.a.a \;.\;.\;.\; a(m \text{ разъ})}{b.b.b \;.\;.\;.\; b(m \text{ разъ})} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Итакъ, $$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

т.-е. *для возвышенія дроби въ степень слѣдуетъ возвысить въ данную степень числителя и знаменателя отдѣльно, и степень числителя раздѣлить на степень знаменателя.*

По этому правилу найдемъ: $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$ и т. п.

108. Возвышеніе одночлена въ степень. — Пусть требуется одночленъ $2a^3b^5c^md$ возвысить въ пятую степень. Для этого надо каждаго изъ множителей 2, a^3, b^5, c^m и d возвысить въ данную степень и результаты перемножить, причемъ при возвышеніи степени въ данную степень — показателей перемножать. Такимъ образомъ, послѣдовательно найдемъ:

$$(2a^3b^5c^md)^5 = 2^5 . (a^3)^5 . (b^5)^5 . (c^m)^5 . d^5 = 32a^{15}b^{25}c^{5m}d^5.$$

Итакъ, *чтобы возвысить въ степень одночленъ, должно возвысить въ данную степень его коэффиціентъ, а показателя каждаго изъ буквенныхъ множителей умножить на показателя степени.*

При возвышеніи въ степень дроби нужно такимъ образомъ поступать съ числителемъ и знаменателемъ. Такъ, напр., послѣдовательно получимъ

$$\left(\frac{4a^3b^2c^{m-2}}{7df^4}\right)^3 = \frac{(4a^3b^2c^{m-2})^3}{(7df^4)^3} = \frac{64a^9b^6c^{3m-6}}{343d^3f^{12}}.$$

109. Для возвышенія многочлена въ какую угодно степень служитъ особая формула, извѣстная подъ именемъ формулы Ньютона. Она будетъ выведена впослѣдствіи; въ этой главѣ мы ограничимся выводомъ чаще употребляемыхъ формулъ квадрата и куба многочлена.

110. Квадратъ многочлена.—Мы видѣли, что каковы бы ни были количества a и b по знаку, всегда имѣемъ

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Взявъ триномъ $a+b+c$ и разсматривая на время $a+b$ какъ одинъ членъ, найдемъ послѣдовательно

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Послѣдняя формула показываетъ, что квадратъ тринома состоитъ изъ алгебраической суммы: квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній каждаго члена на каждый, за нимъ слѣдующій. Докажемъ *общность* этого закона, т.-е. что онъ справедливъ для многочлена, состоящаго изъ сколькихъ угодно членовъ; а для этого, *допустивъ, что законъ вѣренъ для многочлена, состоящаго изъ n членовъ, докажемъ, что онъ останется вѣренъ и для многочлена, содержащаго однимъ членомъ больше.*

Итакъ, допускаемъ, что замѣченный для квадрата тринома законъ вѣренъ для полинома $a+b+c+d+\dots+i+h$, состоящаго изъ n членовъ, и возьмемъ полиномъ $a+b+c+d+\dots+i+h+k$, содержащій $n+1$ членъ. Принявъ на время сумму $a+b+\dots+i+h$ первыхъ n членовъ за одинъ членъ, а весь многочленъ $a+b+\dots+i+h+k$ за двучленъ, по формулѣ квадрата бинома напишемъ: $[(a+b+c+d+\dots+i+h)+k]^2$
$= (a+b+c+d+\dots+i+h)^2 + 2(a+b+c+\dots+i+h)k + k^2$

Но, по допущенію, $(a+b+c+d+\dots+i+h)^2$ состоитъ изъ: 1) суммы квадратовъ всѣхъ членовъ отъ a до h включительно, т.-е. изъ $a^2+b^2+c^2+d^2+\dots+i^2+h^2$; и 2) суммы удвоенныхъ произведеній каждаго изъ членовъ a, b, c, ... i, h на каждый за нимъ слѣдующій, т.-е. $2ab+2ac+2ad+\dots+2ai+2ah+2bc+2bd+\dots+2ih$. Всѣ эти члены написаны во второй части равенства (A) влѣво отъ вертикальной черты. Прибавивъ сюда $2(a+b+\dots+h)k$, т.-е. алгебраическую сумму удвоенныхъ произведеній первыхъ n членовъ на добавленный членъ k, и квадратъ k^2 этого новаго члена, получимъ:

$$
\begin{array}{lrl|ll}
(A)\ (a+b+c+d+\dots+i+h+k)^2 = & a^2+b^2+c^2+d^2+\dots+i^2+h^2 & & +k^2 & \dots\alpha) \\
 & +2ab+2ac+2ad+\dots+2ai+2ah & & +2ak & \dots\beta) \\
 & +2bc+2bd+\dots+2bi+2bh & & +2bk & \dots\gamma) \\
 & +2cd+\dots+2ci+2ch & & +2ck & \dots\delta) \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots & \vdots \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots & \vdots \\
 & +2ih & & +2ik & \dots\theta) \\
 & & & +2hk & \dots\iota)
\end{array}
$$

Отсюда видно, что квадратъ новаго многочлена, содержащаго $n+1$ членъ, состоитъ: 1) изъ суммы квадратовъ всѣхъ его членовъ отъ перваго до послѣдняго включительно (строка α), 2) изъ алгебраической суммы удвоенныхъ произведеній — перваго члена на каждый за нимъ слѣдующій (строка β), второго члена на каждый, [illegible] (γ), [illegible] третьяго члена отъ конца на оба, [illegible] на послѣдній (ι). Однимъ словомъ, [illegible] алгебраическая сумма квадратовъ всѣхъ [illegible] удвоенныхъ произведеній каждаго его члена **на каждый за нимъ слѣдующій.**

Такимъ образомъ, допустивъ, что законъ вѣренъ для многочлена, содержащаго n членовъ, мы доказали, что онъ вѣренъ и для полинома, имѣющаго однимъ членомъ больше. Но вначалѣ мы видѣли, что законъ вѣренъ для трехчлена, слѣд., по доказанному, онъ вѣренъ и для четырехчлена; а будучи вѣренъ для четырехчлена, онъ вѣренъ, по доказанному, и для пятичлена и т. д. — однимъ словомъ, для *всякаго* многочлена. Итакъ: *квадратъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній каждаго члена на каждый за нимъ слѣдующій.*

Новый методъ доказательства, съ которымъ мы здѣсь впервые встрѣтились, называется *способомъ заключенія отъ n къ $n+1$*; у англійскихъ математиковъ онъ извѣстенъ подъ именемъ *метода математической* или *демонстративной индукціи.* Изъ предыдущаго видно, что методъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ: сначала справедливость доказываемаго закона подтверждается на частномъ примѣрѣ, какъ напр. у насъ на трехчленѣ; затѣмъ, — и это существенная часть доказательства по этому способу, — доказывается, что если теорема вѣрна для какого-либо случая (напр. для n — члена), то она вѣрна и для *ближайшаго* случая (въ нашей теоремѣ — для $n+1$ — члена); отсюда слѣдуетъ, что будучи вѣрна въ одномъ случаѣ, она вѣрна въ ближайшемъ къ нему, затѣмъ въ случаѣ — ближайшемъ къ послѣднему и т. д.; слѣдовательно, теорема вѣрна и для всѣхъ случаевъ, слѣдующихъ за тѣмъ, съ котораго мы начали.

Изобрѣтеніе этого способа приписываютъ швейцарскому математику *Бернулли.*

111. Сгруппировавъ члены квадрата полинома иначе, можемъ дать ему слѣдующій видъ:

$$(a+b+c+d+\cdots+i+h)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+2(a+b+c+d)e+e^2+\cdots+h^2.$$

Откуда видно, что квадратъ многочлена равенъ: квадрату 1-го члена, + удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й, + квадратъ 2-го, + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й, + квадратъ 3-го, + удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й, + квадратъ четвертаго и т. д.

Въ этой формѣ квадратъ многочлена примѣняется при извлеченіи квадратнаго корня изъ многочлена.

112. Примѣръ. Найти $(4a^2x^3-7a^3x^2-6a^4x+a^5)^2$.

Примѣняя первую формулу, найдемъ

$$\begin{aligned}&16a^4x^6+49a^6x^4+36a^8x^2+a^{10}\\&-56a^5x^5-48a^6x^4+8a^7x^3\\&+84a^7x^3-14a^8x^2\\&-12a^9x;\end{aligned}$$

сдѣлавъ приведеніе и расположивъ члены по убывающимъ степенямъ буквы x, получимъ

$$16a^4x^6-56a^5x^5+a^6x^4+92a^7x^3+22a^8x^2-12a^9x+a^{10}.$$

Примѣчаніе. Если сумму квадратовъ членовъ полинома изобразить сокращенно знакомъ Σa^2, а въ суммѣ удвоенныхъ произведеній вынести за скобки 2, выраженіе же въ скобкахъ, равное алгебраической суммѣ произведеній каждаго члена на каждый, за нимъ слѣдующій, изобразить въ формѣ Σab, то формулу квадрата многочлена можно представить въ сокращенной формѣ такъ:

$$(a+b+c+\cdots+i+h)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab.$$

113 Кубъ многочлена — Въ § 36, IV мы нашли, что $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. На основаніи этой формулы, взявъ триномъ $a+b+c$ и принявъ на время $a+b$ за одинъ членъ, имѣемъ,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+(3a^2+6ab+3b^2)c+3ac^2+3bc^2+c^3\\&=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.\end{aligned}$$

Такимъ же образомъ, взявъ четырехчленъ и возвысивъ его въ кубъ, нашли бы:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3&\\+3a^2b+3a^2c+3a^2d&\\+3b^2a+3b^2c+3b^2d&\\+3c^2a+3c^2b+3c^2d&\\+3d^2a+3d^2b+3d^2c&\\+6abc+6abd+6acd&\\+6bcd&\end{aligned}$$

Изъ этихъ частныхъ случаевъ видно, что кубъ взятыхъ въ нихъ полиномовъ состоитъ изъ алгебраической суммы: кубовъ всѣхъ членовъ, утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена на каждый изъ остальныхъ, и ушестеренныхъ произведеній этихъ членовъ, взятыхъ по три.

Докажемъ теперь, что если этотъ законъ вѣренъ для полинома объ n членахъ $a+b+c+d+\cdots+g+i+h$, то онъ будетъ вѣренъ и для полинома объ $n+1$ членахъ $a+b+c+d\cdots+g+i+h+k$. Принявъ на время $a+b+c+\cdots+i+h$ за одинъ членъ, по формулѣ куба бинома получимъ

$$(a+b+c+d+\cdots+g+i+h+k)^3=(a+b+c+d+\cdots+i+h)^3+3(a+b+c+\cdots+i+h)^2k+3(a+b+c+d+\cdots+i+h)k^2+k^3\cdots(1).$$

По допущенію, $(a+b+c+d+\cdots+i+h)^3$ состоитъ изъ: 1) суммы кубовъ всѣхъ членовъ отъ a до h включительно, 2) суммы утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена $a, b, \ldots, h$ на каждый изъ остальныхъ, и 3) ушестеренныхъ произведеній этихъ членовъ, взятыхъ по три. Всѣ эти члены написаны нами влѣво отъ вертикальной черты; вправо же отъ нея прибавлены остальные члены выраженія:

$$3(a+b+c+\cdots+h)^2k+3(a+b+c+\cdots+h)k^2+k^3.$$

[illegible] получимъ:

$$\begin{array}{rl|ll}
 & (a+b+c+d+\cdots+g+i+h+k)^3= & & \\
 & a^3+b^3+c^3+\cdots+i^3+h^3 & +k^3 & \alpha) \\
 & +3a^2b+3a^2c+\cdots\cdots+3a^2h & +3a^2k & \beta) \\
 & +3b^2a+3b^2c+\cdots\cdots+3b^2h & +3b^2k & \gamma) \\
 & +3c^2a+3c^2b+\cdots\cdots+3c^2h & +3c^2k & . \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & . \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & . \\
 & +3h^2a+3h^2b+\cdots\cdots+3h^2i & +3h^2k & \kappa) \\
 & & +3k^2a+3k^2b+3k^2c+\cdots+3k^2h & \lambda) \\
 & +6abc+6abd+\cdots\cdots+6gih & +6abk+6ack+\cdots+6ihk & \mu)
\end{array}$$

Отсюда видно, что кубъ новаго многочлена объ $n+1$ членахъ содержитъ: 1) сумму кубовъ всѣхъ членовъ отъ a до k включительно (строка α); 2) алгебраическую сумму утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена отъ a до k на каждый изъ остальныхъ (строки $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$); 3) алгебр. сумму ушестеренныхъ произведеній всѣхъ членовъ $a, b, c, \ldots, h, k$, взятыхъ по три. Однимъ словомъ, законъ, предположенный вѣрнымъ для многочлена объ n членахъ, оказывается вѣрнымъ и для многочлена, имѣющаго однимъ членомъ больше.

Но прямое возвышеніе въ кубъ показало, что онъ вѣренъ для четырехчлена, слѣд. онъ вѣренъ и для пятичлена; а потому и для шестичлена и т. д. Общность закона такимъ образомъ доказана.

Сокращенно законъ этотъ выражается формулою:

$$(a+b+c+d+\cdots+i+h+k)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc.$$

114. Сгруппировавъ иначе члены второй части, можно написать:

$$(a+b+c+\cdots+i+h+k)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+3(a+b+c)^2d+\cdots+k^3.$$

Въ этой формѣ теорема примѣняется при извлеченіи кубичныхъ корней изъ многочленовъ.

115. Примѣръ. Найти $(5x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - a^3)^3$.

Примѣняя правило § 113, найдемъ:

$$\begin{aligned}
&125x^9 - 27a^3x^6 + 8a^6x^3 - a^9\\
&- 225ax^8 + 150a^2x^7 - 75a^3x^6\\
&+ 135a^2x^7 + 54a^4x^5 - 27a^5x^4\\
&+ 60a^4x^5 - 36a^5x^4 - 12a^7x^2\\
&+ 15a^6x^3 - 9a^7x^2 + 6a^8x - 180a^3x^6 + 90a^4x^5 - 60a^5x^4 + 36a^6x^3.
\end{aligned}$$

Сдѣлавъ приведеніе и расположивъ члены по убывающимъ степенямъ буквы x, получимъ:

$$125x^9 - 225ax^8 + 285a^2x^7 - 282a^3x^6 + 204a^4x^5 - 123a^5x^4 + 59a^6x^3 - \\ - 21a^7x^2 + 6a^8x - a^9.$$

ГЛАВА XI.

Извлеченіе корня.

Опредѣленіе.—Правило знаковъ.—Правило показателей.—Корень изъ произведенія и дроби.—Извлеченіе корня изъ одночленовъ.

116. Опредѣленіе. — Мы видѣли, что *корнемъ n-го порядка изъ A называется такое количество r, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, даетъ A*. Выражая это количество знакомъ $\sqrt[n]{A}$, имѣемъ, по опредѣленію, два равенства:

$$\sqrt[n]{A} = r \quad \text{и} \quad r^n = A,$$

имѣющія одинаковое значеніе.

Символъ $\sqrt[n]{\ }$ называется *радикаломъ порядка n*; *n—показателемъ* корня; если показатель n равенъ 2, его не пишутъ.

Дѣйствіе нахожденія корня называется *извлеченіемъ корня*.

Въ этой главѣ мы займемся выводомъ основныхъ правилъ извлеченія корня *цѣлаго положительнаго порядка*.

117. Правило знаковъ. — Слѣдуетъ разсмотрѣть 4 случая, смотря по тому, будетъ ли подкоренное количество положительное или отрицательное, а показатель корня — четный или нечетный.

1. *Корень четнаго порядка изъ положительнаго количества имѣетъ два значенія, одинаковыя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку*.

Такъ квадратный корень изъ $+9$ имѣетъ два значенія: $+3$ и -3. То и другое удовлетворяетъ данному выше опредѣленію корня, потому что какъ $(+3)^2 = +9$, такъ и $(-3)^2 = +9$. Такимъ образомъ можно написать, что $\sqrt{+9} = \pm 3$ (читается: квадр. корень изъ $+9$ равенъ плюсъ или минусъ 3).

[illegible] четвертаго порядка изъ $+16$ также имѣетъ два значенія: $+2$ и [illegible] что какъ $(+2)^4 = +16$, такъ и $(-2)^4 = +16$. Итакъ $\sqrt[4]{+16} = \pm 2$. Вообще

$$\sqrt[2n]{+a^{2n}} = \pm a.$$

[illegible] что и $(+a)^{2n} = +a^{2n}$, и $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.

[illegible] *Корень нечетнаго порядка изъ положительнаго количества есть величина положительная.*

Такъ $\sqrt[3]{+8} = +2$, потому что $(+2)^3 = +8$. Также $\sqrt[3]{+125} = +5$, [illegible] $(+5)^3 = +125$. Очевидно, что первый корень не можетъ равняться -2, а второй -5, [illegible] числа не удовлетворяютъ опредѣленію корня; въ [illegible] -2 и -5, будучи возвышены въ кубъ, даютъ -8 и -125. Вообще

$$\sqrt[2n+1]{+a^{2n+1}} = +a,$$

[illegible] $+a^{2n+1}$; между тѣмъ какъ $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

[illegible] *Корень нечетнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина отрицательная.*

Такъ $\sqrt[3]{-8} = -2$, потому что $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[3]{-64} = -4$, ибо $(-4)^3 = -64$. Вообще

$$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a,$$

[illegible] $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$; между тѣмъ какъ $(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$.

4. *Корень четнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина мнимая.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется извлечь $\sqrt{-25}$. Искомый корень, если бы онъ былъ возможенъ, по абсолютной величинѣ долженъ быть равенъ 5; но ни $+5$, ни -5, будучи возвышены въ квадратъ, не даютъ -25, такъ что $\sqrt{-25}$ не можетъ быть выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Такія величины называютъ *мнимыми*. Въ противоположность имъ, обыкновенныя положительныя и отрицательныя количества, съ которыми мы до сихъ поръ имѣли дѣло, называютъ *дѣйствительными*.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что правило знаковъ при извлеченіи корня можетъ быть выражено такъ:

Корень нечетнаго порядка имѣетъ знакъ подкоренного количества; корень четнаго порядка изъ положительнаго количества имѣетъ двойной знакъ ($\pm$); *корень четнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина мнимая.*

118. Относительно *двойного знака* необходимо замѣтить, что его слѣдуетъ ставить только тогда, когда происхожденіе подкоренного количества остается неизвѣстнымъ. Напр., $a^2 - 2ab + b^2$ можетъ явиться какъ результатъ возвышенія въ квадратъ или разности $a - b$, или $b - a$, такъ что $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm(a - b)$. Но если требуется извлечь квадратный корень изъ $(a - b)^2$, то не должно полагать $\sqrt{(a - b)^2} = \pm(a - b)$, но приписывать ему *только одно* значеніе $a - b$. Точно такъ же: $\sqrt{(+a)^2} =$ только $+a$, а $\sqrt{(-a)^2}$ только $-a$

Относительно правила знаковъ при извлеченіи корня слѣдуетъ еще замѣтить, что данное нами въ предыдущемъ § правило—далеко неполное. Въ главѣ XXIX будетъ доказано, что корень изъ какого угодно числа имѣетъ столько различныхъ алгебраическихъ значеній, сколько единицъ въ показателѣ корня; такъ, кубичный корень имѣетъ *три* различныхъ значенія, корень четвертаго порядка—*четыре* и т. д.

Примѣчаніе. Въ предстоящемъ намъ изложеніи преобразованій корней мы будемъ разсматривать только такъ называемыя *ариѳметическія величины корней*, т. е. какъ *подкоренныя количества*, такъ и *самые корни* будемъ брать *положительные*.

119 Правило показателей. — Пусть требуется извлечь корень $n^{-\text{го}}$ порядка изъ a^p, гдѣ a — нѣкоторое положительное количества, а n и p, сверхъ того, числа цѣлыя. Искомый корень долженъ представлять нѣкоторую степень буквы a; назвавъ неизвѣстнаго показателя этой степени черезъ x, имѣемъ равенство

$$\sqrt[n]{a^p} = a^x.$$

По опредѣленію корня, послѣдній, будучи возвышенъ въ степень, изображаемую показателемъ корня, даетъ подкоренное количество, а потому

$$(a^x)^n = a^p;$$

или по правилу возвышенія степени въ степень:

$$a^{xn} = a^p.$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы показатели обѣихъ частей были равны, т.-е. $xn = p$, откуда

$$x = \frac{p}{n}.$$

Итакъ
$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.$$

Отсюда правило: *для извлеченія корня изъ степени должно показателя степени раздѣлить на показателя корня.*

Такъ напр. $\sqrt{a^6} = a^3$; $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$; $\sqrt[4]{(a+b)^8} = (a+b)^2$; и т. д.

120. Корень изъ произведенія. — Пусть требуется извлечь корень $n^{-\text{го}}$ порядка изъ произведенія ABC. Докажемъ, что для этого *должно извлечь корень даннаго порядка изъ каждаго производителя отдѣльно и результаты перемножить*, т.-е. что

$$\sqrt[n]{ABC} = \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \ldots (1)$$

Дѣйствительно, если окажется, что вторая часть равенства, будучи возвышена въ $n^{-\text{ую}}$ степень, дастъ ABC, то, согласно съ опредѣленіемъ корня, этимъ и будетъ доказано, что она въ самомъ дѣлѣ представляетъ корень $n^{-\text{го}}$ порядка изъ ABC. Итакъ, возвышаемъ $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C}$ въ $n^{-\text{ую}}$ степень; замѣтивъ, что для этого каждаго производителя отдѣльно нужно возвысить въ $n^{-\text{ую}}$ степень и результаты перемножить, найдемъ

$$(\sqrt[n]{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt[n]{C})^n = (\sqrt[n]{A})^n \cdot (\sqrt[n]{B})^n \cdot (\sqrt[n]{C})^n.$$

Но, по опредѣленію корня, $(\sqrt[n]{A})^n = A$, $(\sqrt[n]{B})^n = B$ и $(\sqrt[n]{C})^n = C$, слѣд.

$$(\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C})^n = ABC,$$

тѣмъ справедливость теоремы (1) и доказана.

Очевидно, что способъ доказательства не зависитъ отъ числа множителей, а потому теорема доказана для какого угодно числа множителей подкореннаго выраженія.

121. Корень изъ дроби Пусть требуется извлечь корень n-го порядка изъ дроби $\frac{A}{B}$. Докажемъ, что *для извлеченія корня изъ дроби должно извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй*, т.-е. что

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Если окажется, что n-ая степень второй части равенства равна $\frac{A}{B}$, — этимъ справедливость равенства будетъ доказана. По правилу возвышенія въ степень дроби имѣемъ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n};$$

но по опредѣленію корня $(\sqrt[n]{A})^n = A$, $(\sqrt[n]{B})^n = B$, слѣд. въ самомъ дѣлѣ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{A}{B},$$

и испытуемое равенство доказано.

Теоремы о корнѣ изъ произведенія и дроби доказаны не прямымъ путемъ— способомъ повѣрки. Впрочемъ, что касается второй теоремы, то она можетъ быть доказана и прямымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = x, \ldots (1)$$

возвысивъ обѣ части въ n-ую степень, имѣемъ

$$\frac{A}{B} = x^n,$$

откуда

$$A = B \,.\, x^n;$$

извлекая изъ обѣихъ частей корень n-го порядка и примѣняя ко второй части теорему § 120, найдемъ

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \,.\, \sqrt[n]{x^n}, \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \,.\, x.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что x есть частное отъ раздѣленія $\sqrt[n]{A}$ на $\sqrt[n]{B}$, сл.

$$x = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Подставляя вмѣсто x въ равенство (1) его величину, находимъ

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

122. Извлеченіе корня изъ одночлена. — Цѣлый одночленъ есть произведеніе, а потому для извлеченія изъ него корня нужно извлечь корень изъ каждаго производителя и результаты перемножить. Такъ

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}a^{12}b^6(x-y)^{21}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} \times \sqrt[3]{a^{12}} \times \sqrt[3]{b^6} \times \sqrt[3]{(x-y)^{21}} = \frac{4}{5}a^4b^2(x-y)^7$$

Отсюда правило: *чтобы извлечь корень изъ одночлена, должно извлечь его изъ коэффиціента, а показателей всѣхъ буквенныхъ множителей раздѣлить на показателя корня.*

При извлеченіи корня изъ дроби слѣдуетъ, примѣняя это правило, извлечь требуемый корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя и первый раздѣлить на второй. Такъ

$$\sqrt[5]{\frac{32a^{10}b^{15}}{(c^3-d^2)^5}} = \frac{\sqrt[5]{32a^{10}b^{15}}}{\sqrt[5]{(c^3-d^2)^5}} = \frac{2a^2b^3}{c^3-d^2}.$$

ГЛАВА XII.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ и многочленовъ.

Опредѣленія; предварительныя теоремы.—Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа и изъ дроби съ точностью до 1 и до $\frac{1}{n}$.— Сокращенный способъ.— Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ; приложенія.

123. Когда число есть квадратъ другого числа, то первое называется *точнымъ квадратомъ*, а второе *точнымъ квадратнымъ корнемъ* изъ перваго.

Такъ, 49 есть точный квадратъ 7-ми; число же 7 — точный квадратный корень изъ 49.

124. Теорема. *Когда цѣлое число не есть точный квадратъ, то квадратный корень изъ него нельзя выразить точнымъ образомъ не только въ цѣлыхъ единицахъ, но и ни въ какихъ доляхъ единицы.*

Пусть данный неточный квадратъ будетъ N. Такъ какъ цѣлое число N не есть квадратъ другого цѣлаго числа, то очевидно, что квадратный корень изъ N не можетъ быть равенъ ни какому цѣлому числу. Посмотримъ, нельзя ли вы-

[illegible] $\sqrt{N}$ точно нѣкоторою дробью $\frac{a}{b}$, которую всегда можно представлять [illegible]нною къ виду *несократимой* дроби. Допустивъ возможность равенства

$$\sqrt{N}=\frac{a}{b}\cdots(1),$$

[illegible] возвысивъ обѣ его части въ квадратъ, нашли бы

$$N=\frac{a^2}{b^2}.$$

Но дробь $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a.a}{b.b}$, сл. числитель ея содержитъ только тѣхъ множителей, которые находятся въ a, а знаменатель — только тѣхъ, которые заключаются въ b; [illegible] a и b суть числа первыя между собою, слѣдовательно a^2 и b^2 не имѣютъ общихъ множителей, а потому дробь $\frac{a^2}{b^2}$ несократима. Такимъ образомъ, допущеніе выражаемое равенствомъ (1), привело къ ложному заключенію, что цѣлое число N равно несократимой дроби $\frac{a^2}{b^2}$, а потому это допущеніе невозможно.

Итакъ, квадратный корень изъ числа, не представляющаго точнаго квадрата, нельзя точно выразить ни повтореніемъ цѣлой единицы, ни повтореніемъ какой-нибудь ея доли. Такіе корни называютъ *несоизмѣримыми съ единицею*, въ отличіе отъ цѣлыхъ чиселъ и конечныхъ дробей, которыя можно точно выра[illegible] въ частяхъ единицы, и которыя называются поэтому *соизмѣримыми съ единицею*.

Такъ, квадратные корни изъ чиселъ 2, 7, 10 и т. п. суть корни несоизмѣримые. Далѣе мы увидимъ, что такіе корни можно вычислять съ какою угодно точностью. Когда приближенный корень разнится отъ истинной величины мень[illegible] чѣмъ на 1, то онъ называется *точнымъ до единицы*.

125. Опредѣленія. *Квадратный корень изъ цѣлаго числа, точный до единицы, есть корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ* [illegible] *числѣ, или этотъ корень, увеличенный на* 1.

Пусть N есть неточный квадратъ, и A^2 — наибольшій квадратъ, заключающійся въ этомъ числѣ; въ такомъ случаѣ, очевидно, N будетъ содержаться между двумя послѣдовательными квадратами: A^2 и $(A+1)^2$, т. е.

$$(A+1)^2>N>A^2,$$

[illegible], переходя къ корнямъ, находимъ:

$$A+1>\sqrt{N}>A.$$

Но разность между $A+1$ и A равна единицѣ; а потому разности между [illegible] A, съ одной стороны, и между $A+1$ и $\sqrt{N}$, съ другой, меньше 1; слѣдовательно, какъ A, такъ и $A+1$ выражаютъ $\sqrt{N}$ съ точностью до 1. Но [illegible] квадратный корень изъ A^2, т.-е. изъ наибольшаго квадрата, содержа[illegible] N, а $A+1$ есть этотъ корень, увеличенный на 1: этимъ данное [illegible] оправдывается.

[illegible] называется квадратнымъ корнемъ изъ N — *точнымъ до 1 по недостатку*, [illegible] 1 — *по избытку*.

Такъ, замѣчая, что наибольшій квадратъ, содержащійся въ 109, есть 100, заключаемъ, что квадратный корень изъ 109, точный до 1 по недостатку, есть 10, а по избытку — 11.

126. *Остаткомъ* квадратнаго корня называютъ разность между даннымъ числомъ и квадратомъ его корня, точнаго до 1 по недостатку. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ остатокъ корня будетъ

$$109 - 10^2 \quad \text{или} \quad 9.$$

Вообще, если данное число есть N и корень изъ него, точный до 1 по недостатку, равенъ A, а остатокъ R, то, по опредѣленію остатка, $R = N - A^2$, откуда

$$N = A^2 + R.$$

Въ частномъ случаѣ, когда число есть точный квадратъ, остатокъ корня равенъ нулю.

Теорема. *Остатокъ корня не больше удвоеннаго квадратнаго корня изъ даннаго числа, точнаго до 1 по недостатку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть квадратный корень изъ N, точный до 1 по недостатку. Въ такомъ случаѣ N содержится между A^2 и $(A+1)^2$, а потому разность между N и A^2 меньше разности $(A+1)^2 - A^2$ или $2A+1$; слѣд.

$$N - A^2 < 2A + 1$$

или

$$N - A^2 \leqslant 2A,$$

ибо $N - A^2$ — число цѣлое. Но $N - A^2$ есть ничто иное какъ R; слѣд.

$$R \leqslant 2A.$$

Слѣдствіе. — *Если между цѣлыми числами* N, A *и* R *имѣютъ мѣсто соотношенія:*

$$N = A^2 + R \quad \text{и} \quad R \leqq 2A,$$

то это значитъ, что A *есть квадратный корень изъ* N, *точный до* 1 *по недостатку, и что* R *есть остатокъ этого корня.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство доказываетъ, что A^2 содержится въ N, а неравенство доказываетъ, что N не содержитъ въ себѣ $(A+1)^2$, ибо R не составляетъ $2A+1$.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до единицы.

127. Теорію этого дѣйствія мы подраздѣляемъ на три случая.

Первый случай. Данное число меньше 100.

Въ этомъ случаѣ квадратный корень находятъ при помощи таблицы квадратовъ первыхъ девяти чиселъ.

Числа:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадраты:	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Пусть, напр., требуется найти квадратный корень изъ 58 съ точностью до 1.

Изъ таблицы квадратовъ видимъ, что 58 содержится между 49 и 64, сл. $\sqrt{58}$ заключается между 7 и 8, поэтому искомый корень, точный до 1 по недостатку, равенъ 7, а остатокъ = 58 — 49 или 9.

128. Второй случай. Данное число содержится между 100 и 10000.

Пусть данное число будетъ 7865: оно содержится между 100 и 10000, или между 10^2 и 100^2, а потому квадратный корень изъ 7865 заключается между 10 и 100. Но между этими предѣлами находятся двузначныя числа, а потому искомый корень, точный до 1, состоитъ изъ десятковъ и единицъ: пусть число десятковъ его будетъ d, а простыхъ единицъ u; искомый корень выразится формулою $10d + u$, и если остатокъ корня назовемъ буквою R, то, замѣчая, на основаніи § 126, что данное число равно квадрату своего корня, точнаго до 1 по недостатку, + остатокъ, получимъ:

$$7865 = (10d + u)^2 + R = 100d^2 + 2.10d.u + u^2 + R \ldots (1)$$

Чтобы найти цифру (d) десятковъ корня, замѣчаемъ, что слагаемое $100d^2$, какъ цѣлое число, оканчивающееся двумя нулями, есть цѣлое число сотенъ, и потому должно содержаться въ 7800 суммы, а слѣд. d^2 содержится въ 78. Докажемъ, что квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ 78, и дастъ намъ d. Въ самомъ дѣлѣ, изъ таблицы квадратовъ видимъ, что 78 заключается между 64 и 81, или между 8^2 и 9^2:

$$8^2 < 78 < 9^2.$$

Помножая эти числа на 100, мы не измѣнимъ неравенствъ, сл.

$$80^2 < 7800 < 90^2$$

Если къ 7800 прибавимъ 65, то этимъ не измѣнимъ смысла неравенствъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ 80^2 меньше 7800, то оно и подавно будетъ меньше 7865. Но 7865 будетъ также меньше 90^2. Дѣйствительно, 7800 и 90^2 (или 8100) суть два цѣлыя числа сотенъ: и какъ второе больше перваго, то оно превосходитъ первое, по крайней мѣрѣ, на одну сотню. Слѣд., прибавляя къ первому 65 — число меньше 100, получимъ результатъ, во всякомъ случаѣ, меньшій 90^2. Итакъ

$$80^2 < 7865 < 90^2,$$

а отсюда, переходя къ корнямъ, получимъ:

$$80 < \sqrt{7865} < 90.$$

Эти неравенства показываютъ, что искомый корень больше 8 десятковъ, но меньше 9 десятковъ, т.-е. что онъ содержитъ *цѣлыхъ десятковъ 8* и, можетъ быть, нѣсколько простыхъ единицъ, число которыхъ никакъ не больше 9 (ибо величина корня меньше 9 десятковъ). Такимъ образомъ $d = 8$, т.-е. *цифра десятковъ корня равна квадратному корню изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.*

Подставляя въ равенство (1) 8 вмѣсто d, найдемъ:

$$7865 = 6400 + 2.80u + u^2 + R,$$

а вычтя изъ обѣихъ частей по 6400:

$$1465 = 2 . 80и + и^2 + R \ldots (2)$$

Постараемся теперь опредѣлить цифру *и* единицъ корня. Для этого замѣтимъ, что слагаемое 2 . 80 . *и* суммы 1465, т.-е. удвоенное произведенie 8 десятковъ на простыя единицы *и* корня, есть цѣлое число, оканчивающееся нулемъ и потому представляющее цѣлое число десятковъ. Число 2 . 80*и* заключается, поэтому, необходимо, въ 146 десяткахъ суммы. Но въ составъ этихъ 146 десятковъ могутъ входить также десятки отъ слагаемаго $и^2$ (квадрата единицъ корня) и отъ возможнаго остатка R. Въ виду этого мы не можемъ утверждать, что членъ 2 . 80*и* равняется 1460: онъ можетъ быть и меньше числа 1460. Итакъ

$$2 . 80и \leqslant 1460.$$

Сократив на 10 и раздѣливъ обѣ части на 2 . 8, получимъ

$$и \leqslant \frac{164}{2.8}.$$

Цифра единицъ *и* есть число цѣлое, а потому изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что, раздѣливъ 146 на 2 . 8 и взявъ цѣлую часть частнаго, мы найдемъ число равное цифрѣ единицъ корня, либо ее превышающее,—однимъ словомъ, найдемъ вышній предѣлъ цифры единицъ корня. Замѣтивъ, что число 1465 называется первымъ остаткомъ, выводимъ изъ сказаннаго слѣдующее правило для нахожденія цифры единицъ корня: *отдѣливъ въ первомъ остаткѣ правую цифру запятой и раздѣливъ находящееся влѣво отъ запятой число на удвоенную цифру десятковъ корня, въ цѣлой части частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ цифры единицъ корня.*

Въ данномъ случаѣ цѣлая часть частнаго отъ раздѣленія 146 на 16 есть 9; заключаемъ, что цифра единицъ корня будетъ или 9, или число меньшее 9. Чтобы испытать, годится ли 9, мы должны корень 89 возвысить въ квадратъ и вычесть изъ даннаго числа: если вычитаніе будетъ возможно, то цифра 9 будетъ требуемая; въ противномъ случаѣ, т. е. если окажется, что $\overline{89}^2$ больше 7865, надо уменьшить цифру 9 на единицу и испытать цифру 8, и т. д. до тѣхъ поръ, пока вычитаніе будетъ возможно. Но

$$89^2 = (80 + 9)^2 = 80^2 + 2 . 80 . 9 + 9^2;$$

мы уже вычли изъ даннаго числа 80^2 и въ остаткѣ нашли 1465; остается изъ этого остатка вычесть $2 . 80 . 9 + 9^2$. Но, вынеся въ этой суммѣ за скобки 9, получимъ

$$(2 . 80 + 9) . 9, \text{ или } 169 \times 9.$$

откуда замѣчаемъ, что число, подлежащее вычитанію изъ перваго остатка, сокращенно составляется такъ: удвоивъ цифру десятковъ корня (что даетъ 16), приписываютъ справа испытуемую цифру единицъ и составленное такимъ образомъ число множатъ на эту же цифру; выполнивъ вычисленіе, найдемъ

$$169 \times 9 = 1521,$$

результатъ, превышающій первый остатокъ, откуда заключаемъ, что цифра 9 велика.

Взявъ 8 вмѣсто 9, составляемъ такимъ же образомъ

$$(2 . 80 + 8) \times 8, \text{ т.-е. } 168 . 8 = 1344.$$

Полученное число меньше перваго остатка, слѣд. 8 и есть истинная цифра единицъ корня, ибо она ни слишкомъ велика, ни слишкомъ мала. Итакъ, искомый корень $= 88$, причемъ остатокъ

$$R = 1465 - 1344 = 121.$$

Вычисленіе располагаютъ такимъ образомъ:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{78,65} = 88 \\ & \;\;64 \\ 168 & |\,146,5 \\ \searrow 8 & \;\;134\,4 \\ & \;\;\;\;12\,1 \end{array}$$

Для повѣрки дѣйствія, руководясь § 126, слѣд., сравниваемъ остатокъ съ удвоеннымъ корнемъ: такъ какъ въ данномъ случаѣ $121 < 2 \times 88$, то заключаемъ, что 88 есть дѣйствительно квадратный корень изъ 7865, точный до 1 по недостатку; 89 есть корень, точный до 1 по избытку.

129. Изъ предыдущаго выводимъ слѣдующее *правило вычисленія двузначнаго корня*. Разбиваемъ данное число на двѣ грани отъ правой руки къ лѣвой, по двѣ цифры въ каждой грани (въ лѣвой грани можетъ быть и одна цифра), и извлекаемъ квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ первой грани слѣва: полученная цифра будетъ цифрой десятковъ корня. Квадратъ цифры десятковъ вычитаемъ изъ первой грани и къ остатку сносимъ вторую грань; въ полученномъ остаткѣ отдѣляемъ послѣднюю цифру справа запятой, а оставшееся влѣво отъ запятой число дѣлимъ на удвоенную цифру десятковъ корня: частное дастъ высшій предѣлъ цифры единицъ корня. Для повѣрки къ удвоенной цифрѣ десятковъ корня приписываемъ справа цифру единицъ и образовавшееся число умножаемъ на испытуемую цифру единицъ. Если произведеніе не превышаетъ остатка, то испытуемая цифра единицъ есть истинная. Въ противномъ случаѣ ее уменьшаютъ на 1, и т. д., поступая такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока составленное вышеуказаннымъ способомъ произведеніе не будетъ числомъ, не превышающимъ перваго остатка. Если во второмъ остаткѣ получится нуль, это будетъ означать, что корень извлекается точно; въ противномъ случаѣ—приближенно, съ ошибкою меньшею 1.

130. Приводимъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ I.—Найти $\sqrt{1369}$. Руководясь сказаннымъ правиломъ, имѣемъ

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{13,69} = 37. \\ & \;\;9 \\ 67 & |\,46,9 \\ \times 7 & |\,46\,9 \\ & \;\;\;\;0 \end{array}$$

Полученіе нуля въ остаткѣ показываетъ, что квадратъ 37-ми въ точности равенъ 1369, т.-е. что 37 есть точный квадратный корень изъ даннаго числа.

Примѣръ II.—Найти $\sqrt{6341}$.

$$\sqrt{63,41} = 79.$$

$$\begin{array}{r|l} & 49 \\ \hline 149 & 144,1 \\ \times 9 & 134\,1 \\ & 100 \end{array}$$

При опредѣленіи цифры единицъ пришлось дѣлить 144 на 14, причемъ въ цѣлой части частнаго получилось 10; но какъ цифра единицъ не можетъ быть больше 9, то испытываемъ прежде всего эту цифру. Полученіе остатка показываетъ, что цифра единицъ корня дѣйствительно равна 9.

Примѣръ III.—Извлечь $\sqrt{5038}$.

$$\sqrt{50,38} \mid 70$$

$$\begin{array}{rl} & 49 \\ 14 & 13.8 \end{array}$$

Дѣля 13 на 14, находимъ въ цѣлой части частнаго 0; сл. цифра единицъ корня равна 0, и самый корень — 70. Удвоенное произведеніе десятковъ на единицы и квадратъ единицъ корня составляютъ 0, поэтому остатокъ дѣйствія есть 138; онъ меньше удвоеннаго корня, сл. 70 есть корень точный до 1 по недостатку.

Корень точный до 1 по избытку равенъ поэтому 71.

131. Третій случай. — Это есть общій случай, который приводится къ двумъ предыдущимъ при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. *Число десятковъ квадратнаго корня точнаго до 1 по недостатку изъ даннаго цѣлаго числа равно квадратному корню изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ этого числа.*

Пусть данное число будетъ 78658143, и пусть наибольшій квадратъ, содержащійся въ 786581, т.-е. въ числѣ сотенъ его, будетъ a^2.

Если число 786581 есть точный квадратъ, то оно равно a^2, если неточный, то будетъ больше a^2; но въ томъ и другомъ случаѣ будетъ меньше квадрата слѣдующаго за a цѣлаго числа, т.-е. меньше $(a+1)^2$.

Итакъ

$$a^2 \leqslant 786581 < (a+1)^2;$$

Помножая эти три числа на 100, найдемъ:

$$(10a)^2 \leqslant 78658100 < [(a+1) \,.\, 10]^2.$$

Придавъ къ среднему числу 43, мы этимъ нарушимъ возможное равенство, обративъ его въ неравенство $(10a)^2 < 78658143$, усилимъ первое неравенство, увеличивъ его большую часть, и, наконецъ, не нарушимъ второго неравенства. Послѣднее обстоятельство объясняется тѣмъ, что 78658100 и $[(a+1) \,.\, 10]^2$ суть цѣлыя числа сотенъ, и какъ второе больше перваго, то оно превосходитъ первое по меньшей мѣрѣ на одну сотню; слѣдовательно, увеличивъ меньшее число на 43, т.-е. менѣе чѣмъ на сотню, получимъ результатъ все-таки меньшій $[(a+1) \,.\, 10]^2$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$(10a)^2 < 78658143 < [(a+1) \,.\, 10]^2,$$

Откуда, переходя къ корнямъ, найдемъ

$$10a < \sqrt{78658143} < (a + 1) \,.\, 10.$$

Эти неравенства доказываютъ, что искомый корень, будучи больше a десятковъ, содержитъ въ себѣ эти a десятковъ и однако же не содержитъ $a + 1$ десятковъ, такъ какъ онъ меньше этого числа десятковъ (въ силу второго неравенства). Слѣдовательно, опредѣляемый корень состоитъ изъ a десятковъ и, можетъ быть, нѣсколькихъ простыхъ единицъ, число которыхъ не больше 9; другимъ словомъ, *цѣлыхъ десятковъ въ немъ будетъ* a. Замѣтивъ же, что a есть квадратный корень изъ a^2, т.-е. изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ даннаго числа, заключаемъ, что теорема доказана.

132. Итакъ, число десятковъ квадратнаго корня изъ

$$78658143$$

есть квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ этого числа, или, что то же, — квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 786581.

Число десятковъ этого корня, или, что все равно, число сотенъ перваго, есть, на основанiи теоремы § 131, квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 7865.

Число десятковъ этого корня, т.-е. число тысячъ перваго, по той же теоремѣ, есть квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 78.

Такимъ образомъ, отдѣляя отъ правой руки къ лѣвой по двѣ цифры, мы убѣдились, что искомый корень состоитъ изъ четырехъ цифръ, что для нахожденiя старшей его цифры нужно извлечь, съ точностью до 1 по недостатку, квадратный корень изъ первой грани слѣва, и что число граней равно числу цифръ искомаго корня.

Прилагая теорему § 131, мы видимъ, что число сотенъ искомаго корня равно точному до 1 по недостатку квадратному корню изъ 7865; находимъ этотъ корень по правилу § 129:

$$\begin{array}{r|l}
 & 78,65 \mid 8143 \mid 88 \\
 & 64 \\ \hline
168 & 146,5 \\
\times 8 & 134\ 4 \\ \hline
 & 12\ 1
\end{array}$$

88 есть число десятковъ квадратнаго корня изъ 786581; чтобы найти цифру единицъ этого корня, или, что то же, цифру десятковъ искомаго корня, нужно изъ 786581 вычесть квадратъ 880. Вычитанiе это, по частямъ сдѣланное, дало въ остаткѣ 12100 + 81 или 12181 — число, которое находимъ, снеся 81 къ остатку перваго корня. Этотъ остатокъ заключаетъ, слѣдовательно, удвоенное произведенiе 88 десятковъ на единицы и квадратъ единицъ корня изъ 786581. Совершенно такимъ же образомъ, какъ было указано въ § 128, можно доказать, что, раздѣливъ число десятковъ 1218 новаго остатка на удвоенное число 88 десятковъ, т.-е. на

$$2 \,.\, 88, \text{ или на } 176,$$

то найдемъ въ цѣлой части частнаго высшiй предѣлъ цифры единицъ корня изъ 786581. Этотъ предѣлъ есть 6; для испытанiя этой цифры удвоиваемъ 88.

къ 176 приписываемъ справа 6 и множимъ 1766 на 6. Произведеніе 1766 × × 6 = 10596 не превышаетъ 12181, а потому цифра 6 годится.

Итакъ, цифра десятковъ искомаго корня есть 886. Остается найти цифру единицъ. Для этого изъ заданнаго числа слѣдуетъ вычесть 8860^2. Вычитаніе 880 десятковъ въ квадратѣ сдѣлано и дало въ остаткѣ 1218100, который въ совокупности съ 43, составляетъ 1218143. Вычитая отсюда остальныя двѣ части 8860^2 т.-е. 10596 сотенъ, находимъ 158543.

Въ этомъ остаткѣ заключается удвоенное произведеніе 8860 на простыя единицы искомаго корня и квадратъ единицъ. Раздѣливъ число десятковъ этого остатка или 15854 на 2 . 886 = 1772, въ цѣлой части этого частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ для цифры простыхъ единицъ искомаго корня. Предѣлъ этотъ есть 8; для испытанія цифры 8, приписываемъ ее къ 1772 и множимъ 17728 на 8. Произведеніе 141824 можно вычесть изъ 158543, сл. 8 есть дѣйствительно цифра единицъ искомаго корня. Итакъ, корень = 8868, а остатокъ =

$$158543 - 141824 = 16719.$$

Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

```
              √78,65,81,43 = 8868
               64
         168 | 146,5 . . . . . . . . . . 1-й частный остатокъ.
         × 8 | 1344
        1766 | 1218,1 . . . . . . . . .  2-й      »        »
         × 6 | 10596
       17728   15854,3 .       . . .     3-й      »        »
           8 | 141824
               16719 . . . . . . . .     окончательн. остатокъ.
```

Окончательный остатокъ меньше 2 × 8868 = 17736, слѣдовательно 8868 есть дѣйствительно корень изъ даннаго числа, точный до 1 по недостатку.

Отсюда выводимъ

133 *Правило извлеченія квадратнаго корня точнаго до 1 по недостатку изъ цѣлаго числа.*

Раздѣляютъ данное число на грани по двѣ цифры, отъ правой руки къ лѣвой (послѣдняя грань можетъ имѣть и одну цифру); число граней равно числу цифръ корня.

Чтобы найти первую цифру корня, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ первой грани (слѣва).

Чтобы найти вторую цифру корня, вычитаютъ изъ первой грани квадратъ первой цифры корня и къ остатку сносятъ слѣдующую грань: получаютъ такъ называемый первый частный остатокъ. Отдѣляютъ въ немъ одну цифру справа запятой, а стоящее влѣво отъ запятой число дѣлятъ на удвоенную первую цифру корня: частное дастъ или вторую цифру корня, или больше ея. Для повѣрки приписываютъ эту цифру съ правой стороны дѣлителя и полученное число умножаютъ на ту же цифру: если произведеніе возможно вычесть изъ первaго частнаго остатка, то испытуемая цифра и будетъ второю цифрою *корня; въ противномъ случаѣ ее уменьшаютъ на 1, и дѣлаютъ новую повѣрку такимъ же точно образомъ, какъ и первую; продолжаютъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока вычитаніе сдѣлается возможнымъ.*

Чтобы найти третью цифру корня, къ остатку послѣдняго вычитанія сносятъ третью грань, и получаютъ второй частный остатокъ; отдѣляютъ въ немъ одну цифру справа запятой, а оставшееся влѣво отъ запятой число дѣлятъ на удвоенное число, образуемое первыми двумя цифрами корня: частное дастъ высшій предѣлъ для третьей цифры корня. Провѣряютъ цифру частнаго такимъ же образомъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Такимъ образомъ продолжаютъ поступать до тѣхъ поръ, пока не будутъ снесены всѣ грани, и не будетъ опредѣлена послѣднимъ дѣленіемъ цифра простыхъ единицъ корня и окончательный остатокъ.

134. Примѣры.

I. Найти $\sqrt{28164249}$.

```
√28,16,42,49 = 5307
  25
108 | 31,6
×3  | 30 9
 1060 | 74,2
 ×0   | 00 0
10607 | 7424,9
 ×7   | 7424 9
         0
```

II. Извлечь $\sqrt{583749876429}$.

```
√58,37,49,87,64,29 = 764035
 49
146   |  93,7
×6    |  87 6
1524  |  614,9
 ×4   |  609 6
152803  | 5 3876,4
   ×3   | 4 58409
1528065 | 8035 52,9
     ×5 | 7640 32 5
           395 20 4
```

Такъ какъ остатокъ меньше удвоеннаго корня, то 764035 есть корень точный до 1 по недостатку; слѣд. 764036 есть корень, точный до 1 по избытку.

135. Опредѣлимъ, который изъ двухъ корней, точныхъ до 1, — корень по недостатку, или по избытку, точнѣе выражаетъ истинную величину несоизмѣримаго корня. Можно доказать, что если, найдя корень точный до 1 по недостатку, окажется, что остатокъ корня не болѣе самаго корня, то этотъ корень ошибоченъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$; если же остатокъ окажется больше корня, то корень по избытку будетъ ошибоченъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$.

Пусть данное число есть N; корень, точный до 1 по недостатку, пусть будетъ a; остатокъ выразится разностью $N - a^2$.

Первый случай. — Имѣемъ

$$a^2 < N < (a+1)^2;$$

по условію, остатокъ $N - a^2 \leqq a$; слѣд. $N - a^2 < a + \frac{1}{4}$, откуда

$$N < a^2 + a + \frac{1}{4};$$

но $a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$, а потому

$$N<\left(a+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Итакъ

$$a^2<N<\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$

откуда

$$a<\sqrt{N}<a+\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ разность между крайними величинами равна $\frac{1}{2}$, то разность между $\sqrt{N}$ и a меньше $\frac{1}{2}$. Слѣд. a есть корень, точный до $\frac{1}{2}$ по недостатку, т.-е. истинная величина $\sqrt{N}$ отличается отъ a менѣе, чѣмъ отъ $a+1$.

Второй случай. Если окажется, что

$$N-a^2>a,$$

то заключаемъ отсюда, что $N-a^2>a+\frac{1}{4}$, потому что $(N-a^2)$ есть число цѣлое; слѣд.

$$N>a^2+a+\frac{1}{4} \quad \text{или} \quad N>\left(a+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Итакъ

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2<N<(a+1)^2,$$

откуда

$$a+\frac{1}{2}<\sqrt{N}<a+1.$$

Но разность между крайними числами равна $\frac{1}{2}$, слѣд. разность между $(a+1)$ и $\sqrt{N}$ меньше $\frac{1}{2}$. Заключаемъ, что $a+1$ отличается отъ корня изъ N меньше нежели на $\frac{1}{2}$, т.-е. этотъ корень ближе лежитъ къ $a+1$, чѣмъ къ a.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *выгоднѣе брать корень по избытку только тогда, когда остатокъ превышаетъ величину корня, взятаго по недостатку.*

Такъ, въ примѣрѣ II, § 134, получился остатокъ меньшій корня по недостатку, и потому 764035 точнѣе выражаетъ величину искомаго корня, чѣмъ число 764036. Въ примѣрѣ § 132 остатокъ больше найденнаго корня, и потому число 8869 ближе къ истинной величинѣ корня, чѣмъ число 8868.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ дробей съ точностью до 1.

136. Теорема. *Корень квадратный изъ несократимой дроби несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.*

Пусть $\frac{a}{b}$ есть данная несократимая дробь; равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = k,$$

гдѣ k — число цѣлое, невозможно, потому что, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, нашли бы

$$\frac{a}{b} = k^2,$$

т.-е. что несократимая дробь равна цѣлому числу. Итакъ, квадратный корень изъ несократимой дроби не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ. Посмотримъ, нельзя ли его выразить дробью, т.-е. не будетъ ли возможно равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d},$$

гдѣ подъ $\frac{c}{d}$ всегда можемъ разумѣть дробь несократимую. Возвысивъ обѣ части испытуемаго равенства въ квадратъ, найдемъ

$$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2},$$

гдѣ $\frac{c^2}{d^2}$ есть дробь несократимая, такъ какъ, по условію, c и d — числа взаимно-первыя. Но двѣ несократимыя дроби могутъ быть равны только тогда, когда числители ихъ равны между собою и знаменатели — между собою *), т.-е. когда $a = c^2$ и $b = d^2$, откуда слѣдуетъ, что a и b должны быть точными квадратами. Итакъ, корень квадратный изъ несократимой дроби только тогда можетъ быть точно выраженъ дробью, когда *оба члена* данной дроби суть точные квадраты. Во всякомъ другомъ случаѣ корень изъ дроби нельзя точно выразить ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ; поэтому онъ будетъ число несоизмѣримое.

Такъ, квадратный корень изъ $\frac{64}{81}$ извлекается точно, потому что 64 и 81 — точные квадраты. Имѣемъ

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}.$$

---

*) Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{a^1}{b^1}$ будутъ двѣ несократимыя дроби, и посмотримъ, при какихъ условіяхъ возможно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1} \cdots (1).$$

Опредѣляя a, имѣемъ: $a = \frac{a^1 b}{b^1}$; такъ какъ a — число цѣлое, то $a^1 b$ должно дѣлиться на b^1; но a^1 есть число первое съ b^1, сл. b должно дѣлиться на b^1. Опредѣляя изъ (1) a^1, имѣемъ: $a^1 = \frac{ab^1}{b}$, откуда такимъ же точно образомъ заключаемъ, что b^1 должно дѣлиться на b. Но два числа только тогда могутъ дѣлить взаимно другъ друга, когда они равны; слѣд. $b = b^1$. Но въ такомъ случаѣ изъ равенства (1) слѣдуетъ, что и $a = a^1$. Итакъ, чтобы двѣ несократимыя дроби были равны, необходимо, чтобы числители ихъ были равны и знаменатели. Это условіе, очевидно, есть и вполнѣ достаточное.

$\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{9}}$ и $\sqrt{\frac{5}{7}}$ — несоизмѣримы, потому что у первой дроби знаменатель, у второй — числитель, а у третьей — оба члена суть неточные квадраты.

137. Теорема. — *Квадратный корень изъ дробнаго числа, точный до 1, есть квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа, или этотъ корень, сложенный съ 1.*

Пусть данное дробное число будетъ $a+b$, гдѣ a — цѣлое число, и b — правильная дробь. Разсмотримъ два случая.

Первый случай: a — точный квадратъ, напр. $a = r^2$; тогда очевидно, что

$$a+b>r^2.$$

Съ другой стороны: a, будучи $= r^2$, меньше $(r+1)^2$; но если изъ двухъ неравныхъ цѣлыхъ, $(r+1)^2$ и a, первое больше второго, то оно больше его, по меньшей мѣрѣ, на 1, сл. $(r+1)^2-a>b$, или $(r+1)^2>a+b$. Итакъ:

$$(r+1)^2>a+b>r^2;$$

откуда, переходя къ корнямъ, находимъ:

$$r+1>\sqrt{a+b}>r.$$

Разность крайнихъ чиселъ: $r+1$ и r равна 1, а потому

$$\sqrt{a+b}-r<1 \text{ и } (r+1)-\sqrt{a+b}<1,$$

слѣд. какъ r, такъ и $r+1$ выражаютъ величину $\sqrt{a+b}$ съ ошибкою, меньшею 1; но r есть квадратный корень изъ a, а $r+1$ — этотъ корень $+1$, сл. для этого случая теорема доказана.

Второй случай: a — неточный квадратъ, и пусть наибольшій квадратъ, содержащійся въ a, будетъ r^2; въ такомъ случаѣ

$$r^2<a<(r+1)^2.$$

По первому неравенству: $a>r^2$, а потому и подавно

$$a+b>r^2.$$

Въ силу второго неравенства, изъ двухъ цѣлыхъ чиселъ: $(r+1)^2$ и a, первое больше второго, сл. оно больше, по крайней мѣрѣ, на 1; а потому разность ихъ больше правильной дроби b:

$$(r+1)^2-a>b, \text{ откуда}$$

$$(r+1)^2>a+b.$$

Итакъ, имѣемъ:

$$(r+1)^2>a+b>r^2;$$

переходя къ корнямъ, находимъ:

$$(r+1)>\sqrt{a+b}>r,$$

[illegible] опять заключаемъ, что числа r и $r+1$ выражаютъ $\sqrt{a+b}$ съ ошиб[illegible] меньшею 1. Но r есть корень изъ цѣлой части a числа $a+b$, точный до недостатку, а $r+1$ — этотъ корень $+1$, слѣд. теорема доказана и для [illegible] случая. Отсюда

138 *Правило. Для извлеченія квадратнаго корня изъ дробнаго числа точно до 1, слѣдуетъ отбросить дробь и извлечь, съ точностью до 1, корень изъ цѣлой части.*

Примѣчаніе. Такъ какъ у правильной дроби цѣлая часть равна нулю, то [illegible] изъ предыдущаго, что квадратный корень изъ такой дроби, точный до [illegible] 0 — по недостатку, и 1 — по избытку.

[illegible] 1 Найти $\sqrt{72\frac{41}{52}}$ точно до 1.

[illegible] дробь, извлекаемъ $\sqrt{72}$ съ точностью до 1; находимъ, что корень [illegible] съ требуемою точностью, равенъ: 8 — по недостатку, и [illegible] — [illegible]

[illegible] до 1

[illegible] $\sqrt{[illegible]1}$ съ требуемою точностью.

```
√7'31 | 27
 4
47 | 331
 7 | 329
      32
```

[illegible], что искомый корень равенъ: 27 — по недостатку, и 28 — по [illegible]

[illegible] съ точностью до 1, $\sqrt{\frac{3417,31}{0,452}}$.

[illegible] всего нужно выполнить указанное дѣленіе, ограничиваясь нахожденіемъ цѣлой части частнаго, и извлечь изъ нея корень съ точностью до 1. [illegible] располагаютъ такъ:

```
3417310          | 452
3164             |________
 2533             75,60 = 86.
 2260             64
  2731       166 | 1160
  2712   ×     6 |  996
   190           |  164
```

Итакъ, искомый корень равенъ: 86 — по недостатку, и 87 — по избытку

Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ и изъ дробей съ точностью до $\frac{1}{n}$.

139. Извлечь квадратный корень изъ цѣлаго или дробнаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ значитъ найти такую приближенную величину для искомаго корня, которая отличалась бы отъ его истинной величины менѣе чѣмъ на $\frac{1}{n}$.

Пусть требуется извлечь $\sqrt{A}$, гдѣ A — цѣлое или дробное число, представляющее неточный квадратъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, при чемъ дробь $\frac{1}{n}$ называется степенью приближенія. Помноживъ и раздѣливъ $\sqrt{A}$ на n, мы не измѣнимъ его величины, слѣд.

$$\sqrt{A} = \frac{n\sqrt{A}}{n}.$$

Но $n = \sqrt{n^2}$; поэтому числителя можемъ представить въ видѣ $\sqrt{n^2} \times \sqrt{A}$, или, по правилу извлеченія корня изъ произведенія, въ видѣ $\sqrt{An^2}$.

Такимъ образомъ

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{An^2}}{n},$$

гдѣ An^2 — неточный квадратъ, потому что таково A. Извлекаемъ, по извѣстнымъ уже намъ правиламъ, $\sqrt{An^2}$ съ точностью до 1; найдемъ двѣ величины — r по недостатку, и $r+1$ по избытку, такъ что

$$r+1 > \sqrt{An^2} > r.$$

Раздѣливъ эти три числа на n и замѣтивъ, что $\frac{\sqrt{An^2}}{n} = \sqrt{A}$, найдемъ

$$\frac{r+1}{n} > \sqrt{A} > \frac{r}{n}.$$

Разность между крайними числами, $\frac{r+1}{n} - \frac{r}{n}$, равна $\frac{1}{n}$, слѣдов. каждая изъ разностей: $\sqrt{A} - \frac{r}{n}$ и $\frac{r+1}{n} - \sqrt{A}$, меньше $\frac{1}{n}$; это значитъ, что каждая изъ дробей: $\frac{r}{n}$ и $\frac{r+1}{n}$, выражаетъ величину $\sqrt{A}$ съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{n}$. Отсюда выводимъ

140. *Правило. Чтобы изъ даннаго цѣлаго или дробнаго числа извлечь квадратный корень съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно умножить это число на квадратъ знаменателя степени приближенія, изъ полученнаго произведенія извлечь квадратный корень съ точностью до 1 и раздѣлить его на знаменателя степени приближенія.*

Примѣры. 1. Найти $\sqrt{32\frac{7}{13}}$ съ точностью до $\frac{1}{273}$.

По правилу должны $32\frac{7}{13}$ умножить на $(273)^2$, что даетъ 2425059; извлечь изъ этого числа квадратный корень съ точностью до 1, и раздѣлить его на 273. Квадратный корень изъ 2425059, точный до 1 по недостатку, есть 1557, а по избытку — 1558; раздѣливъ тотъ и другой на 273, найдемъ: $5\frac{192}{273}$ и $5\frac{193}{273}$.

Такимъ образомъ $\sqrt{32\frac{7}{13}}$ заключается между числами $5\frac{192}{273}$ и $5\frac{193}{273}$, отличающихся отъ каждаго изъ нихъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{273}$.

3. Найти $\sqrt{3}$ съ точностью до 0,001.

Умноживъ 3 на 1000^2, извлекаемъ $\sqrt{3000000}$ до 1; получимъ числа 1732 и 1733. Раздѣливъ каждое на 1000, найдемъ

1,732 и 1,733.

Первое число выражаетъ $\sqrt{3}$ съ точностью до 0,001 по недостатку, вторая — съ тою же точностью по избытку.

4. Найти

$$\sqrt{\frac{3,1415926}{0,53}}$$

съ точностью до $\frac{1}{100}$.

Умноживъ подкоренное число на 100^2, извлекаемъ квадратный корень изъ частнаго съ точностью до 1. Цѣлая часть частнаго есть 59275, а корень изъ него, точный до 1 по недостатку, есть 243, а по избытку 244. Раздѣливъ каждый изъ нихъ на 100, получимъ для искомыхъ приближеній, точныхъ до 0,01, числа

2,43 (по нед.) и 2,44 (по изб.)

Сокращенный способъ извлеченія квадратнаго корня.

141. Предыдущія правила показываютъ, что извлеченіе квадратнаго корня всегда приводится къ извлеченію его изъ цѣлаго числа съ точностью до 1. Это послѣднее дѣйствіе дѣлается тѣмъ сложнѣе, чѣмъ больше цифръ содержитъ подкоренное число; въ такихъ случаяхъ дѣйствіе значительно упрощается при помощи такъ называемаго *сокращеннаго способа*.

Пусть будетъ A цѣлое число, изъ котораго требуется извлечь квадратный корень съ точностью до 1. Искомый корень можетъ имѣть или *нечетное*, или *четное* число цифръ.

1-й случай: корень имѣетъ нечетное число цифръ. Пусть въ немъ находится $2n+1$ цифръ; найдемъ обыкновеннымъ способомъ больше половины его цифръ, въ данномъ случаѣ $n+1$ цифръ, и буквою a обозначимъ число, образуемое этими цифрами, сопровождаемыми столькими нулями, сколько цифръ осталось найти, т.-е. n нулями (напр., если корень долженъ содержать 5 цифръ и найденныя три первыя его цифры будутъ 234, то буквою a мы обозначаемъ число 23400); такимъ образомъ, a будетъ число $(2n+1)$ — значное. Далѣе, назовемъ буквою x то, что слѣдуетъ придать къ a, чтобы получить истинный корень (x состоитъ изъ цѣлой части, имѣющей n цифръ и, можетъ быть, еще изъ несоизмѣримой десятичной дроби); полный корень выразится суммою $a+x$. Наша цѣль—дать правило для вычисленія цѣлой части x-а, т.-е. для нахожденія x съ точностью до 1 сокращеннымъ путемъ.

По опредѣленію корня имѣемъ:

$$A=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$

гдѣ a уже извѣстно; вычтя a^2 изъ обѣихъ частей и раздѣливъ ихъ на $2a$, найдемъ

$$\frac{A-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}\ldots(1).$$

$A-a^2$ есть остатокъ послѣ нахожденія части a корня (назовемъ его буквою R); раздѣливъ его, какъ указываетъ формула, на $2a$, назовемъ частное этого дѣленія буквою q, а остатокъ—r, такъ что

$$\frac{R}{2a}=q+\frac{r}{2a}$$

подставимъ это выраженіе въ первую часть равенства (1); найдемъ:

$$q+\frac{r}{2a}=x+\frac{x^2}{2a},$$

откуда

$$x-q=\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Докажемъ, что q и выражаетъ величину x съ ошибкою, меньшею 1. Такъ какъ разница между x и q выражается формулою $\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}$, то и слѣдуетъ доказать, что

$$\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}<1.$$

Дѣйствительно, такъ какъ r есть остатокъ дѣленія, въ которомъ $2a$ есть дѣлитель, а остатокъ меньше дѣлителя, то $\frac{r}{2a}<1$. Съ другой стороны, въ цѣлой части x находится n цифръ, а потому x меньше наименьшаго $(n+1)$ — значнаго числа 10^n; а слѣд. $x^2<10^{2n}$; затѣмъ, a есть $(2n+1)$—значное число, слѣд. оно $\geqslant 10^{2n}$, а слѣд. $2a>2\,.\,10^{2n}$. Составивъ двѣ дроби

$$\frac{x^2}{2a} \text{ и } \frac{10^{2n}}{2\times10^{2n}}$$

и замѣчая, что числитель первой меньше числителя второй, а знаменатель первой равенъ или больше знаменателя второй, заключаемъ, что первая дробь меньше второй:

$$\frac{x^2}{2a}<\frac{10^{2n}}{2\times10^{2n}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a}<\frac{1}{2}.$$

Итакъ, каждая изъ дробей разности $\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}$ меньше 1, слѣд. и самая разность <1, т.-е. ошибка, происходящая отъ замѣны x частнымъ q, если только [illegible] существуетъ, непремѣнно меньше 1, такъ что $a+q$ есть величина [illegible] до 1.

[illegible] *случай: корень имѣетъ четное число цифръ $2n$.* Найдемъ опять [illegible] способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня, т.-е. $n+1$ [illegible] остается найти $n-1$ цифръ. Въ цѣлой части x-са находится $(n-1)$— [illegible] число, а потому x меньше наименьшаго n — значнаго числа, т.-е. [illegible], откуда $x^2 < 10^{2n-2}$; a есть $2n$ — значное число, слѣд. оно = или > [illegible] 2n — значнаго числа, т.-е. $a \geqslant 10^{2n-1}$, откуда $2a \geqslant 2\,.\,10^{2n-1}$. [illegible]

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n-2}}{2\times10^{2n-1}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2\times10},$$

[illegible] относительно q прежнее.

[illegible] цѣлая часть корня, состоя изъ четнаго числа цифръ, имѣетъ первою [illegible] 5 или больше 5, то достаточно обыкновеннымъ способомъ найти ровно [illegible] всѣхъ цифръ корня. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $x < 10^n$, а [illegible] $x^2 < 10^{2n}$; съ другой стороны a, какъ $2n$ — значное число, начинающ[illegible] цифрою 5 или большею, будетъ $\geqslant$ упятереннаго наименьшаго $2n$ — знач[illegible], т.-е. $a \geqslant 5\,.\,10^{2n-1}$, откуда $2a \geqslant 10\,.\,10^{2n-1}$, или $2a \geqslant 10^{2n}$, а [illegible]тельно

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n}}{10^{2n}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a} < 1.$$

[illegible]жнее заключенiе относительно q и здѣсь имѣетъ мѣсто.

[illegible] сказаннаго выводимъ слѣдующее

[illegible]вило. — *Для извлеченiя квадратнаго корня изъ цѣлаго числа съ [illegible]стью до 1 сокращеннымъ способомъ, находятъ обыкновеннымъ спо[illegible] больше половины всѣхъ цифръ корня, или же ровно половину, если, [illegible] четномъ числѣ цифръ корня, первая его цифра не меньше 5; осталь[illegible] цифры найдемъ, раздѣливъ полный остатокъ на удвоенную найден[illegible] часть корня.*

42. Примѣръ. Найти квадратный корень съ точностью до 1 изъ числа

7316723456713.

[illegible] имѣетъ семь цифръ: находимъ четыре первыя прямымъ путемъ:

```
  √7, 31, 67, 23, 45, 67, 13 | 2704
   4
 47  | 33,1
×7   | 32 9
 5404 | 2672,3
  ×4  | 2161 6
        5107456713 | 5408000
        48672000     944
         24025671
         21632000
          23936713
          21632000
           2304713
```

$a = 2704000;$

$R - 5107456713.$

$q = 944.$

$r = 2304713.$

Найдя первыя четыре цифры корня (2704), находимъ съ точностью до 1 частное отъ раздѣленія полнаго остатка 5107456713 на удвоенный найденный корень 2704000, т.-е. на 5408000. Это частное = 944; слѣд. искомый корень, точный до 1, есть

2704944.

143. По величинѣ частнаго q и остатка r дѣленія можно всегда узнать, будетъ ли найденный корень $a+q$ точный, или приближенный; и въ послѣднемъ случаѣ — опредѣлить, будетъ ли онъ ошибоченъ по недостатку, или по избытку.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство

$$A-a^2=R, \text{ откуда } A=a^2+R;$$

но $R=2aq+r$, слѣдовательно

$$A=a^2+2aq+r.$$

Съ другой стороны

$$(a+q)^2=a^2+2aq+q^2.$$

Отсюда:

1) Если $r>q^2$, то

$$a^2+2aq+r>a^2+2aq+q^2,$$

или

$$A>(a+q)^2,$$

откуда

$$\sqrt{A}>a+q,$$

т.-е. $a+q$ будетъ приближеніе, точное до 1 по недостатку.

2) Если $r=q^2$, то

$$a^2+2aq+r=a^2+2aq+q^2,$$

или

$$A=(a+q)^2,$$

откуда

$$\sqrt{A}=a+q,$$

т.-е. $a+q$ есть точный корень изъ A.

3) Если, наконецъ, $r<q^2$, то

$$a^2+2aq+r<a^2+2aq+q^2,$$

или

$$A<(a+q)^2,$$

откуда

$$\sqrt{A}<a+q,$$

и потому $a+q$ есть приближеніе, точное до 1 по избытку.

Итакъ: корень $a+q$ будетъ приближенный по недостатку, точный, или же приближенный по избытку, смотря по тому, будетъ ли остатокъ r дѣленія больше, равенъ или меньше квадрата частнаго.

Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ остатокъ 2304713 больше квадрата числа 944; поэтому корень 2704944 ошибоченъ менѣе тѣмъ на 1 по недостатку.

[illegible] тѣлимъ такъ называемый *остатокъ корня*, предполагая, что для [illegible] корня примѣняется сокращенный способъ; при этомъ различаемъ два [illegible] по тому, имѣетъ ли найденный этимъ способомъ корень приближ[illegible] недостатку, или по избытку.

[illegible] *есть приближеніе по недостатку*. Обыкновенный способъ далъ [illegible] личину, а потому, называя остатокъ корня буквою ρ, получимъ

$$\rho = A - (a + q)^2.$$

[illegible] ѣмъ, что

$$A = a^2 + 2aq + r, \quad \text{и} \quad (a + q)^2 = a^2 + 2aq + q^2,$$

[illegible] второе равенство изъ перваго, найдемъ:

$$A - (a + q)^2 = r - q^2,$$

$$\rho = r - q^2.$$

[illegible] ъ, въ разсматриваемомъ случаѣ: *остатокъ корня равенъ избытку* [illegible] *отъ дѣленія надъ квадратомъ частнаго.*

[illegible] $a + q$ *приближеніе по избытку*. Обыкновенный способъ далъ бы для [illegible] личину

$$a + q - 1.$$

[illegible] ѣя равенства

$$A = a^2 + 2aq + r. \quad \text{и} \quad (a + q - 1)^2 = a^2 + 2a(q - 1) + (q - 1)^2,$$

[illegible] что остатокъ отъ обыкновенной операціи былъ бы

$$\rho = A - (a + q - 1)^2 = r + 2a - q^2 + 2q - 1$$
$$= r + 2(a + q) - (q^2 + 1).$$

[illegible] емъ, что въ данномъ случаѣ остатокъ корня найдется, если *къ остатку* [illegible] *придать удвоенный найденный сокращеннымъ способомъ корень,* [illegible] *результата вычесть сумму квадрата частнаго съ единицей.*

145. Сокращенный способъ, вмѣстѣ съ указанными замѣчаніями, даетъ сред[illegible] находить сколько угодно цифръ корня. Пусть, напр., требуется найти $\sqrt{2}$ [illegible] граниченнымъ приближеніемъ. Напишемъ справа отъ 2 вдвое больше ну[illegible] ѣмъ сколько желаемъ найти десятичныхъ знаковъ, и вычислимъ три пер[illegible] цифры корня обыкновеннымъ способомъ.

```
     2.00.00.00.00.00.00.00.00.00 00.00.00.00.00.00.00  1,41
     1
24   10,0
 4    96
 281  400
   1  281
      119
```

[illegible] ли 141 въ корнѣ и 119 въ остаткѣ. Такимъ образомъ, 141 суть [illegible] цифры корня изъ 20000000; двѣ слѣдующія находимъ сокращеннымъ способомъ. Для этого нужно полный остатокъ, равный 1190000, раздѣлить на удвоенную найденную часть корня, т.-е. на 28200,

```
119000.0 | 28200
112800     42                 42
  62000                     ×42
  56400                      84
   5600                     168
 —1764                      1764
  3836
```

Находимъ въ частномъ 42 и въ остаткѣ 5600. Чтобы узнать, въ какую сторону ошибоченъ корень 14142, нужно полученный остатокъ сравнить съ квадратомъ частнаго: $5600 > 42^2$, слѣд. 14142 есть приближеніе по недостатку, и потому послѣднюю его цифру (2) уменьшать не слѣдуетъ.

Имѣя пять цифръ корня, можно сокращеннымъ способомъ найти слѣдующія четыре цифры. Для этого надо знать остатокъ, который дала бы обыкновенная операція послѣ нахожденія части 141420000 корня изъ 20000000000000000, т.-е. остатокъ корня ρ. Такъ какъ $a+q=14142$ есть приближеніе по недостатку, то $\rho=r-q^2=5600-1764=3836$. Приписавъ сюда 8 нулей, дѣлимъ полученное число на $2a=282840000$

```
38360000 | 0000   28284  0000                 1356
28284              1356                       1356
100760                                        8136
 84852                                       6780
 159080                                     4068
 141420                                    1356
  176600                                   1838736.
  169704
     68960000
   — 1838736
     67121264
```

Находимъ въ частномъ 1356, а въ остаткѣ 68960000. Такъ какъ этотъ остатокъ больше 1356^2, корень снова ошибоченъ по недостатку: онъ равенъ 141421356.

Зная девять цифръ корня, можемъ сокращеннымъ способомъ найти слѣдующія восемь; для этого опредѣляемъ остатокъ корня:

$$\rho=68960000-(1356)^2=67121264.$$

Приписавъ къ остатку корня 16 нулей, а къ удвоенному найденному корню 8 нулей, дѣлимъ

```
671212640000000 | 00000000  282842712 | 00000000
1055272160                   23730950
 2067440240
    875412560
    2688442400
      1428579920
        143663600
```

Въ частномъ мы нашли 23730950, и какъ остатокъ дѣленія больше квадрата частнаго, найденный результатъ ошибоченъ по недостатку; имѣемъ

$$\sqrt{2}=1,4142135623730950,$$

съ точностью до 1 шестнадцатаго десятичнаго мѣста. Очевидно, можно продолжать такимъ образомъ находить сколько угодно новыхъ цифръ корня.

146. Извлеченіе квадратнаго корня изъ числа, мало разнящагося отъ 1.

Возвысивъ въ квадратъ $1+\frac{\varepsilon}{2}$, найдемъ: $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}$, результатъ мало разнящійся отъ $1+\varepsilon$, если ε есть весьма малая дробь; откинувъ $\frac{\varepsilon^2}{4}$, получимъ приблизительное равенство $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=1+\varepsilon$, откуда, извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, найдемъ:

$$\sqrt{1+\varepsilon}=1+\frac{\varepsilon}{2},$$

приблизительно. Опредѣлимъ предѣлъ погрѣшности этого приближенія, т.-е. разность

$$a=1+\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{1+\varepsilon}.$$

Умножимъ и раздѣлимъ это выраженіе на сумму

$$1+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\varepsilon},$$

получимъ

$$a=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2-(1+\varepsilon)}{1+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\varepsilon}}=\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Откинувъ въ знаменателѣ малыя дроби $\frac{\varepsilon}{2}$ и ε (подъ знакомъ корня), мы этимъ знаменателя уменьшимъ, а слѣдов. выраженіе второй части увеличимъ, такъ что будетъ

$$a<\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1+\sqrt{1}},\quad \text{или}\quad a<\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Отсюда заключаемъ, что *для извлеченія квадратнаго корня изъ числа* $1+\varepsilon$, *мало превышающаго* 1, *достаточно прибавить къ* 1 *половину избытка* ε: *найдемъ результатъ, точный до* $\frac{\varepsilon^2}{8}$ *по избытку.*

Примѣръ. Найти приближенно $\sqrt{1,000694}$.

По правилу имѣемъ:

$$\sqrt{1,000694}=1+\frac{0,000694}{2}=1,000347$$

съ точностью до $\frac{7^2}{8.10^8}$ или до $\frac{1}{10^7}$. Заключаемъ, что ошибка не вліяетъ на послѣдній десятичный знакъ приближенія 1,000347.

147. Признаки неточныхъ квадратовъ.—Въ заключеніе укажемъ нѣкоторые признаки неточныхъ квадратовъ.

1. $(2n)^2 = 4n^2$, т.-е. квадратъ всякаго четнаго числа $(2n)$ дѣлится на 4, а слѣд. обратно, четное число только тогда *можетъ быть* квадратомъ, когда оно дѣлится на 4. Само собою разумѣется, что изъ этого не слѣдуетъ, чтобы всякое число, дѣлящееся на 4, было необходимо точнымъ квадратомъ; такъ, 40 есть неточный квадратъ.

2. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, т.-е. всякое нечетное число имѣетъ квадратъ вида $4n^2 + 4n + 1$, т.-е. такой, который, будучи уменьшенъ на 1, дѣлится на 4; слѣд. обратно, нечетное число только тогда *можетъ быть* точнымъ квадратомъ, когда оно, уменьшенное на 1, дѣлится на 4.

3. Изъ умноженія цѣлыхъ чиселъ извѣстно, что произведеніе двухъ такихъ чиселъ оканчивается тою же цифрою, какою и произведеніе ихъ простыхъ единицъ. Но квадраты чиселъ 1, 2, 3, ... 9 оканчиваются цифрами 1, 4, 5, 6, 9, но не оканчиваются цифрами 2, 3, 7 и 8. Изъ этого слѣдуетъ, что всякое цѣлое число, оканчивающееся одною изъ цифръ: 2, 3, 7 и 8, не можетъ быть точнымъ квадратомъ. Здѣсь опять слѣдуетъ замѣтить, что если число оканчивается одною изъ цифръ: 1, 4, 5, 6 и 9, то оно не есть необходимо точный квадратъ; такъ, 625 есть точный, а 15—неточный квадратъ.

4. Если число оканчивается 5-ю, его квадратъ долженъ оканчиваться 25-ю. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая число какъ сумму десятковъ и простыхъ единицъ, находимъ, что квадратъ десятковъ оканчивается двумя нулями, удвоенное произведеніе десятковъ на единицы, въ данномъ случаѣ, будетъ оканчиваться также двумя нулями, слѣд. квадратъ числа, оканчивающагося 5-ю, необходимо оканчивается 25-ю. Слѣд., всякое число, оканчивающееся 5-ю, котораго предпослѣдняя цифра не есть 2, не можетъ быть точнымъ квадратомъ.

5. Квадратъ числа, оканчивающагося нулями, имѣетъ нулей вдвое больше, т.-е. четное число ихъ. Слѣд., число, оканчивающееся нечетнымъ числомъ нулей, не есть точный квадратъ.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

148. Корень изъ многочлена только въ исключительныхъ случаяхъ извлекомъ, т.-е. можетъ быть выраженъ въ формѣ раціональнаго многочлена.

Для возможности извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена, послѣдній долженъ содержать не менѣе трехъ неприводимыхъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если данный многочленъ есть двучленъ, то корень изъ него не можетъ быть выраженъ точно ни одночленомъ, ни многоченомъ, потому что квадратъ одночлена есть одночленъ, а квадратъ простѣйшаго многочлена — двучлена, содержитъ три неприводимыхъ члена.

Пусть данный многочленъ будетъ точный квадратъ:

$$25a^2x^6 - 20a^3x^5 + 74a^4x^4 - 48a^5x^3 + 57a^6x^2 - 28a^7x + 4a^8,$$

расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы x, и пусть

$$p + q + r + s + \cdots$$

будетъ квадратный корень изъ него, также расположенный по убывающимъ степенямъ x. Данный многочленъ, какъ квадратъ своего корня, будетъ $= (p + q + r + s + \cdot \cdot \cdot)^2$; или, раскрывъ этотъ квадратъ, получимъ равенство

$$25a^2x^6 - 20a^3x^5 + 74a^4x^4 - 48a^5x^3 + 57a^6x^2 - 28a^7x + 4a^8 = p^2 + 2pq + q^2 + \\ + 2(p + q)r + r^2 \\ + 2(p + q + r)s + s^2 + \ldots (1)$$

Вторая часть этого равенства, по раскрытіи скобокъ и по приведеніи, должна давать первую часть, поэтому равенство это есть тождество, а слѣдов. высшіе члены въ обѣихъ частяхъ должны быть равны. Но вторая часть есть произведеніе $(p + q + \cdot \cdot \cdot)(p + q + \cdot \cdot \cdot)$, а потому высшій членъ ея равенъ произведенію высшихъ членовъ сомножителей, т.-е. $p.p$ или p^2. Итакъ $p^2 = 25a^2x^6$, откуда

$$p = \sqrt{25a^2x^6}.$$

Слѣдов. *чтобы найти высшій членъ корня, нужно извлечь квадратный корень изъ высшаго члена даннаго полинома.*

$\sqrt{25a^2x^6} = \pm 5ax^3$. Возьмемъ для p его значеніе со знакомъ $+$, т.-е. положимъ $p = 5ax^3$. Вычтя изъ первой части равенства (1) $25a^2x^6$, а изъ второй p^2, найдемъ тождество:

$$-20a^3x^5 + 74a^4x^4 \ldots = 2pq + q^2 + 2(p + q)r + r^2 + \cdots (2),$$

Высшіе члены обѣихъ частей его должны быть равны; но высшій членъ второй части есть $2pq$, ибо p и q суть высшіе члены корня. Слѣдоват. $2pq = -20a^3x^5$ или, такъ какъ $p = 5ax^3$, то $10ax^3.q = -20a^3x^5$, откуда

$$q = -20a^3x^5 : 10ax^3 = -2a^2x^2.$$

Слѣдов. *чтобы найти второй членъ корня, нужно вычесть изъ даннаго полинома квадратъ перваго члена корня, и высшій членъ перваго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня.*

Вычтемъ изъ обѣихъ частей тождества (2) по

$$2pq + q^2, \quad \text{или} \quad (2p + q)q.$$

т.-е. въ данномъ случаѣ

$$(10ax^3 - 2a^2x^2)(-2a^2x^2) = -20a^3x^5 + 4a^4x^4,$$

найдемъ тождество

$$70a^4x^4 - 48a^5x^3 + 57a^5x^2 + \cdots = 2(p + q)r + r^2 + 2(p + q + r)s + s^2 + \cdots (3).$$

Высшіе члены обѣихъ частей его должны быть равны; но высшій членъ второй части есть $2pr$, слѣдов. $2pr = 70a^4x^4$; а какъ $p = 5ax^3$, то

$$10ax^3.r = 70a^4x^4, \text{ откуда}$$

$$r = 70a^4x^4 : 10ax^3 = 7a^3x.$$

Отсюда заключаемъ: *чтобы найти третій членъ корня, нужно вычесть изъ перваго остатка произведеніе второго члена на алгебраиче-*

скую сумму удвоеннаго перваго члена со вторымъ, и высшій членъ второго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня.

Вычтемъ изъ обоихъ частей тождества (3) по

$$2(p+q)r+r^2,\quad \text{т.-е.}\quad (2p+2q+r).r,$$

или въ данномъ случаѣ

$$(10ax^3-4a^2x^2+7a^3x).7a^3x=70a^4x^4-28a^5x^3+49a^6x^2.$$

Сдѣлавъ это, получимъ тождество

$$-20a^5x^3+8a^6x^2-28a^7x+4a^8=2(p+q+r)s+s^2+\ldots(4).$$

Высшіе члены обѣихъ частей должны быть равны, и какъ высшій членъ второй части есть $2ps$, то $2ps=-20a^5x^3$, или $10ax^3 \,.\, s=-20a^5x^3$, откуда $s=-20a^5x^3 : 10ax^3=-2a^4$.

Отсюда: *чтобы найти четвертый членъ корня, нужно вычесть изъ второго остатка произведеніе третьяго члена корня на алгебраическую сумму удвоенныхъ первыхъ двухъ членовъ корня съ третьимъ, и высшій членъ третьяго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня.*

Вычтемъ изъ обѣихъ частей тождества (4) по

$$2(p+q+r)s+s^2,\quad \text{т.-е.}\quad (2p+2q+2r+s).s,$$

или въ данномъ случаѣ

$$(10ax^3-4a^2x^2+14a^3x-2a^4).(-2a^4)=-20a^5x^3+8a^6x^2-28a^7x+4a^8;$$

въ первой части тождества получается въ остаткѣ ноль, слѣд. данный полиномъ есть квадратъ полинома $p+q+r+s$, т.-е. въ данномъ случаѣ корень въ точности равенъ $5ax^3-2a^2x^2+7a^3x-2a^4$.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{lr|l}
 & 25a^2x^6-20a^3x^5+74a^4x^4-48a^5x^3+57a^6x^2-28a^7x+4a^8 & 5ax^3-2a^2x^2+7a^3x-2a^4 \\
 & \pm 20a^3x^5 \mp 4a^4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & (10ax^3-2a^2x^2)(-2a^2x^2) \\
\text{2-й ост.}\ \ldots & 70a^4x^4-48a^5x^3+57a^6x^2-28a^7x+4a^8 & \\
 & -70a^4x^4\pm 28a^5x^3\mp 49a^6x^2 \qquad\qquad & (10ax^3-4a^2x^2+7a^3x).7a^3x \\
\text{3-й ост.}\ \ldots\ldots & -20a^5x^3+8a^6x^2-28a^7x+4a^8 & \\
 & \pm 20a^5x^3\mp 8a^6x^2\pm 28a^7x\mp 4a^8 & (10ax^3-4a^2x^2+14a^3x-2a^4)(-2a^4) \\
 & 0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

149. *Правило.* — *Чтобы извлечь квадратный корень изъ цѣлаго по буквѣ x полинома, представляющаго точный квадратъ, располагаютъ полиномъ по убывающимъ степенямъ буквы x; извлекая квадратный корень изъ перваго члена полинома, найдемъ первый членъ корня.*

Вычтя изъ даннаго полинома квадратъ перваго члена корня, и раздѣливъ первый членъ остатка на удвоенный первый членъ корня, получимъ второй членъ его.

Чтобы найти третій членъ корня, вычитаютъ изъ перваго остатка произведеніе второго члена корня на алгебраическую сумму удвоеннаго перваго члена корня со вторымъ, и дѣлятъ первый членъ второго остатка на удвоенный первый членъ корня: частное и будетъ третьимъ членомъ корня.

Для нахожденія четвертаго члена корня вычитаютъ изъ второго остатка произведеніе третьяго члена корня на алгебраическую сумму удвоенныхъ первыхъ двухъ членовъ корня съ третьимъ, и дѣлятъ первый членъ третьяго остатка на удвоенный первый членъ корня: частное этого дѣленія и дастъ четвертый членъ корня.

Продолжаютъ эти дѣйствія до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится нолъ.

Это правило безъ измѣненія прилагается и къ тому случаю, когда данный полиномъ будетъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы.

150. *Примѣчанія.* — I. Степень корня, очевидно, вдвое меньше степени полинома.

II. Для перваго члена корня (§ 148) мы могли бы взять: $-5ax^3$; изъ формулъ для q, r и s видно, что въ такомъ случаѣ нашли бы: $q = +2a^2x^2$, $r = -7a^3x$, $s = +2a^4$; слѣд. второе значеніе корня будетъ: $-5ax^3+2a^2x^2-7a^3x+2a^4$. Оно отличается отъ перваго только знакомъ. Итакъ, искомый корень имѣетъ два значенія:

$$\pm(5ax^3-2a^2x^2+7a^3x-2a^4).$$

151. Выводя правило § 149, мы предполагали, что существуетъ многочленъ $p+q+\dots+t$ съ конечнымъ числомъ членовъ, квадратъ котораго равенъ данному полиному P. Но [illegible] напередъ неизвѣстно, существуетъ ли такой многочленъ $p+q+\dots+t$, т.-е. будетъ ли P точный квадратъ. Чтобы [illegible] [illegible] [illegible], покажемъ, что, примѣняя его, всегда *послѣ ограниченнаго* [illegible] [illegible] [illegible] узнать, будетъ ли P точный квадратъ, [illegible] [illegible] (§ 148), когда оно существуетъ. Если полиномъ P [illegible] [illegible] по [illegible] степенямъ главной буквы, низшій членъ [illegible] [illegible], не имѣя себѣ подобныхъ, съ которыми могъ бы быть соединенъ [illegible], долженъ равняться низшему члену,—назовемъ его L,— [illegible] [illegible] t, т.-е. должно быть $t^2 = L$, откуда $t = \pm\sqrt{L}$. Слѣдовательно, [illegible] [illegible] корня можетъ быть непосредственно найденъ извлеченіемъ корня [illegible] [illegible] члена даннаго полинома. Поэтому, показатель главной буквы члена L [illegible] быть числомъ четнымъ. Пусть это такъ и есть, и пусть это число 2k. Когда, выполняя дѣйствія, мы дойдемъ въ корнѣ до члена степени k, [illegible], наприм., что этотъ членъ Dx^k, то, чтобы данный полиномъ былъ точнымъ квадратомъ, *необходимо:* во-1-хъ, *чтобы было* $(Dx^k)^2 = L$, и, во-2-хъ, *чтобы слѣдующій остатокъ былъ нулемъ*. Эти условія, будучи необходимы, очевидно, вмѣстѣ съ тѣмъ и *достаточны*.

Тѣ же разсужденія приложимы и къ случаю, когда оба полинома расположены по восходящимъ степенямъ главной буквы: стоитъ только вездѣ слово «низшій» замѣнить словомъ «высшій».

Когда указанныя условія не имѣютъ мѣста, то данный полиномъ не есть точный квадратъ.

Пусть, въ такомъ случаѣ, данный многочленъ есть P, остатокъ, который долженъ бы быть нулемъ—R, а корень—U; такъ какъ остатокъ получился по вычитаніи изъ P всѣхъ членовъ квадрата многочлена U, то $P-U^2=R$, откуда

$$P=U^2+R.$$

Эта формула и служитъ для преобразованія неточнаго квадрата.

Примѣръ I. Возьмемъ полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы, наприм.

$$9a^2x^4 - 24a^3x^3 + 46a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6.$$

Если этотъ многочленъ есть точный квадратъ, то низшій членъ корня долженъ быть равенъ $\sqrt{13a^6}$, а слѣдующій затѣмъ остатокъ долженъ быть нулемъ. Если оба эти условія окажутся невыполненными, то должно заключить, что данный полиномъ не есть точный квадратъ. Примѣняемъ правило § 149.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
9a^2x^4 & - 24a^3x^3 & + 46a^4x^2 & - 20a^5x & + 13a^6 & 3ax^2 - 4a^2x + 5a^3 \\
 & \pm 24a^3x^3 & \mp 16a^4x^2 & & & (6ax^2 - 4a^2x)(-4a^2x) \\
 & & 30a^4x^2 & - 20a^5x & + 13a^6 & \\
 & & \mp 30a^4x^2 & \pm 40a^5x & \mp 25a^6 & (6ax^2 - 8a^2x + 5a^3).5a^3 \\
 & & & 20a^5x & - 12a^6 &
\end{array}$$

Найдя въ корнѣ членъ $+5a^3$, и замѣчая, что 1) онъ не равенъ $\sqrt{13a^6}$, и 2) что слѣдующій остатокъ не есть 0, заключаемъ, что данный полиномъ не есть точный квадратъ. Примѣняя формулу $P = I^2 + R$, можемъ его представить въ видѣ

$$(3ax^2 - 4a^2x + 5a^3)^2 + 20a^5x - 12a^6.$$

Примѣръ II. Пусть данный полиномъ расположенъ по восходящимъ степенямъ главной буквы, наприм.

$$1 - 5x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4.$$

Если этотъ многочленъ — точный квадратъ, то дойдя въ корнѣ до члена, содержащаго x^3, и получивъ затѣмъ остатокъ неравный 0, должны заключить, что данный полиномъ есть неточный квадратъ.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 - 5x & + 4x^2 & - 6x^3 & + 8x^4 & & & 1 - \frac{5}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{93}{16}x^3 \\
\pm 5x & \mp \frac{25}{4}x^2 & & & & & \left(2 - \frac{5}{2}x\right)\left(-\frac{5}{2}x\right) \\
 & -\frac{9}{4}x^2 & - 6x^3 & + 8x^4 & & & \\
 & \pm\frac{9}{4}x^2 & \mp\frac{45}{8}x^3 & \mp\frac{81}{64}x^4 & & & \left(2 - 5x - \frac{9}{8}x^2\right)\left(-\frac{9}{8}x^2\right) \\
 & & -\frac{93}{8}x^3 & + \frac{431}{64}x^4 & & & \\
 & & \pm\frac{93}{8}x^3 & \mp\frac{465}{16}x^4 & \mp\frac{837}{64}x^5 & \mp\frac{8649}{256}x^6 & \left(2 - 5x - \frac{9}{4}x^2 - \frac{93}{16}x^3\right)\left(-\frac{93}{16}x^3\right) \\
 & & & -\frac{1429}{64}x^4 & - \frac{837}{64}x^5 & - \frac{8649}{256}x^6 & \text{и т. д.}
\end{array}$$

Разница этого случая отъ предыдущаго заключается въ томъ, что степени главной буквы въ послѣдовательныхъ остаткахъ повышаются, а это ведетъ за собою возможность полученія въ частномъ неограниченнаго числа членовъ цѣлыхъ относительно главной буквы, такъ что разложеніе многочлена по формулѣ $P = I^2 + R$, гдѣ I и R — цѣлыя относительно x выраженія, — неопредѣленно.

152 *Приложенія. — I. Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы квадратный триномъ*

$$ax^2+bx+c$$

былъ точнымъ квадратомъ.

1-й методъ. Найдемъ остатокъ квадратнаго корня изъ даннаго тринома.

$$\begin{array}{l|l} ax^2+bx+c & x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}} \\ \quad -bx\pm\frac{b^2}{4a} & \left(2x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}} \\ c\quad\frac{b^2}{4a} & \end{array}$$

Чтобы триномъ былъ точнымъ квадратомъ, необходимо и достаточно, чтобы остатокъ былъ равенъ нулю, т.-е. чтобы

$$c-\frac{b^2}{4a}=0, \quad \text{или} \quad b^2-4ac=0.$$

2-й методъ. Положивъ

$$ax^2+bx+c=(\alpha x+\beta)^2$$

раскрывъ вторую часть, найдемъ тождество

$$ax^2+bx+c=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2;$$

сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, найдемъ три условія:

$$a=\alpha^2; \quad b=2\alpha\beta; \quad c=\beta^2.$$

Эти три условія должны существовать совмѣстно, а потому величины α и β, выведенныя изъ 1-го и 3-го, должны удовлетворять второму.

Такимъ образомъ найдемъ: $b=\pm2\sqrt{a}\,.\sqrt{c}$, или $b^2=4ac$.

Примѣчаніе. Если бы a равнялось нулю, то изъ условія $b^2=4ac$, слѣдуетъ, что и b должно $=0$; триномъ приводится въ этомъ случаѣ къ c: это есть квадратъ количества $\sqrt{c}$. Поэтому можно сказать, что каково бы ни было a, искомое условіе есть $b^2-4ac=0$.

II. *Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы триномъ*

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

былъ точнымъ квадратомъ.

Различаемъ два случая: 1) $a=0$; 2) a не равно 0.

Когда $a=0$, то, какъ триномъ не можетъ имѣть высшею степенью x первую, необходимо положить и $b=0$. Это условіе, будучи необходимымъ, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно; ибо, если оно выполнено, то триномъ приводится къ cy^2; а это есть точный квадратъ количества $\sqrt{c}\,.\,y$.

Пусть a не равно нулю. Извлеченіе корня даетъ:

$$\begin{array}{l|l} ax^2+2bxy+cy^2 & \sqrt{a}\,.\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}y \\ \qquad 2bxy \mp \frac{b^2}{a}y^2 & \left(2\sqrt{a}\,.\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}y\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}y \\ \cline{1-1} \left(c-\frac{b^2}{a}\right)\cdot y^2 & \end{array}$$

Заключаемъ, что если $\frac{b^2}{a}-c$, или $\frac{b^2-ac}{a}$ не равно нулю, т.-е. если b^2-ac отлично отъ нуля, триномъ не есть точный квадратъ. Итакъ, *необходимо*, чтобы b^2-ac равнялось нулю. Этого условія, вмѣстѣ съ тѣмъ, и достаточно; ибо равенство

$$ax^2+2bxy+cy^2=\left(\sqrt{a}\,.\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2$$

показываетъ, что какъ скоро $b^2=ac$, данный триномъ превращается въ точный квадратъ количества

$$\sqrt{a}\,.\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot y,\ \text{или}\ \frac{ax+by}{\sqrt{a}}.$$

III. *Найти условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы полиномъ*

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy$$

былъ точнымъ квадратомъ.

Къ этому примѣру можно приложить общій методъ, которымъ мы пользовались въ двухъ предыдущихъ примѣрахъ. Но мы выведемъ искомыя условія изъ условій, найденныхъ въ предыдущемъ примѣрѣ.

Различаемъ опять два случая: $a=0$ и a не равно 0.

Первый случай. Когда $a=0$, то, какъ данный полиномъ, чтобы быть точнымъ квадратомъ, не долженъ содержать членовъ съ первою степенью x, мы должны при всякихъ y и z имѣть

$$b'z+b''y=0,$$

откуда, извѣстнымъ уже путемъ, заключаемъ, что

$$b'=0 \quad \text{и} \quad b''=0.$$

Полиномъ приводится къ

$$a'y^2+2byz+a''z^2.$$

Изъ предыдущаго примѣра знаемъ, что триномъ этого вида будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$a'a''-b^2=0.$$

Итакъ, искомыя условія суть:

$$b'=0,\quad b''=0,\quad a'a''-b^2=0.$$

Второй случай. Пусть a не равно 0. Дадимъ полиному видъ

$$ax^2+2(b''y+b'z)x+a'y^2+2byz+a''z^2.$$

Его можно разсматривать какъ квадратный относительно x триномъ, котораго первый коэффиціентъ a отличенъ отъ нуля. Прилагая сюда доказанное въ предыдущемъ примѣрѣ условіе, найдемъ

$$(b''y+b'z)^2=a(a'y^2+2byz+a''z^2).$$

Такъ какъ это равенство должно быть *тождествомъ*, оно должно имѣть мѣсто *при всякомъ y и при всякомъ z;* откуда извѣстнымъ образомъ найдемъ условія:

$$b''^2=aa';\quad b'b''=ab;\quad b'^2=aa''.$$

Этихъ условій, вмѣстѣ съ тѣмъ, и вполнѣ достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, изъ нихъ имѣемъ:

$$a'=\frac{b''^2}{a};\quad a''=\frac{b'^2}{a};\quad b=\frac{b'b''}{a}.$$

Подставляя эти значенія a', a'' и b въ данный полиномъ, дадимъ ему видъ

$$ax^2+\frac{b''^2y^2}{a}+\frac{b'^2z^2}{a}+\frac{2b'b''yz}{a}+2b'zx+2b''xy$$
$$=\frac{a^2x^2+b''^2y^2+b'^2z^2+2b'b''yz+2ab'zx+2ab''xy}{a}$$
$$=\left(\frac{ax+b''y+b'z}{\sqrt{a}}\right)^2.$$

Отсюда видно, что при найденныхъ условіяхъ данный полиномъ есть полный квадратъ количества

$$\frac{ax+b''y+b'z}{\sqrt{a}}.$$

ГЛАВА XIII.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ чиселъ и многочленовъ.

Опредѣленія; предварительныя теоремы.—Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ съ точностью до 1 и до $\frac{1}{n}$. — Сокращенный способъ. —Извлеченіе кубичнаго корня изъ многочленовъ.

153. Когда число есть кубъ другого числа, то первое называется *точнымъ кубомъ*, а второе — *точнымъ кубичнымъ корнемъ* изъ перваго. Такъ 125 есть точный кубъ 5-ти, а 5 — точный кубичный корень изъ 125.

154. Разсужденіями, приведенными въ § 124, докажемъ, что:

Когда цѣлое число не есть точный кубъ, то кубичный корень изъ него, не выражаясь точно въ цѣлыхъ единицахъ, не можетъ быть точно выраженъ и ни въ какихъ доляхъ единицы.

Такіе корни называются несоизмѣримыми съ единицею: такъ, кубичные корни изъ чиселъ: 3, 10, 15 и т. д. суть числа несоизмѣримыя.

155. Опредѣленія.—*Кубичный корень изъ цѣлаго числа, точный до единицы, есть корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ этомъ числѣ, или этотъ корень* $+1$.

Первый называется корнемъ точнымъ до 1 по недостатку, второй — по избытку. Такъ, замѣчая, что наибольшій кубъ, заключающійся въ 70, есть 64, заключаемъ, что кубичный корень изъ 70, точный до 1 по недостатку, есть 4, а по избытку — 5.

156. *Остаткомъ* кубичнаго корня изъ цѣлаго числа называется избытокъ этого числа надъ кубомъ его корня, точнаго до 1 по недостатку. Напр., остатокъ кубичнаго корня изъ 70 есть разность 70—64 или 6.

Вообще, если данное число есть N, кубичный корень изъ него, точный до 1 по недостатку, равенъ A, а остатокъ — R, то, по опредѣленію остатка, $R = N - A^3$, откуда

$$N = A^3 + R.$$

Въ частности, когда N есть точный кубъ, остатокъ корня равенъ нулю.

Теорема. — *Остатокъ кубичнаго корня не больше утроеннаго произведенія корней изъ даннаго числа, точныхъ до 1 по недостатку и по избытку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть кубичный корень изъ N, точный до 1 по недостатку; въ такомъ случаѣ N содержится между A^3 и $(A+1)^3$, и слѣд. разность между N и A^3 меньше разности $(A+1)^3 - A^3$ или $3A(A+1)+1$, т.-е.

$$R < 3A(A+1)+1.$$

Но R и $3A(A+1)+1$ суть числа цѣлыя, и R — меньше изъ нихъ, то оно меньше второго по крайней мѣрѣ на 1, т.-е.

$$R \leqslant 3A(A+1).$$

Слѣдствіе. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы A было кубичнымъ корнемъ изъ N, точнымъ до 1 по недостатку, суть:*

$$N = A^3 + R \quad \text{и} \quad R \leqslant 3A(A+1).$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство выражаетъ, что кубъ числа A содержится въ N, а неравенство означаетъ, что N не заключаетъ въ себѣ куба числа $A+1$.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до 1.

Эту теорію подраздѣляемъ на три случая.

157. Первый случай. Данное число меньше 1000.

Въ этомъ случаѣ кубичный корень находятъ прямо при помощи таблицы кубовъ первыхъ девяти чиселъ

Числа:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кубы:	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

ть требуется извлечь кубичный корень, съ точностью до 1, изъ 427. ицы кубовъ видно, что это число содержится между 343 и 512, слѣд. ий кубъ, въ немъ заключающiйся, есть 343; поэтому искомый корень 7, а остатокъ есть 427 — 343 или 84.

58. **Второй случай.** Данное число содержится между 1000 и 1000000. ть дано число 341254; оно больше 1000 или 10^3, но меньше 1000000 0^3, а потому кубичный корень изъ него больше 10, но меньше 100, тоитъ изъ десятковъ и единицъ; пусть число его десятковъ будетъ d, тыхъ единицъ — u; искомый корень будетъ $10d + u$, и если возможный ъ назовемъ буквою R, то получимъ равенство:

$$41254 = (10d+u)^3+R = 1000d^3+3.100d^2\,u+3.10d.u^2+u^3+R\ldots(1).$$

бы найти цифру десятковъ корня, замѣчаемъ, что слагаемое $1000d^3$ ѣлое число тысячъ, а потому необходимо содержится въ 341000 суммы, д. d^3 заключается въ 341. Докажемъ, что кубичный корень изъ наиболь- куба, заключающагося въ 341, и дастъ намъ d. Въ самомъ дѣлѣ, изъ цы кубовъ замѣчаемъ, что 341 содержится между 216 и 343, или между и 7^3:

$$6^3 < 341 < 7^3.$$

множая эти числа на 1000, мы не измѣнимъ неравенствъ, такъ что:

$$\overline{60}^3 < 341000 < \overline{70}^3.$$

Прибавивъ къ 341000 число 254, мы усилимъ первое неравенство. Что ка- а второго, то какъ 341000 и $\overline{70}^3$ суть цѣлыя числа тысячъ и первое не второго, то оно меньше его по крайней мѣрѣ на 1000; слѣд., увели- ъ первое на 254 — число, меньше 1000, получимъ результатъ, во всякомъ аѣ, меньшiй $\overline{70}^3$, такъ что и второе неравенство не нарушится. Итакъ

$$\overline{60}^3 < 341254 < \overline{70}^3,$$

да, переходя къ корнямъ, имѣемъ:

$$60 < \sqrt[3]{341254} < 70.$$

ти неравенства доказываютъ, что искомый корень больше 6 десятковъ, но заключаетъ въ себѣ 7 десятковъ, т.-е. что онъ содержитъ 6 цѣлыхъ де- овъ, и, можетъ быть, нѣсколько простыхъ единицъ, число которыхъ не боль- 9. Итакъ, $d = 6$, т.-е. *цифра десятковъ корня равна кубичному кор- изъ наибольшаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ даннаго числа.*

Подставивъ въ равенство (1) 6 вмѣсто d, получимъ:

$$341254 = 216000 + 3\,.\,3600\,.\,u + 3\,.\,60\,.\,u^2 + u^3 + R\ldots(2)$$

изъ обѣихъ частей по 216000, найдемъ

$$125254 = 3\,.\,3600\,.\,u + 3\,.\,60\,.\,u^2 + u^3 + R$$

Для нахожденія цифры u единицъ корня замѣчаемъ, что слагаемое $3.3600.u$ есть цѣлое число сотенъ, а потому необходимо заключается въ 1252 сотняхъ суммы. Но въ составъ этихъ сотенъ суммы могутъ входить сотни и отъ остальныхъ членовъ ея (т.-е. отъ $3.60.u^2$, u^3 и R). Поэтому, членъ $3.3600u$ или равенъ, или меньше 125200. Итакъ

$$3.3600u \leqslant 125200,$$

откуда

$$u \leqslant \frac{1252}{3.36}.$$

Но цифра единицъ u есть число цѣлое, а потому, раздѣливъ 1252 на 3.36, и взявъ цѣлую часть частнаго, найдемъ высшій предѣлъ цифры единицъ корня. Замѣтивъ, что 125254 называется первымъ остаткомъ, выводимъ изъ сказаннаго слѣдующее правило для нахожденія цифры единицъ корня: *отдѣливъ въ первомъ остаткѣ двѣ цифры справа запятою и раздѣливъ оставшееся влѣво отъ запятой число на утроенный квадратъ цифры десятковъ корня, въ цѣлой части частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ цифры единицъ корня.*

Въ данномъ случаѣ, цѣлая часть сказаннаго частнаго есть 10; слѣд., цифра единицъ корня будетъ 9 или меньше 9. Для испытанія цифры 9, мы должны составить сумму $3.3600.9 + 3.60.9^2 + 9^3$ и вычесть ее изъ перваго остатка: если вычитаніе будетъ возможно, то цифра 9 будетъ требуемая; въ противномъ случаѣ ее надо послѣдовательно уменьшать на 1 до тѣхъ поръ, пока вычитаніе сдѣлается возможнымъ. Сумму, подлежащую вычитанію, можно написать такъ:

$$[3 \times 3600 + (3 \times 60 + 9) \times 9] \times 9.$$

$3 \times 3600 = 10800$; $3 \times 60 + 9 = 189$; $189 \times 9 = 1701$; $10800 + 1701 = 12501$; $12501 \times 9 = 112509$, что меньше 125254.

Итакъ, цифра единицъ равна 9; искомый корень $= 69$, а остатокъ корня $= 125254 - 112509 = 12745$.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{341,254} & 69 \\
216 & \\
\hline
108\;\; 1252,54 & \\
1125\,09 & \\
\hline
12\,745 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
189 \\
\times 9 \\
\hline
1701 \\
+10800 \\
\hline
12501 \\
\times 9 \\
\hline
112509
\end{array}$$

159. Общій случай. — Этотъ случай приводится къ двумъ предыдущимъ при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. — *Число десятковъ кубичнаго корня изъ даннаго числа равно кубичному корню изъ наибольшаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ этого числа.*

Пусть данное число будетъ 495864349, и пусть a^3 будетъ наибольшій кубъ, содержащійся въ числѣ тысячъ этого числа, т.-е. въ 495864; въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$a^3 \leq 495864 < (a+1)^3;$$

откуда, умноживъ всѣ числа на 1000, получимъ:

$$(10a)^3 \leqslant 495864000 < [10(a+1)]^3;$$

или, придавая къ среднему числу 349, что не измѣнитъ смысла неравенствъ, но обратитъ возможное равенство въ неравенство:

$$(10a)^3 < 495864349 < [10(a+1)]^3.$$

Отсюда, переходя къ корнямъ, найдемъ:

$$10a < \sqrt[3]{495864349} < (a+1)\,.\,10.$$

Итакъ, искомый корень заключается между a десятками и $a+1$ десяткомъ, а потому содержитъ a десятковъ, и нѣкоторое число единицъ, не большее 9. Теорема такимъ образомъ доказана.

160. Мы нашли, что число десятковъ кубическаго корня изъ числа 495864349 есть корень кубичный изъ 495864; число же десятковъ этого послѣдняго корня, или число сотенъ перваго, равно кубическому корню изъ 495 (по той же теоремѣ). Отсюда заключаемъ:

1. *Чтобы найти цифру высшаго разряда кубичнаго корня изъ цѣлаго числа, достаточно раздѣлить его на грани, отдѣляя по три цифры отъ правой руки къ лѣвой, и извлечь кубичный корень изъ первой грани слѣва.*

2. *Число цифръ корня, точнаго до 1 по недостатку, изъ цѣлаго числа равно числу сказанныхъ граней.*

161. Извлечемъ кубичный корень изъ 495864349.

Извлекая кубичный корень изъ 495864 такъ, какъ указано въ § 158, найдемъ число десятковъ искомаго корня: оно будетъ 79. Назвавъ цифру единицъ корня буквою u и возможный остатокъ черезъ R, имѣемъ:

$$495864349 = \overline{79}^3\,.\,1000 + 3\,.\,\overline{79}^2\,.\,100\,.\,u + 3\,.\,790\,.\,u^2 + u^3 + R.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства по $\overline{79}^3\,.\,1000$, получимъ:

$$2825349 = 3\,.\,\overline{79}^2\,.\,100\,.\,u + 3\,.\,790\,.\,u^2 + u^3 + R.$$

Отсюда, извѣстными разсужденіями убѣдимся, что высшій предѣлъ цифры единицъ u найдемъ, опредѣливъ цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія 28253 на $3\,.\,\overline{79}^2$, т.-е на 18723. Цѣлая часть этого частнаго равна 1; поэтому цифра единицъ корня будетъ или 1 или 0.

Для испытанія 1, составляемъ остальные три члена куба корня, т.-е. $3\,.\,\overline{79}^2\,.\,100 \times 1 + 3\,.\,790 \times 1^2 + 1^3$, что даетъ 1874671; такъ какъ это число не превышаетъ остатка 2825349, заключаемъ, что цифра единицъ корня есть 1, самый корень $= 791$, а остатокъ корня $= 2825349 - 1874671$, или 950678.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{r l | l}
 & \sqrt[3]{495,864,349} & 791 \\
 & 343 & 49 \times 3 = 147, \quad 219 \times 9 \quad 1971 \\
 \hline
147\ 9 & 1528,64 & \quad 14700 \\
 & 1500\ 39 & \quad +1971 \\
 \hline
18723\ \ 1 & 28253,49 & \quad 16671 \times 9 = 150039 \\
 \hline
 & 18746\ 71 & \quad\ 1971 \\
 & 9506\ 78 & \quad 16671 \\
 & & \qquad 81 \\
 & & \quad \overline{18723} = 3 \times \overline{79}^{2}, \quad 2371 \times 1 = 2371. \\
 & & \quad 1872300 \\
 & & \qquad 2371 \\
 & & \quad 1874671 \times 1
\end{array}
$$

Отсюда выводимъ:

162. *Правило извлеченія кубичнаго корня съ точностью до 1 изъ цѣлаго числа.*

Раздѣляютъ данное число на грани по три цифры отъ правой руки къ лѣвой, при чемъ первая грань слѣва можетъ имѣть и двѣ цифры и даже одну.

Первую цифру корня найдемъ, извлекая кубичный корень изъ первой грани слѣва.

Чтобы найти вторую цифру, вычитаютъ изъ первой грани кубъ первой цифры корня, и къ остатку сносятъ вторую грань: такимъ образомъ получается первый частный остатокъ. Отдѣляютъ съ правой стороны его двѣ цифры, а оставшееся влѣво отъ запятой число дѣлятъ на утроенный квадратъ первой цифры корня: цѣлая часть частнаго дастъ высшій предѣлъ для второй цифры корня.

Чтобы узнать, годится ли эта цифра, приписываютъ ее справа къ утроенной первой цифрѣ корня, и умножаютъ полученное число на испытуемую цифру; къ произведенію придаютъ утроенный квадратъ первой цифры корня (служившій сейчасъ дѣлителемъ), приписавъ къ нему справа два нуля, и умножаютъ полученную сумму на испытуемую цифру. Если это произведеніе не превышаетъ перваго остатка, испытуемая цифра годится: въ противномъ случаѣ уменьшаютъ ее на 1 и снова исполняютъ указанное испытаніе, и т. д., пока испытаніе не дастъ произведенія, не превышающаго первый частный остатокъ. Найденную цифру приписываютъ справа отъ первой цифры корня.

Для нахожденія третьей цифры корня, вычитаютъ составленное произведеніе изъ перваго остатка, и къ разности сносятъ третью грань: получится второй частный остатокъ. Съ правой стороны его отдѣляютъ двѣ цифры, и дѣлятъ оставшееся влѣво отъ запятой число на утроенный квадратъ числа, найденнаго въ корнѣ: цѣлая часть частнаго будетъ представлять высшій предѣлъ третьей цифры корня: испытываютъ эту цифру вышеуказаннымъ способомъ.

Такимъ образомъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока будутъ снесены всѣ грани.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ дробей съ точностью до 1.

163 Теорема. *Кубичный корень изъ несократимой дроби несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.*

То же доказательство какъ въ § 136.

Такъ, члены дроби $\frac{8}{125}$ — точные кубы, поэтому кубичный корень изъ нея извлекается точно:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}.$$

Кубичные корни изъ дробей $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{64}$ и $\frac{2}{3}$ — несоизмѣримы.

164. Теорема. — *Кубичный корень изъ дроби, точный до 1, есть корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа, или этотъ корень $+ 1$.*

Доказательство аналогично § 137. Отсюда

Правило. Чтобы извлечь кубичный корень изъ дроби точно до 1, надо отбросить дробную часть, и извлечь кубичный корень изъ цѣлой части точно до 1

Примѣръ. Извлечь кубичный корень изъ 2896,75 съ точностью до 1.

Отбрасывая дробь, извлекаемъ съ указанною точностью корень изъ 2896; находимъ результаты: 14 — по недостатку и 15 — по избытку

Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ и изъ дробей съ точностью до $\frac{1}{n}$.

165. *Правило. Чтобы извлечь кубичный корень изъ цѣлаго или изъ дробнаго числа съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно умножить это число на кубъ знаменателя степени приближенія, изъ произведенія извлечь корень точно до 1, и раздѣлить его на знаменателя степени приближенія.*

Доказательство такое же какъ и въ § 139

Примѣръ. Вычислить $\sqrt[3]{3}$ съ точностью до $\frac{1}{100}$.

Для этого надо извлечь кубичный корень изъ 3×100^3, т.-е. изъ 3000000 съ точностью до 1, и раздѣлить результатъ на 100.

```
   ∛3,000,000 | 144
      1       |        34 × 4 = 136
34 | 20,00    | 300
     17 44    | 136
   |  2560,00 | 436 × 4 = 1744
      2419 84 |  136     424 × 4 = 1696
       140 16 |  436
              |   16
              |  58800
              |   1696
                60496 × 4 = 241984
```

Искомый корень 1,44 — по недостатку, и 1,45 — по избытку.

Сокращенный способъ извлеченія кубичнаго корня.

166. Пусть требуется извлечь кубичный корень съ точностью до 1 изъ цѣлаго числа A — случай, къ которому приводятся всѣ остальные. Положимъ, что корень имѣетъ $2m+1$ цифръ, и что обыкновеннымъ способомъ найдено $m+1$ цифръ, т.-е. больше половины всѣхъ цифръ корня, а остается найти послѣднія m цифръ. Обозначимъ буквою a число, составленное найденными $m+1$ цифрами, сопровождаемыми m нулями, а буквою x остальную часть корня, которая вообще есть число несоизмѣримое: истинный корень выразится суммою $a+x$. Итакъ:

$$A=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3,$$

откуда

$$\frac{A-a^3}{3a^2}=x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}.$$

Найдемъ цѣлую часть q частнаго отъ раздѣленія $A-a^3$ на $3a^2$, и пусть остатокъ дѣленія будетъ r; слѣд. получимъ равенство:

$$\frac{A-a^3}{3a^2}=q+\frac{r}{3a^2}.$$

Приравнивая два выраженія частнаго $\frac{A-a^3}{3a^2}$, найдемъ:

$$x+\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{3a^2}=q+\frac{r}{3a^2},$$

откуда

$$x=q+\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right).$$

Докажемъ, что абсолютная величина разности $\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)$ меньше 2, и что слѣд. q выражаетъ величину x съ ошибкою, меньшею 2 единицъ.

Замѣтивъ, что r есть остатокъ дѣленія, въ которомъ дѣлитель равенъ $3a^2$, заключаемъ, что $\frac{r}{3a^2}<1$. Затѣмъ, въ цѣлой части x находится m цифръ, поэтому x меньше наименьшаго $(m+1)$ значнаго числа, т.-е. $x<10^m$, а потому $x^2<10^{2m}$; съ другой стороны a состоитъ изъ $2m+1$ цифръ, слѣд. $a \geqq 10^{2m}$; а потому $\frac{x^2}{a}<1$. Наконецъ, $3a>3.10^{2m}$, а потому $\frac{x}{3a}<\frac{1}{3.10^m}$. Отсюда видно, что $\left(1+\frac{x}{3a}\right)<2$, и слѣдовательно

$$\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<2,$$

а значитъ и абсолютная величина раности $\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)$ также меньше 2. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

чтобы извлечь, съ точностью до 1, кубичный корень изъ цѣлаго числа, находятъ обыкновеннымъ способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня; затѣмъ остальныя, съ точностью до 2, находятъ, раздѣливъ полный *остатокъ на утроенный квадратъ найденной части корня (т.-е. числа, состоящаго изъ* m + 1 *первыхъ цифръ съ* m *нулями).*

Слѣдуетъ замѣтить, что лишь въ исключительныхъ, рѣдкихъ, случаяхъ приближеніе будетъ ошибочно болѣе чѣмъ на 1; обыкновенно же, ошибка бываетъ меньше 1; во всякомъ случаѣ, найдя указаннымъ сокращеннымъ способомъ корень, слѣдуетъ прямо вычислять предѣлъ разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right)$.

167. Можно всегда опредѣлить, будетъ ли корень, вычисленный сокращеннымъ способомъ, т.-е $a + q$ — точный, или приближенный; а въ послѣднемъ случаѣ — въ какую сторону сдѣлана ошибка.

Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ остатокъ по нахожденіи части a корня буквою R; имѣемъ равенство:

$$A - a^3 = R, \text{ откуда } A = a^3 + R.$$

Раздѣливъ R на $3a^2$, въ частномъ получимъ q, и въ остаткѣ r; слѣд.

$$R = 3a^2 . q + r,$$

а потому

$$A = a^3 + 3a^2q + r.$$

Отсюда:

1) Если $r > (3a + q)q^2$, то $A > (a + q)^3$, и слѣд. $a + q$ будетъ приближеніе по недостатку.

2) Если $r = (3a + q)q^2$, то $A = (a + q)^3$, слѣд. $a + q$ будетъ точный корень.

3) Если же $r < (3a + q)q^2$, то $A < (a + q)^3$, а слѣд. $a + q$ будетъ приближеніемъ по избытку.

168. Извлечь кубичный корень изъ 96428639457679. Первыя три цифры опредѣляемъ обыкновеннымъ способомъ.

96,428,639,457,679	458			
324,28	4800	125	607500	1358
5303639	625	5	10864	8
356727	5425		618364	
	25		64	
	6075		629292	

Находимъ 458. Остатокъ R = 356727457679; $a = 45800$; $3a^2 = 6292920000$. Раздѣливъ R на $3a^2$, находимъ въ частномъ 56. Искомый корень 45856.

Вычисляемъ предѣлъ разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right)$. Такъ какъ $a > 4 . 10^4$, и $x < 10^2$, то $\frac{x^2}{a} < \frac{1}{4}$. Затѣмъ, $3a > 12 . 10^4$, сл. $\frac{x}{3a} < \frac{1}{12 \times 10^2}$, а потому $1 + \frac{x}{3a} < 1 + \frac{1}{12 . 10^2}$. Отсюда: $\frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right) < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{12 . 10^2}\right)$ т.-е. < 1. Сл. и $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a}\left(1 - \frac{x}{3a}\right) < 1$. Корень 45856 ошибоченъ меньше чѣмъ на 1, и какъ легко убѣдиться — по недостатку.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ многочленовъ

169. Пусть требуется извлечь кубичный корень изъ многочлена

$$-125a^9x^{12}+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6,$$

расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, которую мы принимаемъ за главную. Допуская, что многочленъ этотъ есть точный кубъ, и что корень изъ него, также расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x, есть $p+q+r+s+\ldots$, замѣчаемъ, что данный многочленъ долженъ быть равенъ кубу своего корня, т.-е. $(p+q+r+s+\ldots)^3$. Такимъ образомъ имѣемъ тождество:

$$-125a^9x^{12}+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6$$
$$=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3+\ldots(1)$$

По свойству тождества, высшіе члены обѣихъ частей должны быть равны, а потому $p^3=-125a^9x^{12}$, откуда

$$p=\sqrt[3]{-125a^9x^{12}}=-5a^3x^4.$$

Отсюда заключаемъ: *для нахожденія высшаго члена корня нужно извлечь кубичный корень изъ высшаго члена даннаго многочлена.*

Вычтя изъ первой части тождества (1) $-125a^9x^{12}$, а изъ второй — равное этому количество p^3, найдемъ тождество.

$$150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6=3p^2q+$$
$$+3pq^2+q^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3+\ldots(2).$$

а потому высшіе по буквѣ x члены обѣихъ частей должны быть равны, т.-е.

$3p^2q=150a^8x^{11}$, или, такъ какъ $p=-5a^3x^4$, то $3\,.\,25a^6x^8\,.\,q=150a^8x^{11}$,

откуда

$$q=150a^8x^{11}:75a^6x^8=2a^2x^3.$$

Отсюда заключеніе: *чтобы найти второй членъ корня, нужно изъ даннаго полинома вычесть кубъ перваго члена и высшій членъ перваго остатка раздѣлить на утроенный квадратъ высшаго члена корня.*

Вычтемъ изъ второй части тождества (2) $3p^2q+3pq^2+q^3$, а изъ первой равное этому выраженіе $3(-5a^3x^4)^2.2a^2x^3+3(-5a^3x^4)(2a^2x^3)^2+(2a^2x^3)^3$ или $150a^8x^{11}-60a^7x^{10}-8a^6x^9$; найдемъ тождество

$$225a^7x^{10}-180a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7-27a^3x^6=3(p+q)^2r+$$
$$+3(p+q)r^2+r^3+\ldots(3)$$

Приравнивая снова высшіе члены обѣихъ частей, получимъ равенство

$$3p^2r=225a^7x^{10},\ \text{или}\ 3\,.\,25a^6x^8\,.\,r=225a^7x^{10},\ \text{откуда}$$
$$r=225a^7x^{10}:75a^6x^8=3ax^2.$$

Отсюда заключаемъ: *чтобы найти третій членъ корня, нужно изъ перваго остатка вычесть утроенное произведеніе квадрата 1-го члена корня на 2-й + утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго и кубъ второго, и первый членъ второго остатка раздѣлить на утроенный квадратъ 1-го члена корня.*

Вычтемъ изъ второй части тождества (3) выраженіе $3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3$, а изъ первой равное ему количество: $3(-5a^3x^4+2a^2x^3)^2.3ax^2+3(-5a^3x^4+2a^2x^3)(3ax^2)^2+(3ax^2)^3=225a^7x^{10}-180a^6x^9+36a^5x^8-135a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6=225a^7x^{10}-180a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6$. По вычитаніи въ остаткѣ въ 1-й части получается ноль; поэтому данный полиномъ есть точный кубъ, и искомый корень $=-5a^3x^4+2a^2x^3+3ax^2$.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l}
-125a^9x^{12}+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6 & -5a^3x^4+2a^2x^3+3ax^2 \\
\pm125a^9x^{12} & 75a^6x^8 \\
\hline
\qquad+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6 & 3.25a^6x^8.2a^2x^3+3(-5a^3x^4).4a^4x^6+(2a^2x^3) \\
\qquad\;150a^8x^{11}\;60a^7x^{10}-8a^6x^9 & 75a^6x^8 \\
\hline
\qquad\qquad225a^7x^{10}-180a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6 & 3(-5a^3x^4+2a^2x^3)^2.3ax^2 \\
\qquad\quad-225a^7x^{10}+180a^6x^9-36a^5x^8-54a^4x^7-27a^3x^6 & 3(-5a^3x^4+2a^2x^3)9a^2x^4+27a^3x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad+135a^5x^8 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\;0 &
\end{array}$$

Отсюда выводимъ слѣдующее

170. *Правило. Расположивъ полиномъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, извлекаемъ кубичный корень изъ перваго его члена, получаемъ первый членъ корня.*

Вычтя кубъ его изъ даннаго полинома, найдемъ первый остатокъ, раздѣливъ первый членъ этого остатка на утроенный квадратъ перваго члена корня, въ частномъ получимъ второй членъ корня.

Вычтя изъ перваго остатка утроенное произведеніе квадрата перваго члена корня на второй, утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго и кубъ второго члена корня, получимъ второй остатокъ. Раздѣливъ первый его членъ на утроенный квадратъ перваго члена корня, получимъ въ частномъ третій членъ корня.

Вычтя изъ второго остатка утроенное произведеніе квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ корня на третій, утроенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на квадратъ третьяго и кубъ третьяго члена, найдемъ третій остатокъ. Раздѣливъ первый его членъ на утроенный квадратъ перваго члена корня, получимъ въ частномъ четвертый членъ корня и т. д.

Дѣйствіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ получится ноль.

171. Когда неизвѣстно, представляетъ ли данный полиномъ точный кубъ или нѣтъ, примѣняютъ къ нему предыдущее правило, замѣчая, что будетъ ли полиномъ расположенъ по нисходящимъ, или по восходящимъ степенямъ главной буквы, всегда можно предвидѣть степень послѣдняго члена корня, въ предположеніи, что данный многочленъ есть точный кубъ: она должна быть втрое меньше степени послѣдняго члена его. Когда данный полиномъ есть точный кубъ, послѣдній членъ корня долженъ равняться кубичному корню изъ послѣдняго члена полинома, а слѣдующій остатокъ долженъ быть нулемъ. Въ противномъ случаѣ данный многочленъ не есть точный кубъ.

ГЛАВА XIV.

Объ ирраціональныхъ числахъ.

Происхожденіе ирраціональныхъ чиселъ.—Несоизмѣримыя величины въ геометріи.—Способъ предѣловъ. — Распространеніе основныхъ законовъ дѣйствій на числа несоизмѣримыя.

172. Изученіе обратныхъ дѣйствій служитъ источникомъ для открытія новыхъ разрядовъ величинъ. Такъ, три прямыя ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами, т.-е. сложеніе, умноженіе, которое есть только частный случай сложенія и возвышенія въ степень — частный случай умноженія, даютъ въ результатѣ всегда только цѣлыя числа. При изученіи же трехъ обратныхъ дѣйствій — вычитанія, дѣленія и извлеченія корня, открываются новые роды величинъ, а именно: вычитаніе приводитъ къ открытію отрицательныхъ величинъ, дѣленіе — къ открытію дробныхъ, а извлеченіе корня приводитъ къ двумъ новымъ разрядамъ величинъ — несоизмѣримыхъ и мнимыхъ. Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ чиселъ *несоизмѣримыхъ* или *ирраціональныхъ*.

173. Происхожденіе ирраціональныхъ чиселъ при извлеченіи корня.

Обобщимъ теоремы §§ 124, 136, 154 и 163 для корня какого-угодно порядка.

Теорема I. *Если цѣлое число* A *есть неточная* n*-ая степень, то корень* n*-го порядка изъ него — несоизмѣримъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ A не есть точная n-ая степень другого цѣлаго числа, то $\sqrt[n]{A}$ не можетъ равняться никакому цѣлому числу. Допустивъ же, что этотъ корень равняется несократимой дроби $\frac{p}{q}$, т.-е. допустивъ возможность равенства

$$\sqrt[n]{A}=\frac{p}{q},$$

имѣли бы отсюда, что

$$A=\frac{p^n}{q^n}.$$

Но p есть число первое съ q, слѣд. p^n — первое съ q^n, а потому $\frac{p^n}{q^n}$ не можетъ равняться цѣлому числу A, и допущенное равенство невозможно. Итакъ, корень n-го порядка изъ цѣлаго числа, не представляющаго точной n-ой степени, *несоизмѣримъ съ единицею*.

Таковы: $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[5]{53}$, и т. д.

Теорема II. *Корень* n*-го порядка изъ несократимой дроби* $\frac{A}{B}$ *несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=P$, гдѣ P — число цѣлое, невозможно, ибо оно приводитъ къ равенству $\frac{A}{B}=P^n$, выражающему, что несократимая дробь равна цѣлому числу. Такимъ образомъ, искомый корень не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ. Но онъ не можетъ быть точно выраженъ и конечною дробью. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ равенство $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{C}{D}$, гдѣ $\frac{C}{D}$ — дробь несократимая, имѣемъ: $\frac{A}{B} = \frac{C^n}{D^n}$, гдѣ вторая часть — также дробь несократимая. Равенство этихъ дробей возможно только тогда, когда $A = C^n$, и $B = D^n$, т.-е. когда A и B суть точныя n-ыя степени; если же этого нѣтъ, то $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ нельзя точно выразить ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ доляхъ единицы, слѣд. корень этотъ будетъ несоизмѣримъ.

Таковы: $\sqrt[3]{\frac{27}{44}}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{7}}$ и т. д.

174. Хотя ирраціональныя числа нельзя вычислять точно, но всегда можно ихъ опредѣлять *съ какою-угодно степенью точности*.

Пусть, напр., требуется вычислить $\sqrt[n]{A}$, гдѣ A есть цѣлое число, не представляющее точной n-ой степени, съ ошибкою меньшею $\frac{1}{p}$, гдѣ p — какъ угодно большое цѣлое число. Умноживъ и раздѣливъ данный корень на p, получимъ (подведя множителя p подъ знакъ корня):

$$\sqrt[n]{A} = \frac{p\sqrt[n]{A}}{p} = \frac{\sqrt[n]{Ap^n}}{p}.$$

Если наибольшая n-ая степень, содержащаяся въ Ap^n, будетъ цѣлое число r^n, то $r + 1 > \sqrt[n]{Ap^n} > r$, откуда, раздѣливъ всѣ три числа на p и замѣтивъ, что $\frac{\sqrt[n]{Ap^n}}{p} = \sqrt[n]{A}$, найдемъ

$$\frac{r+1}{p} > \sqrt[n]{A} > \frac{r}{p},$$

откуда прямо слѣдуетъ, что какъ $\frac{r}{p}$, такъ и $\frac{r+1}{p}$ выражаютъ $\sqrt[n]{A}$ приближенно, съ ошибкою меньшею $\frac{1}{p}$: требуемое доказано.

Точно такъ же, если $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, гдѣ $\frac{A}{B}$ дробь несократимая, нельзя вычислить точно, то можно найти его съ какимъ-угодно приближеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, помноживъ числ. и знам. на B^{n-1}, найдемъ:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{\frac{AB^{n-1}}{B^n}} = \frac{\sqrt[n]{AB^{n-1}}}{B};$$

но, по предыдущему, всегда можно найти двѣ дроби, разнящіяся меньше чѣмъ на $\frac{1}{p}$ отъ $\sqrt[n]{AB^{n-1}}$; пусть эти дроби будутъ $\frac{k}{p}$ и $\frac{k+1}{p}$, такъ что

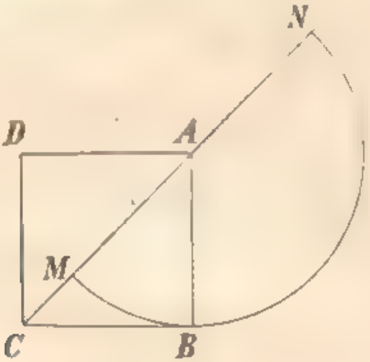
$$\frac{k+1}{p} > \sqrt[n]{AB^{n-1}} > \frac{k}{p};$$

раздѣливъ всѣ три числа на B, найдемъ,

$$\frac{k+1}{Bp} > \sqrt[n]{\frac{A}{B}} > \frac{k}{Bp}$$

откуда заключаемъ, что крайнія дроби выражаютъ искомый корень съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{Bp}$.

175. Несоизмѣримыя величины въ геометріи. Геометрія также представляетъ примѣры несоизмѣримыхъ величинъ: и замѣчательнѣйшія изъ нихъ: окружность круга и діаметръ, діагональ квадрата и сторона. Чтобы показать, какимъ образомъ можно убѣдиться геометрически въ несоизмѣримости двухъ линій, докажемъ a priori,—не измѣряя на самомъ дѣлѣ этихъ линій, что *діагональ квадрата несоизмѣрима съ ея стороной.*



Черт. 10.

Проведемъ діагональ AC квадрата ABCD и продолжимъ ее за точку A. Изъ A, какъ изъ центра радіусомъ AB опишемъ полуокружность, которая пересѣчетъ діагональ и ея продолженіе въ точкахъ M и N. Для доказательства, что AC несоизмѣрима съ AB, постараемся измѣрить первую изъ этихъ линій помощію второй.

Итакъ, составимъ отношеніе $\frac{AC}{AB}$.

Мы имѣемъ: $AC = AM + MC \quad AB + MC$, откуда

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{MC}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \ldots (1).$$

Вопросъ приводится къ опредѣленію отношенія $\frac{AB}{MC}$. Замѣчая, что CB есть касательная, а CN — сѣкущая къ окружности имѣемъ:

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 = CM \times CN,$$

откуда

$$\frac{AB}{MC} = \frac{CN}{AB}.$$

Но $CN = NA + AM + MC = 2AB + MC$, поэтому

$$\frac{AB}{MC} = \frac{2AB + MC}{AB} = 2 + \frac{MC}{AB} = 2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \quad . \; (2).$$

Внося эту величину въ равенство (1), находимъ

$$\frac{AC}{AB} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}}}.$$

Итакъ, снова приходится опредѣлять отношеніе $\frac{AB}{MC}$. Но эта величина намъ извѣстна: она опредѣляется равенствомъ (2); такимъ образомъ снова мы введемъ $\frac{AB}{MC}$, которое опять нужно будетъ замѣнять его величиною изъ (2), и т. д. Такія подстановки будутъ продолжаться неограниченно, такъ что дѣйствіе никогда не можетъ быть законченно, потому что всегда будемъ получать отношеніе $\frac{AB}{MC}$. **Итакъ, отношеніе** $\frac{AC}{AB}$ представляется въ видѣ

$$\frac{AC}{AB} = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

такъ что оно никогда не можетъ быть вычислено съ точностію: линіи AC и AB суть, слѣдовательно, линіи несоизмѣримыя.

176. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами подчинены тѣмъ же законамъ, какъ и дѣйствія надъ числами соизмѣримыми. Доказательство этого положенія основано на особомъ способѣ, называемомъ *способомъ предѣловъ*, съ начальными основаніями котораго намъ необходимо, поэтому, теперь же ознакомиться.

Способъ предѣловъ.

177. Количество называется ***постояннымъ***, если въ данномъ вопросѣ оно не измѣняетъ своей величины. Такъ: радіусъ въ данномъ кругѣ есть величина постоянная, также сумма угловъ треугольника и т. п.

Количество наз. *перемѣннымъ*, если оно не имѣетъ одной опредѣленной величины, но измѣняется въ болѣе или менѣе широкихъ границахъ. Напр., углы треугольника, хорда круга, и т. п.

Если перемѣнная величина, измѣняясь, приближается къ нѣкоторой постоянной, такъ что разность между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, то постоянная называется *предѣломъ* перемѣнной. Для выясненія понятія о предѣлѣ приводимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I.—Разсмотримъ выраженіе $1+\frac{1}{x}$, въ которомъ буквѣ x будемъ послѣдовательно давать цѣлыя положительныя значенія: 1, 2, 3,...; тогда $1+\frac{1}{x}$ будетъ принимать величины: $1+\frac{1}{1}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{3}$,$\cdots$ постепенно уменьшающіяся и приближающіяся къ 1.

Слѣд. $1+\frac{1}{x}$ будетъ количество перемѣнное, приближающееся къ постоянному числовому значенію — къ 1.

При этомъ, разность между перемѣннымъ $1+\frac{1}{x}$ и постояннымъ 1 выражается дробью $\frac{1}{x}$, которая можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою; въ самомъ дѣлѣ, желая, чтобы эта разность была меньше $\frac{1}{100000}$, нужно только x-су дать величину, большую 100000.

Заключаемъ, что предѣломъ перемѣнной $1+\frac{1}{x}$, въ данномъ случаѣ, будетъ 1.

Слово предѣлъ означаютъ буквами *lim* (отъ франц. слова *limite*—предѣлъ), такъ что можемъ предыдущій результатъ письменно выразить такъ:

$$\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Примѣръ II. — Разсмотримъ еще величину a, выраженную линіей AB.

Раздѣлимъ эту линію пополамъ, потомъ одну изъ половинъ еще пополамъ и т. д. до безконечности, и разсмотримъ рядъ

Черт. 11.

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\cdots+\frac{a}{2^n}+\frac{a}{2^{n+1}}+\cdots$$

состоящій изъ безконечнаго числа членовъ. Это будетъ величина перемѣнная, увеличивающаяся съ возрастаніемъ n и все болѣе и болѣе приближающаяся къ a. Если взять въ этой суммѣ n первыхъ членовъ, то она будетъ меньше a на $\frac{a}{2^n}$; чѣмъ больше будетъ n, тѣмъ эта разница будетъ ближе къ нулю, никогда, однако, его не достигая. Итакъ a есть предѣлъ перемѣнной $\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\cdots$ при неограниченномъ увеличеніи n.

178 Замѣтимъ, что одного приближенія перемѣнной величины къ постоянной еще недостаточно для того, чтобы постоянную принять за предѣлъ перемѣнной; необходимо, чтобы разность между ними могла быть сдѣлана какъ угодно малой. Такъ періодическая дробь 0,9898..., по мѣрѣ увеличенія числа десятичныхъ знаковъ, увеличивается, приближаясь къ 1, но 1 не есть предѣлъ этой дроби, ибо разность между 1 и данною дробью, сколько бы въ послѣдней ни взяли десятичныхъ знаковъ, всегда больше $\frac{1}{99}$. Предѣлъ данной дроби есть $\frac{98}{99}$.

179 Выясняя понятіе о предѣлѣ, мы встрѣтились съ особаго рода величинами перемѣнными, имѣющими свойство неограниченно уменьшаться, приближаясь къ нулю. Перемѣнная величина, неограниченно приближающаяся къ нулю и слѣдовательно имѣющая предѣломъ нуль, получаетъ названіе *безконечно-малой*, если ее разсматривать въ состояніи близкомъ къ нулю. Такъ, разность между перемѣнною и ея предѣломъ, когда перемѣнная приближается къ своему предѣлу, есть безконечно-малая величина.

Нужно остерегаться смѣшивать понятія — *безконечно-малое* и *весьма малое*: эти понятія не имѣютъ ничего общаго между собою. Названіе весьма-малой примѣняется къ *постоянной* величинѣ, настолько малой, что она ускользаетъ отъ оцѣнки ея нашими чувствами. Напротивъ, безконечно-малая, будучи существенно перемѣнною, не имѣетъ опредѣленной величины, и слѣд. величина ея ничѣмъ не связана съ нашими физическими средствами оцѣнки величинъ. Сущность безконечно-малой заключается въ томъ, что она имѣетъ свойство неограниченно уменьшаться, становясь какъ угодно близкою къ нулю.

180. *Безконечно-большою величиною* наз. такая перемѣнная, которая можетъ быть сдѣлана болѣе всякой напередъ заданной величины, какъ бы послѣдняя ни была велика.

Примѣромъ безконечно-большой величины можетъ служить дробь $\frac{1}{x}$, гдѣ x безконечно-малая величина. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{x}$ можетъ быть сдѣлана больше всякой заданной величины: желая, напр., сдѣлать эту дробь больше 100000, достаточно взять x меньше 0,00001.

Понятіе о безконечно-большой величинѣ не слѣдуетъ смѣшивать съ понятіемъ о *весьма большой* величинѣ. Такъ, 1000000 верстъ есть величина весьма большая, но не подходитъ подъ понятіе о безконечно-большой величинѣ. Названіе весьма большой дается величинѣ постоянной; напротивъ, безконечно-большая — есть величина *существенно перемѣнная*.

Не слѣдуетъ также смѣшивать понятіе о безконечно-большомъ съ *абсолютною безконечностью*, взятою въ обыкновенномъ смыслѣ. Абсолютная безконечность исключаетъ всякую идею ограниченія и численнаго опредѣленія, и потому не можетъ служить предметомъ математическаго изслѣдованія.

181. Свойства безконечно-малыхъ. — *I. Сумма безконечно-малыхъ, взятыхъ въ ограниченномъ числѣ, есть величина безконечно-малая.*

Возьмемъ n безконечно-малыхъ величинъ: α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$, α_n; требуется доказать, что сумма ихъ можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины α. Такъ какъ α_1, $\alpha_2, \ldots$ суть величины безконечно-малыя.

то каждая изъ нихъ можетъ быть сдѣлана меньше $\frac{\alpha}{n}$, поэтому имѣемъ рядъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 < \frac{\alpha}{n}\\ \alpha_2 < \frac{\alpha}{n}\\ \alpha_3 < \frac{\alpha}{n}\\ \\ \alpha_n < \frac{\alpha}{n}\end{array}\right\}$$

Сложивъ ихъ, найдемъ:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n < \frac{\alpha}{n}\cdot n,$$

такъ какъ $\frac{\alpha}{n}$ берется слагаемымъ n разъ; или

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n < \alpha.$$

Итакъ, сумма $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ можетъ быть сдѣлана меньше α, и требуемое доказано.

II. *Разность двухъ безконечно-малыхъ есть величина безконечно малая.*

Дѣйствительно, если α_1 и α_2 суть величины безконечно-малыя, то уменьшивъ α_1 на α_2, получимъ разность $\alpha_1-\alpha_2$ меньшую α_1, и потому и подавно безконечно-малую.

III. *Произведенiе нѣсколькихъ безконечно-малыхъ, взятыхъ въ опредѣленномъ числѣ, есть величина безконечно-малая.*

Возьмемъ n безконечно-малыхъ: α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$, α_n и докажемъ, что произведенiе ихъ можетъ быть сдѣлано меньше произвольно малаго количества α. α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$, α_n, будучи безконечно-малыми, могутъ быть сдѣланы меньше $\sqrt[n]{\alpha}$; поэтому имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 < \sqrt[n]{\alpha}\\ \alpha_2 < \sqrt[n]{\alpha}\\ \alpha_3 < \sqrt[n]{\alpha}\\ \\ \alpha_n < \sqrt[n]{\alpha}\end{array}\right\}$$

Перемноживъ эти неравенства, найдемъ:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n < \sqrt[n]{\alpha}\cdot\sqrt[n]{\alpha}\cdot\sqrt[n]{\alpha}\ldots\sqrt[n]{\alpha},$$

или

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n < \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n;$$

но, по опредѣленiю корня, $\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha$, слѣд.

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n < \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствiе. Такъ какъ степень есть произведенiе равныхъ множителей, то изъ предыдущей теоремы прямо слѣдуетъ, что степень съ конечнымъ цѣлымъ положительнымъ показателемъ безконечно-малой есть величина безконечно-малая.

IV. *Произведенiе безконечно-малой на величину конечную—безконечно мало.*

Пусть α_1 — безконечно-малое, а n — конечное количество; доказать, что $n\alpha_1$ можетъ быть сдѣлано меньше произвольно малаго количества α. Такъ какъ α_1 безконечно-мало, то всегда можно положить $\alpha_1 < \frac{\alpha}{n}$, откуда $\alpha_1 n < \frac{\alpha}{n}\cdot n$, или $\alpha_1 n < \alpha$.

V. *Частное отъ раздѣленiя безконечно-малой величины на конечную есть безконечно-малая величина.*

[illegible] если a_1 безконечно-мало, то всегда можно сдѣлать $a_1 < na$, гдѣ n — [illegible] а a — произвольно мало; а отсюда $\frac{a_1}{n} < a$.

[illegible] *конечнымъ цѣлымъ положительнымъ показателемъ изъ* [illegible] *величины есть величина безконечно-малая.*

[illegible] жнія обозначенія, имѣемъ: $a_1 < a^n$, ибо a_1 безконечно-мало; а [illegible] нь n-ой степени изъ обѣихъ частей, найдемъ $\sqrt[n]{a_1} < a$.

[illegible] ъ находить постоянную величину, служащую предѣломъ пере[illegible]ется *способомъ предѣловъ.* Онъ основанъ на нижеслѣдующихъ [illegible].

[illegible] рема I. — *Если постоянная величина* K *заключается ме*[illegible] *перемѣнными u* и *v* (т.-е. если $u < K < v$, или $u > K > v$), [illegible] *которыхъ безконечно-мала, то* K *служитъ общимъ предѣломъ* [illegible] *u* и *v.*

[illegible] дѣлѣ, такъ какъ K заключается между *u* и *v*, то разности [illegible] и $K - v$ численно меньше разности $u - v$, т.-е. безконечно-малой, а [illegible] также безконечно-малы; отсюда, на основаніи опредѣленія предѣла, за[illegible], что K служитъ общимъ предѣломъ перемѣнныхъ *u* и *v*.

[illegible] ръ. Окружность круга заключается между периметрами правиль[illegible] одноименныхъ многоугольниковъ описаннаго и вписаннаго, разность между [illegible] ми при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ становится безконечно-[illegible], заключаемъ, что окружность есть общій предѣлъ для обоихъ пери[illegible]ровъ.

184. Теорема II. *Если перемѣнная величина v заключается между* [illegible]*ремѣнною u* и *ея предѣломъ* K, *то v имѣетъ тотъ же предѣлъ* K.

Въ самомъ дѣлѣ, K есть по условію предѣлъ перемѣнной *u*, слѣд. разность $K - u$ есть величина безконечно-малая; но *v* заключается между *u* и K, слѣд. разность $K - v$ численно меньше разности $K - u$, т.-е. и подавно безконечно-мала, а потому K есть предѣлъ перемѣнной *v*.

185. Теорема III. *Если двѣ перемѣнныя величины u* и *v связаны между собою такъ, что при всѣхъ измѣненіяхъ остаются равны между собою, или же разнятся одна отъ другой на безконечно-малую величину, если, притомъ, одна изъ нихъ стремится къ опредѣленному предѣлу, то и другая перемѣнная стремится къ тому же предѣлу.*

Дѣйствительно, пусть *u* и *v* будутъ двѣ перемѣнныя, разность между кото[illegible] равна нулю или безконечно-малой, тогда

$$u = v + \delta,$$

гдѣ δ равно 0 или безконечно-мало; пусть, кромѣ того, *u* стремится къ предѣлу K; тогда, по опредѣленію предѣла, можно положить

$$u = K + \varepsilon,$$

[illegible] безконечно-мало. Сравнивая оба выраженія *u*, имѣемъ

$$v + \delta = K + \varepsilon,$$

откуда

$$v - K = \varepsilon - \delta.$$

Вторая часть равенства, какъ разность двухъ безконечно-малыхъ, безконечно-мала, слѣд. такова же и первая часть: значитъ v имѣетъ предѣломъ K — ту же постоянную, что и u.

186. Теорема IV. *Если двѣ перемѣнныя u и v имѣютъ общій предѣлъ K, то всякая перемѣнная w, заключающаяся между u и v, имѣетъ тотъ же предѣлъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, если K служитъ предѣломъ для u и v, то

$$u = K + \delta \text{ и } v = K + \varepsilon,$$

гдѣ δ и ε безконечно-малы. Вычитая второе равенство изъ перваго, имѣемъ:

$$u - v = \delta - \varepsilon,$$

т.-е. $u - v$ есть безконечно-малая величина. Но w заключается между u и v, слѣд. разности $u - w$ и $w - v$ численно меньше безконечно-малой $\delta - \varepsilon$, а потому также безконечно-малы. Значитъ, перемѣнныя u и w — съ одной стороны, и v и w — съ другой, связаны между собою такъ, что разнятся между собою на безконечно-малую величину, а потому, по теор. III, заключаемъ, что w имѣетъ тотъ же предѣлъ, что u и v, т.-е. K

187. Теорема V. *Предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ.*

Пусть имѣемъ n перемѣнныхъ (гдѣ n — конечное число): $u_1, u_2, \dots, u_n$, которыхъ предѣлы соотвѣтственно равны: $K_1, K_2, \dots K_n$. По опредѣленію предѣла имѣемъ:

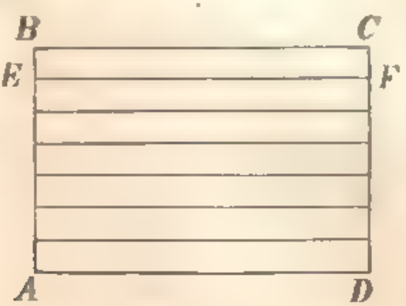
$$\left.\begin{aligned} K_1 - u_1 &= \alpha_1 \\ K_1 - u_2 &= \alpha_2 \\ K_3 - u_3 &= \alpha_3 \\ &\dots \\ K_n - u_n &= \alpha_n \end{aligned}\right\}$$

Здѣсь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ безконечно-малы. Складывая эти равенства, находимъ:

$$(K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Вторая часть этого равенства, какъ сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ, безконечно-мала, слѣд. равенство это показываетъ, что разность между постоянной $K_1 + K_2 + \dots + K_n$ и перемѣнной $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ безконечно-мала, а слѣд. по опредѣленію предѣла, постоянная $K_1 + K_2 + \dots + K_n$ служитъ предѣломъ перемѣнной $u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Примѣчаніе. Въ теоремѣ оговорено, что число слагаемыхъ должно быть *конечное* и опредѣленное: безъ этого ограниченія теорема не имѣетъ мѣста. Пояснимъ это примѣромъ.



Черт. 12.

Раздѣлимъ прямоугольникъ ABCD на нѣкоторое число равныхъ частей прямыми параллельными AD (черт. 12). Если число дѣленій неограниченно увеличивать, то каждый изъ малыхъ прямоугольниковъ BCFE и т. д., становится безконечно-малымъ, стремясь къ предѣлу — нулю. При конечномъ числѣ слагаемыхъ сумма предѣловъ была бы равна нулю; въ данномъ же случаѣ эта сумма предѣловъ равна прямоугольнику ABCD. Слѣд., при неограниченномъ числѣ слагаемыхъ теорема не имѣетъ мѣста.

188. Теорема VI. *Предѣлъ суммы перемѣнной и постоянной равенъ суммѣ постоянной и предѣла перемѣнной.*

Пусть перемѣнная u имѣетъ предѣлъ K; по опредѣленію предѣла имѣемъ: $u - K = \alpha$, гдѣ α — безконечно-малая величина. Прибавивъ и вычтя въ первой части постоянную a, найдемъ: $(u + a) - (K + a) = \alpha$. Это равенство показываетъ, что разность между перемѣнною $u + a$ и постоянною $K + a$ безконечно мала, а потому $K + a$ есть предѣлъ перемѣнной $u + a$, и теорема доказана.

189. Теорема VII. *Предѣлъ разности двухъ перемѣнныхъ равенъ разности ихъ предѣловъ.*

Пусть перемѣнныя u_1 и u_2 имѣютъ предѣлы K_1 и K_2; по опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$u_1 - K_1 = \alpha_1 \quad \text{и} \quad u_2 - K_2 = \alpha_2,$$

Но α_1 и α_2 безконечно-малы. Вычитая 2-е равенство изъ 1-го, имѣемъ:

$$(u_1 - u_2) - (K_1 - K_2) = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Но $\alpha_1 - \alpha_2$ [illegible] безконечно-малая; [illegible], по опредѣленію предѣла, [illegible] перемѣнная $u_1 - u_2$ имѣетъ предѣломъ $K_1 - K_2$, и теорема доказана.

190. Теорема VIII. *Предѣлъ разности между перемѣнной и постоянной равенъ разности между предѣломъ перемѣнной и постоянною.*

Если перемѣнная u имѣетъ предѣломъ K, то, по опредѣленію предѣла, $u - K = \alpha$, гдѣ α — безконечно-мало. Вычтя и придавъ къ 1-й части равенства постоянную a, имѣемъ: $(u - a) - (K - a) = \alpha$. Этимъ равенствомъ и доказывается, что предѣлъ величины $u - a$ равенъ $K - a$.

191. Теорема IX. *Предѣлъ произведенія конечныхъ перемѣнныхъ, взятыхъ въ конечномъ числѣ, равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

Пусть двѣ перемѣнныя u_1 и u_2 имѣютъ предѣлы K_1 и K_2; въ такомъ случаѣ: $u_1 = K_1 + \alpha_1$ и $u_2 = K_2 + \alpha_2$, гдѣ α_1 и α_2 безконечно-малы. Перемножая оба равенства, имѣемъ

$$u_1 . u_2 = (K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) = K_1 . K_2 + \alpha_1 . K_2 + \alpha_2 . K_1 + \alpha_1 . \alpha_2.$$

Произведенія $\alpha_1 . K_2$ и $\alpha_2 . K_1$, въ силу пункта IV § 181, а $\alpha_1 . \alpha_2$ — въ силу п. III того же §, безконечно-малы, а потому послѣднее равенство показываетъ, что перемѣнная $u_1 . u_2$ разнится безконечно мало отъ постоянной K_1K_2, слѣд. эта постоянная и есть предѣлъ перемѣнной u_1u_2.

Теорема справедлива для сколькихъ угодно множителей; это можно доказать, разсматривая произведеніе нѣсколькихъ перемѣнныхъ какъ одну перемѣнную и прилагая сюда теорему о двухъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ найдемъ:

$$\text{пред.}\,(u_1u_2u_3u_4) = \text{пред.}\,(u_1u_2u_3)\,.\,\text{пред.}\,u_4 = \text{пред.}\,(u_1u_2)\,.\,\text{пред.}\,u_3\,.\,\text{пред}\;u_4 =$$
$$\text{пред.}\,u_1\,.\,\text{пред.}\,u_2\,.\,\text{пред.}\,u_3\,.\,\text{пред.}\,u_4.$$

Примѣчаніе. Теорема справедлива только для случая, когда число множителей *конечно*. Напримѣръ, въ случаѣ выраженія $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, при $m = \infty$ каждый множитель имѣетъ предѣломъ 1, между тѣмъ какъ произведеніе имѣетъ предѣломъ не 1, которая, повидимому, должна бы была составлять произведеніе предѣловъ, а число e (2,71828...), какъ это будетъ доказано въ главѣ XLIX.

192. Теорема X. *Предѣлъ произведенія перемѣнной на постоянную равенъ произведенію этой постоянной на предѣлъ перемѣнной.*

Пусть u есть перемѣнная, предѣлъ которой = K, и a — данная постоянная. По опредѣленію предѣла имѣемъ $u = K \pm \alpha$, гдѣ α безконечно-мало. Помноживъ обѣ части равенства на a, получимъ: $u.a = Ka \pm \alpha.a$; но αa есть величина безконечно-малая (§ 180, IV), т.е. Ka разнится безконечно-мало отъ ua, а потому пред. $(ua) = K.a$, и теорема доказана.

193. Теорема XI. *Если обѣ перемѣнныя при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ сохраняютъ постоянное, конечное, отношеніе, то и предѣлы ихъ имѣютъ то же самое отношеніе.*

Пусть u_1 и u_2 двѣ перемѣнныя, отношеніе которыхъ всегда остается равнымъ постоянному m, т.е. $\frac{u_1}{u_2} = m$. Отсюда: $u_1 = u_2 . m$; но по предыдущей теоремѣ: пред. $(u_1) = m \times$ пред. (u_2), откуда $\frac{\text{пред. } (u_1)}{\text{пред. } (u_2)} = m$, и теорема доказана.

194. Теорема XII. *Предѣлъ отношенія двухъ конечныхъ перемѣн- u_1 и u_2 равенъ отношенію ихъ предѣловъ* K_1 и K_2.

Пусть $\frac{u_1}{u_2} = x$, откуда $u_1 = u_2 . x$. Изъ этого равенства, на осн. теор. III § 184 и теор. IX, § 190 имѣемъ: пред. $(u_1) =$ пред. (u_2) . пред. (x), а отсюда, раздѣливъ обѣ части на пред. (u_2), получимъ $\frac{\text{пред. } (u_1)}{\text{пред. } (u_2)} =$ пред. (x) или = пред. $\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$.

195. Теорема XIII. *Предѣлъ частнаго отъ раздѣленія перемѣнной на конечную постоянную равенъ частному отъ раздѣленія предѣла перемѣнной на эту постоянную.*

Пусть предѣлъ перемѣнной u равенъ K, а постоянная $= m$. Положимъ $\frac{u}{m} = x$, откуда $u = mx$, гдѣ x — перемѣнная. По теор. III § 184 и теор. X § 191 имѣемъ пред. (u) или $K = m$. пред. (x), откуда пред. $(x) = \frac{K}{m}$, или пред. $\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{K}{m}$, что и требовалось доказать.

196. Теорема XIV. *Предѣлъ частнаго отъ раздѣленія конечной постоянной на конечную перемѣнную равенъ частному отъ раздѣленія этой постоянной на предѣлъ перемѣнной.*

Пусть данная постоянная — a, перемѣнная = u, и пусть $\frac{a}{u} = x$, гдѣ x перемѣнная: отсюда $a = ux$. Пусть пред. $(u) =$ K, а пред. $(x) =$ L; по опредѣленію предѣла: $u = K \pm \alpha$, $x = L \pm \beta$, гдѣ α и β — безконечно-малы. Перемножая эти равенства, имѣемъ: $u . x = (K \pm \alpha)(L \pm \beta) = KL \pm L\alpha \pm K\beta + \alpha\beta$. Три послѣдніе члена, представляя алгебраическую сумму безконечно-малыхъ, могутъ давать въ результатѣ или безконечно-малую, или нуль. Въ первомъ случаѣ которая часть была бы перемѣнная величина, а этого не можетъ быть, потому что первая часть (ux) равна постоянной a; слѣдовательно $\pm L\alpha \pm K\beta \pm \alpha\beta$ обращается въ нуль, а потому $ux = K.L$, или, замѣняя ux равной ей величиной a, находимъ: $a = K.L$, откуда $L = \frac{a}{K}$, что и треб. доказать.

197. Теорема XV. *Предѣлъ степени перемѣнной равенъ той же степени предѣла этой перемѣнной, полагая показатель цѣлымъ и положительнымъ числомъ.*

Пусть u^m есть данная степень; при m цѣломъ положительномъ она представляетъ произведеніе m перемѣнныхъ множителей $u.u\ldots u$; если пред. $u = k$, то по теор. IX § 190 имѣемъ: пред. $(uu\ldots u) = k.k\ldots k$, или пред. $(u^m) = k^m$.

198 Теорема XVI. *Предѣлъ корня съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ изъ перемѣнной равенъ корню того же порядка изъ предѣла этой перемѣнной.*

Пусть имѣемъ $\sqrt[m]{u}$, гдѣ u — перемѣнное и m — цѣлое положительное число. Замѣтимъ, что $u = \left[\sqrt[m]{(u)}\right]^m$, по предыдущей теоремѣ имѣемъ: пред. $(u) = [\text{пред.}\,(\sqrt[m]{u})]^m$; извлекая изъ обѣихъ частей корень m-го порядка, находимъ:

$$\text{пред.}\,(\sqrt[m]{u}) = \sqrt[m]{\text{пред.}\,(u)}.$$

что и требовалось доказать.

Распространеніе основныхъ законовъ на несоизмѣримыя числа.

199. Мы видѣли, что есть такія, называемыя *несоизмѣримыми*, количества, которыя нельзя точнымъ образомъ выразить ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ какихъ доляхъ единицы. Однако и между такимъ количествомъ и единицею существуетъ извѣстное отношеніе. Это-то отношеніе мы и попытаемся опредѣлить; выяснимъ, что слѣдуетъ разумѣть, напр., подъ $\sqrt{2}$.

Извѣстнымъ способомъ нахожденія приближенныхъ квадратныхъ корней, можемъ вычислить сколько угодно десятичныхъ знаковъ корня кв. изъ 2; сдѣлавъ это, разсмотримъ рядъ чиселъ

$$1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \quad 1{,}414, \quad 1{,}4142, \ldots$$

которыя выражаютъ наибольшее число цѣлыхъ единицъ, десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ, квадраты которыхъ меньше 2.

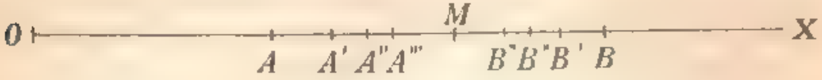
Разсмотримъ затѣмъ другой рядъ чиселъ,

$$2, \ 1{,}5 \quad 1{,}42 \quad 1{,}415, \quad 1{,}4143\ldots$$

указывающихъ наименьшее число цѣлыхъ единицъ, десятыхъ, сотыхъ.... которыхъ квадратъ больше 2. Эти числа получаются прибавленіемъ 1-цы къ послѣдней цыфрѣ чиселъ перваго ряда.

Затѣмъ, взявъ неограниченную прямую OX и нѣкоторый отрѣзокъ OA принявъ за 1, нанесемъ, начиная отъ точки O, отрѣзки

OA, OA', OA'', OA''',… , равные 1; 1,4; 1,41;…; а затѣмъ, отрѣзки OB, OB', OB'', OB''',… равные 2; 1,5; 1,42; 1,415,… Отрѣзки OA, OA', OA'',… идутъ возрастая, но при этомъ всегда остаются меньше нѣкоторой опредѣленной длины; напр., они всегда будутъ меньше OB. Но когда перемѣнное количество постоянно



Черт. 13.

возрастаетъ и, однако, остается всегда меньше нѣкоторой опредѣленной величины, то очевидно, оно стремится къ нѣкоторому предѣлу. Слѣд. и перемѣнные отрѣзки OA, OA', OA'', .. увеличиваясь, стремятся къ нѣкоторому предѣлу; пусть этотъ предѣлъ будетъ OM.

Съ другой стороны, перемѣнныя количества OB, OB', OB'',… постоянно уменьшаются и однако всегда остаются больше нѣкоторой опредѣленной величины; напр., они всегда больше OA; сл. и этотъ рядъ уменьшающихся отрѣзковъ стремится къ нѣкоторому предѣлу. Легко видѣть, что этотъ предѣлъ будетъ тотъ же, что и для перваго ряда, т.-е. = OM. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ разности между 1-ми значеніями того и другого ряда, затѣмъ между вторыми ихъ значеніями, потомъ между третьими, и т. д., замѣчаемъ, что эти разности суть 1; 0,1; 0,01; 0,001;… т.-е. постоянно убываютъ; заключаемъ, что разность между перемѣнными, $OB_n - OA_n$, есть величина безконечно-малая; а слѣд. OB_n стремится къ тому же предѣлу какъ и OA_n (§ 185), т.-е. къ предѣлу OM.

Итакъ, оба ряда значеній стремятся къ одному и тому же предѣлу, и квадратъ этого предѣла есть число 2; въ с. д. квадратъ этого общаго предѣла не м. б. ни больше 2, ни меньше 2, потому что онъ служитъ общимъ предѣломъ и чиселъ меньшихъ 2, и чиселъ большихъ 2.

Этотъ-то общій предѣлъ и называется квадратнымъ корнемъ изъ 2, **и обозначается символомъ $\sqrt{2}$.**

Совершая дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, необходимо дать этимъ дѣйствіямъ *опредѣленія*, ибо точный смыслъ дѣйствій извѣстенъ только въ отношеніи соизмѣримыхъ чиселъ. Достаточно дать опредѣленія сложенія и умноженія; за обратными дѣйствіями мы сохранимъ ихъ общія опредѣленія.

200. Опредѣленіе суммы. Пусть требуется опредѣлить, что слѣдуетъ разумѣть подъ *суммою несоизмѣримыхъ чиселъ* π и $\sqrt{2}$.

Взявъ ихъ приближенныя величины точныя до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ‥ по недостатку и по избытку, получимъ:

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2 \qquad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15 \qquad 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$
$$3{,}141 < \pi < 3{,}142 \qquad 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Отсюда, взявъ суммы, найдемъ два ряда (A) и (B):

$$(A)\left\{\begin{array}{r} 3{,}1+\ \ 1{,}7 \\ 3{,}14+\ 1{,}73 \\ 3{,}141+1{,}732 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} 3{,}2+\ \ 1{,}8 \\ 3{,}15+\ 1{,}74 \\ 3{,}142+1{,}733 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\}(B)$$

Суммы группы (A) идутъ постоянно увеличиваясь, но всегда оставаясь конечными, ибо ихъ слагаемыя конечны; слѣд. эти суммы стремятся къ нѣкоторому предѣлу. Суммы группы (B) идутъ уменьшаясь, но оставаясь конечными, ибо ихъ слагаемыя конечны; слѣдовательно суммы и этой группы стремятся къ опредѣленному предѣлу. Каковы же эти предѣлы? Взявъ разность двухъ суммъ въ группахъ (A) и (B), соотвѣтствующихъ приближенію $\frac{1}{10^n}$, находимъ, что эта разность равна $\frac{2}{10^n}$; слѣд. при неограниченномъ возрастаніи n, она стремится къ нулю. Это значитъ, что оба сказанные предѣла равны. *Этотъ общій предѣлъ группъ* (A) *и* (B) *и называютъ суммою несоизмѣримыхъ* π *и* $\sqrt{3}$, *и изображаютъ ее въ видѣ* $\pi+\sqrt{3}$.

201. Свойства суммы. I. *Сумма двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

По опредѣленію суммы несоизмѣримыхъ чиселъ имѣемъ

$$\pi+\sqrt{2}=\text{пред. }(a+b),$$

называя буквою a — приближенную величину числа π, а буквою b — числа $\sqrt{2}$; точно такъ же

$$\sqrt{2}+\pi=\text{пред. }(b+a).$$

Но приближенія a и b суть числа соизмѣримыя, слѣд. по теор. II § 15, $a+b$ всегда равно $b+a$; если же перемѣнныя величины при своихъ измѣненіяхъ остаются равными, то по теор. III § 184 и предѣлы ихъ равны; слѣд.

$$\pi+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\pi.$$

II. *Придать сумму двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ — все равно что придать послѣдовательно каждое изъ нихъ.*

По опредѣленію суммы несоизмѣримыхъ чиселъ имѣемъ:

$$\sqrt{5}+(\pi+\sqrt{2})=\text{пред. }[a+(b+c)],$$

гдѣ a, b и c суть приближенныя величины чиселъ: $\sqrt{5}$, π и $\sqrt{2}$.

Точно такъ же

$$\sqrt{5}+\pi+\sqrt{2}=\text{пред. }(a+b+c);$$

а такъ какъ a, b и c соизмѣримы, то всегда

$$a+(b+c)=a+b+c;$$

предѣлы же равныхъ перемѣнныхъ равны, слѣд.

$$\sqrt{5} + (\pi + \sqrt{2}) = \sqrt{5} + \pi + \sqrt{2}.$$

202. Опредѣленіе произведенія. Опредѣлимъ произведеніе $\pi \times \sqrt{3}$. Для этого составимъ произведенія приближеній чиселъ π и $\sqrt{3}$, точныхъ до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$ по недостатку, а также по избытку: такимъ образомъ получимъ двѣ группы произведеній:

$$(A) \left\{ \begin{array}{c} 3{,}1 \times 1{,}7 \\ 3{,}14 \times 1{,}73 \\ 3{,}141 \times 1{,}732 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{c} 3{,}2 \times 1{,}8 \\ 3{,}15 \times 1{,}74 \\ 3{,}142 \times 1{,}733 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{array} \right\} (B)$$

Произведенія группы (A) постепенно увеличиваются; но, оставаясь конечными, стремятся къ нѣкоторому предѣлу. Произведенія группы (B) идутъ уменьшаясь, но какъ онѣ остаются конечными, то приближаются также къ нѣкоторому предѣлу. Докажемъ, что предѣлъ обоихъ произведеній одинъ и тотъ же.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ для π и $\sqrt{3}$ приближенія, точныя до $\frac{1}{10^n}$, найдемъ

$$\frac{a}{10^n} < \pi < \frac{a+1}{10^n}$$

$$\frac{b}{10^n} < \sqrt{3} < \frac{b+1}{10^n}$$

Перемножая, получимъ:

$$\frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^n} \quad \text{и} \quad \frac{(a+1)}{10^n} \times \frac{(b+1)}{10^n}.$$

Разность между этими приближенными произведеніями равна

$$\frac{1}{10^n}\left(\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^n}\right) + \frac{1}{10^{2n}}.$$

Членъ $\frac{1}{10^{2n}}$, по мѣрѣ неограниченнаго возрастанія n, стремится къ нулю, сумма $\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^n}$ стремится къ $\pi + \sqrt{3}$, т.-е. остается конечною, множитель же $\frac{1}{10^n}$ стремится къ нулю, а потому произведеніе $\frac{1}{10^n}\left(\frac{a}{10^n} + \frac{a}{10^n}\right)$ стремится къ нулю. Итакъ разность между перемѣнными приближенными произведеніями стремится къ нулю, а слѣд. сказанные предѣлы равны.

Этотъ общій предѣлъ рядовъ A *и* B *и называютъ произведеніемъ* π *на* $\sqrt{3}$.

203. Свойства произведенія. I. *Произведеніе двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей.*

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію произведенія несоизмѣримыхъ чиселъ, имѣемъ:

$$\pi \,.\, \sqrt{2} = \text{пред. } (a\,.\,b) \text{ и } \sqrt{2}\,.\,\pi = \text{пред. } (b\,.\,a)$$

гдѣ a и b соизмѣримыя приближенія чиселъ π и $\sqrt{2}$. Но, по свойству произведенія соизмѣримыхъ чиселъ всегда $ab = ba$; сл. и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны, т.-е.

$$\pi \,.\, \sqrt{2} = \sqrt{2}\,.\,\pi.$$

II. *Чтобы умножить на произведеніе двухъ множителей, достаточно умножить послѣдовательно на каждый изъ нихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію (§ 201), имѣемъ:

$$\sqrt{5}\,.\,(\pi\sqrt{2}) = \text{пред. } [a\,(bc)];$$

и также

$$\sqrt{5}\,.\,\pi\,.\,\sqrt{2} = \text{пред. } (abc).$$

Но a, b и c соизмѣримы; слѣд. $a(bc) = abc$, а потому и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны, т.-е.

$$\sqrt{5}\,(\pi\sqrt{2}) = \sqrt{5}\,.\,\pi\,.\,\sqrt{2}.$$

III. *Въ произведеніи сколькихъ угодно несоизмѣримыхъ множителей можно какъ угодно измѣнять порядокъ ихъ.*

Докажемъ сперва, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Пусть a есть произведеніе всѣхъ множителей, за исключеніемъ двухъ послѣднихъ: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Полное произведеніе будетъ

$$a\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5},$$

или, въ силу пункта II,

$$a\,.\,(\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5});$$

но, въ силу п. I, это выраженіе =

$$a\,.\,(\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}),$$

а, на осн. п. II, это произведеніе равно

$$a\,.\,\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}.$$

Итакъ:

$$a\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5} = a\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}.$$

т.-е. можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ множителей

Отсюда слѣдуетъ, что можно измѣнить порядокъ всякихъ двухъ смежныхъ множителей, ибо ихъ можно разсматривать послѣдними въ произведеніи, составленномъ изъ нихъ и имъ предшествующихъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что переставляя послѣдовательно смежные сомножители, можно каждый изъ нихъ помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ произведенія. Слѣд. порядокъ сомножителей не вліяетъ на величину произведенія.

IV. *Чтобы умножить данное число на сумму двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ, нужно умножить его на каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить.*

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленіямъ, имѣемъ

$$\sqrt{5}\,.\,(\pi+\sqrt{2}) = \text{пред. } [a(b+c)];$$

съ другой стороны:

$$\sqrt{5}\,.\,\pi+\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2} = \text{пред. } [ab+ac] = \text{пред. } [a(b+c)].$$

Слѣдовательно

$$\sqrt{5}\,.\,(\pi+\sqrt{2}) = \sqrt{5}\,.\,\pi+\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}.$$

Итакъ, вообще, основные законы дѣйствій, доказанные для соизмѣримыхъ чиселъ, распространяются и на несоизмѣримыя.

ГЛАВА XV.

Объ ирраціональныхъ выраженіяхъ.

Происхожденіе ирраціональныхъ выраженій. — Преобразованіе ихъ и дѣйствія надъ ними. — Ирраціональныя дроби. — Примѣры.

204. Происхожденіе ирраціональныхъ выраженій. — Дѣйствіе извлеченія корня изъ алгебраическихъ выраженій не всегда возможно. Такъ, когда показатель подкореннаго количества не дѣлится на показателя корня, то извлеченіе корня можно только *обозначить*, но нельзя *выполнить* на самомъ дѣлѣ, напр. $\sqrt[5]{a^7}$, $\sqrt[10]{a^9}$ и т. д. Точно такъ же, корень изъ многочлена, не представляющаго точной степени, не можетъ быть извлеченъ, а потому его только обозначаютъ при помощи знака $\sqrt{}$; примѣромъ можетъ служить $\sqrt{a^2+b^2}$. Подобнаго рода *выраженія, которыя нельзя привести къ раціональному виду, называютъ ирраціональными*, также *радикальными* или *коренными*.

Не слѣдуетъ смѣшивать ирраціональныхъ выраженій съ несоизмѣримыми числами: ирраціональное выраженіе можетъ представлять и соизмѣримыя и несоизмѣримыя числа, смотря по числовому значенію входящихъ въ него буквъ. Такъ, $\sqrt{a}$ представляетъ соизмѣримое число 3 при $a = 9$, и несоизмѣримое число $\sqrt{7}$ при $a = 7$; точно такъ же, $\sqrt{a^2+b^2}$ представляетъ соизмѣримое число 5 при $a = 3$ и $b = 4$, и несоизмѣримое число $\sqrt{5}$ при $a = 1$ и $b = 2$.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ m различныхъ значеній, имѣющихъ одну и ту же абсолютную величину; въ этой главѣ мы изучимъ преобразованіе корней, ограничиваясь разсмотрѣніемъ ихъ абсолютныхъ значеній.

205. Преобразованіе ирраціональныхъ выраженій помощью выведенія множителей изъ-подъ знака корня и введенія множителей подъ коренной знакъ.

I. *Если въ выраженіи $\sqrt[m]{A}$ подкоренное количество A разлагается на такіе два множителя, изъ которыхъ одинъ представляетъ точную степень съ показателемъ, равнымъ показателю корня, то этотъ множитель — извлеченіемъ изъ него корня — можетъ быть вынесенъ изъ-подъ знака корня.*

Пусть $A = P^m \times Q$, гдѣ Q уже не есть точная m-ая степень; въ такомъ случаѣ

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{P^m \cdot Q};$$

примѣняя правило извлеченія корня изъ произведенія, и замѣчая, что $\sqrt[m]{P^m} = P$, найдемъ:

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{P^m \times Q} = \sqrt[m]{P^m} \times \sqrt[m]{Q} = P \times \sqrt[m]{Q}.$$

Примѣры. 1. Упростить, выведеніемъ множителя изъ-подъ знака корня, выраженіе $\sqrt{50a^9b^{10}}$.

Подкоренное количество разлагается на два множителя $25a^8b^{10} \times 2a$, изъ которыхъ первый есть квадратъ $5a^4b^5$; слѣд.

$$\sqrt{50a^9b^{10}} = \sqrt{25^8b^{10} \times 2a} = \sqrt{(5a^4b^5)^2} \times \sqrt{2a} = 5a^4b^3 \cdot \sqrt{2a}.$$

2. Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\sqrt[3]{128a^{17}b^{12}c^2} = \sqrt[3]{64a^{15}b^{12} \times 2a^2c^2} = \sqrt[3]{(4a^5b^4)^3 \cdot 2a^2c^2} = 4a^5b^4 \cdot \sqrt[3]{2a^2c^2}.$$

3. Точно такимъ же образомъ:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2b^4}{c^3d^3}} = \sqrt[3]{\frac{b^3}{c^3d^3} \times a^2b} = \frac{b}{cd} \cdot \sqrt[3]{a^2b}.$$

4. $\sqrt[3]{(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4-y^4)} = \sqrt[3]{(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}$

$$= \sqrt[3]{(x+y)^3(x^2+y^2)^3(x-y)} = (x+y)(x^2+y^2)\sqrt[3]{x-y}.$$

5. $\sqrt[m]{\frac{a^{mp+3}b^{mq+5}}{c^{mr}d^{ms+1}}} = \sqrt[m]{\frac{a^{mp} \cdot a^3 \cdot b^{mq} \cdot b^5}{c^{mr} \cdot d^{ms} \cdot d}} = \sqrt[m]{\frac{a^{mp}b^{mq}}{c^{mr}d^{ms}} \cdot \frac{a^3b^5}{d}} = \frac{a^pb^q}{c^rd^s}\sqrt[m]{\frac{a^3b^5}{d}}.$

II. *Если передъ радикаломъ находится множитель, то этотъ множитель можно внести подъ знакъ корня, возвысивъ въ степень, изображаемую показателемъ корня.*

Требуется доказать, что $P\sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m \cdot Q}$.

Замѣтивъ, что $P = \sqrt[m]{P^m}$, и что, по правилу извлеченія корня изъ произведенія (§ 120): $\sqrt[m]{A.B} = \sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}$, откуда обратно: $\sqrt[m]{A} \cdot \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB}$, имѣемъ:

$$P \times \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m} \cdot \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m \times Q}$$

требуемое, такимъ образомъ, доказано.

Примѣры. Сдѣлать внесеніе множителей подъ знакъ корня въ примѣрахъ:

1. $(a-b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)^2}{a-b}} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2-b^2}.$

2. $\frac{x-y}{x+y} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+y)^4}{x^2-2xy+y^2}} = \sqrt[3]{\frac{(x+y)^4(x-y)^3}{(x-y)^2(x+y)^3}} = \sqrt[3]{(x+y)(x-y)} = \sqrt[3]{x^2-y^2}.$

Дѣйствія надъ ирраціональными выраженіями.

206. Подобныя ирраціональныя выраженія; ихъ приведеніе. — *Два ирраціональныя выраженія называются подобными, если у нихъ показатели корня и подкоренныя выраженія одинаковы:* такъ напр. $2b\sqrt{ac}$ и $-3x\sqrt{ac}$ суть иррац. выраженія подобныя: а $2\sqrt[3]{7b^2c}$ и $\sqrt{2ac}$ неподобны. Иногда корни, кажущіеся на первый взглядъ неподобными, могутъ быть приведены къ виду подобныхъ ирраціональныхъ выраженій: для этого ихъ надо упростить, сдѣлавъ, гдѣ возможно, вынесеніе множителей изъ-подъ знака корня. Напр. выраженія $\sqrt{27a^4x^3}$ и $\sqrt{12a^2x^5}$, имѣющія одинаковыхъ показателей корня, но неодинаковыя подкоренныя количества, кажутся на первый взглядъ не-подобными; но сдѣлавъ въ нихъ вынесеніе изъ-подъ знака корня, приведемъ ихъ къ виду

$$3a^2x\sqrt{3x} \text{ и } 2ax^2\sqrt{3x}, —$$

подобныхъ выраженій. Множители $3a^2x$ и $2ax^2$ при радикалахъ называются ***коэффиціентами***.

Соединеніе нѣсколькихъ подобныхъ ирраціональныхъ выраженій въ одно называется ихъ приведеніемъ. Дѣйствіе это состоитъ въ томъ, что коэффиціенты подобныхъ иррац. выраженій заключаютъ въ скобки, къ которымъ и приписываютъ множителемъ общій корень. Примѣры:

I. Выраженіе: $\sqrt{27a^4x^3}-\sqrt{12a^2x^5}+\sqrt{75a^6x}$ приводится къ

$$3a^2x\sqrt{3x}-2ax^2\sqrt{3x}+5a^3\sqrt{3x};$$

вынося въ немъ общій корень и a за скобки, получимъ:

$$(3ax-2x^2+5a^2)a\sqrt{3x}.$$

II. Сдѣлать приведеніе въ выраженіи

$$\sqrt{10x^3}+\sqrt{20y}-\sqrt{5y}+\sqrt{40x^3}-\sqrt{80y}.$$

Вынесеніемъ множителей изъ-подъ радикаловъ выраженіе приводится къ виду

$$x\sqrt{10x}+2\sqrt{5y}-\sqrt{5y}+2x\sqrt{10x}-4\sqrt{5y},$$

приводя подобные члены, получимъ

$$3x\sqrt{10x}-3\sqrt{5y}.$$

207. Сложеніе и вычитаніе. При сложеніи иррац. выраженій ихъ пишутъ рядомъ съ тѣми знаками, какіе они имѣютъ; при вычитаніи же приписываютъ къ уменьшаемому члены вычитаемаго съ обратными знаками; затѣмъ члены суммы или разности приводятъ къ простѣйшему виду, и, если окажутся въ числѣ ихъ подобные члены, дѣлаютъ приведеніе.

Примѣры. I. $\left(\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}\ \sqrt[3]{250}\right)+\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+0.5\sqrt{\frac{128}{9}}+\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}\right)$

$$\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}\ \sqrt[3]{250}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+0.5\sqrt{\frac{128}{9}}+\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[3]{27\times2}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}\times2}-\sqrt[3]{125\times2}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{9}\times2}+0,5\sqrt[3]{\frac{64}{9}\times2}+\sqrt[3]{\frac{27}{8}\times2}$$

$$=3\sqrt[3]{2}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}=\frac{19}{12}\sqrt[3]{2}.$$

II. $$\left(m^4n^3\sqrt[3]{\frac{5y}{m^9n^3}}+6\sqrt[3]{\frac{5m^3n^6y}{8}}\right)-\left(8m^5n^4\sqrt[3]{\frac{5y}{8m^{12}n^6}}-m\sqrt[3]{\frac{5n^6y}{8}}+\sqrt[3]{\frac{135m^3n^6y}{8}}\right)$$

$$=m^4n^3\sqrt[3]{\frac{5y}{m^9n^3}}+6\sqrt[3]{\frac{5m^3n^6y}{8}}-8m^5n^4\sqrt[3]{\frac{5y}{8m^{12}n^6}}+m\sqrt[3]{\frac{5n^6y}{8}}-\sqrt[3]{\frac{135m^3n^6y}{8}}$$

$$=\frac{m^4n^3}{m^3n}\sqrt[3]{5y}+\frac{6.mn^2}{2}\sqrt[3]{5y}-\frac{8m^5n^4}{2m^4n^2}\sqrt[3]{5y}+\frac{m.n^2}{2}\sqrt[3]{5y}-\frac{3mn^2}{2}\sqrt[3]{5y}$$

$$=mn^2\sqrt[3]{5y}+3mn^2\sqrt[3]{5y}-4mn^2\sqrt[3]{5y}+\frac{mn^2}{2}\sqrt[3]{5y}-\frac{3mn^2}{2}\sqrt[3]{5y}=-mn^2\sqrt[3]{5y}.$$

208. Умноженіе. Въ § 120 было доказано, что

$$\sqrt[n]{A.B.C}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}.\sqrt[n]{C};$$

написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, найдемъ:

$$\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}\times\sqrt[n]{C}=\sqrt[n]{A.B.C};$$

Отсюда правило: *чтобы перемножить нѣсколько иррац. выраженій одинаковаго порядка, надо перемножить подрадикальныя количества и изъ произведенія извлечь корень того же порядка.*

Примѣры I. $\sqrt{2axy^4}\times\sqrt{6a^3xy^3}=\sqrt{12a^4x^2y^7}=2a^2xy^3\sqrt{3y}$.

II. $\sqrt{ax+x^2}.\sqrt{ab+bx}=\sqrt{(ax+x^2)(ab+bx)}=\sqrt{bx(a+x)^2}=(a+x)\sqrt{bx}$.

III. $\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-b^3}}\times\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-b^3}}=\sqrt[3]{a^2-(a^2-b^3)}=\sqrt[3]{b^3}=b$.

IV. $(a\sqrt{a}-\frac{1}{2}a^2\sqrt{a^3}+3a^2\sqrt{a^7})\times(-6\sqrt{a^3})=-6a\sqrt{a^4}+3a^2\sqrt{a^6}-$

$$-18a^2\sqrt{a^{10}}=-6a^3+3a^5-18a^8.$$

209. Дѣленіе. Въ § 121 было доказано, что

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}};$$

Написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\frac{A}{B}}.$$

Отсюда правило: *чтобы раздѣлить одинъ на другой два корня съ одинаковыми показателями, надо первое подрадикальное количество раздѣлить на второе, и изъ частнаго извлечь корень того же порядка.*

Примѣры. I. $14\sqrt[3]{9a^5} : 2\sqrt[3]{4a} = 7\sqrt[3]{\frac{9a^3}{4a}} = 7\sqrt[3]{\frac{9}{4}a^4} = 7a\sqrt[3]{\frac{9a}{4}}$.

II. $a : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^5} : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^5 : a^3} = \sqrt[5]{a^2}$.

III.
$$\begin{array}{l|l}
\frac{4}{3}a^3 - \frac{23}{6}a^2\sqrt{ab} + a^2b + \frac{3}{16}ab\sqrt{ab} & 2a\sqrt{a} + \frac{1}{4}a\sqrt{b} \\
\frac{4}{3}a^3 \mp \frac{1}{6}a^2\sqrt{ab} & \frac{2}{3}a\sqrt{a} - 2a\sqrt{b} + \frac{3}{4}b\sqrt{a} \\
\quad - 4a^2\sqrt{ab} + a^2b & \\
\quad \pm 4a^2\sqrt{ab} \pm \frac{1}{2}a^2b & \\ \hline
\qquad\qquad \frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{16}ab\sqrt{ab} & \\
\qquad\qquad \frac{3}{2}a^2b - \frac{3}{16}ab\sqrt{ab} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

1) Вычисленіе 1-го члена частнаго: $\frac{4}{3}a^3 : 2a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a^2\sqrt{a^2} \cdot 2a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

2) Вычисленіе 2-го члена частнаго: $-4a^2\sqrt{ab} : 2a\sqrt{a} = -2a\sqrt{b}$.

3) Вычисленіе 3-го члена частнаго: $\frac{3}{2}a^2b \cdot 2a\sqrt{a} = \frac{3}{2}ab\sqrt{a^2} : 2a\sqrt{a} = \frac{3}{4}b\sqrt{a}$.

210. Возвышеніе въ степень. Пусть требуется $\sqrt[m]{a^k}$ возвысить въ p-ую степень, гдѣ m, k и p — цѣлыя положительныя числа. Это значитъ — данный корень взять множителемъ p разъ; слѣд.

$$(\sqrt[m]{a^k})^p = \sqrt[m]{a^k} \times \sqrt[m]{a^k} \times \sqrt[m]{a^k} \ldots \text{(всѣхъ множителей } p\text{)};$$

но, по правилу перемноженія корней (§ 208), вторая часть равна

$$\sqrt[m]{a^k.a^k.a^k\ldots} \text{ (}p\text{ разъ)} = \sqrt[m]{(a^k)^p}.$$

Итакъ:

$$(\sqrt[m]{a^k})^p = \sqrt[m]{(a^k)^p},$$

т.-е. *чтобы корень возвысить въ степень, нужно въ эту степень возвысить подрадикальное выраженіе, и изъ результата извлечь корень даннаго порядка.*

Примѣры: I. $(\sqrt[5]{x^4y^3z})^3 = \sqrt[5]{(x^4y^3z)^3} = \sqrt[5]{x^{12}y^9z^3} = x^2y\sqrt[5]{x^2y^4z^3}$.

II. $\left(\frac{3x^k}{5y} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{y^5}}\right)^4 = \frac{51x^{4k}}{625y^4} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^{16}}{y^{20}}} = \frac{81x^{4k+5}}{625y^{10}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$.

211. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь корень m-го порядка изъ $\sqrt[p]{A}$; положимъ, что результатъ этого дѣйствія будетъ x, т.-е. что

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = x \;.\;.\;.\; (1)$$

Возвышая обѣ части равенства въ степень m и замѣчая, что извлеченіе корня m-го порядка изъ $\sqrt[p]{A}$ и возвышеніе результата въ m-ую степень, какъ два противоположныя дѣйствія, взаимно уничтожаются, найдемъ:

$$\sqrt[p]{A} = x^m.$$

Возвышая обѣ части этого равенства въ степень p, получимъ

$$A = x^{mp};$$

а извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка mp, найдемъ:

$$\sqrt[mp]{A} = x.$$

Подставивъ эту величину вмѣсто x въ равенство (1), получимъ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = \sqrt[mp]{A} \;.\;.\;.\; (2).$$

Отсюда правило: *чтобы извлечь корень изъ корня, нужно подкоренное количество оставить безъ перемѣны и извлечь изъ него корень, котораго показатель = произведенію показателей данныхъ корней.*

Примѣры. I. $\sqrt{\sqrt[3]{2ax^2}} = \sqrt[6]{2ax^2}$.

II. $\sqrt{9a^4\sqrt[3]{ab^2}} = 3a^2\sqrt[6]{ab^2}$.

Если равенство (2) прочесть въ обратномъ порядкѣ, то найдемъ, что извлеченіе корня, показатель котораго разлагается на множители, можно замѣнить послѣдовательнымъ извлеченіемъ корней, которыхъ показатели равны этимъ множителямъ. Напр.

1) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

2) $\sqrt[12]{4096a^{24}b^4x^8} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096a^{24}b^4x^8}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64a^{12}b^2x^4}} = \sqrt[3]{8a^6bx^2}$
$= 2a^2\sqrt[3]{bx^2}$.

212. Теорема. *Величина корня не измѣнится, если показатель подкоренного количества и показатель корня помножить или раздѣлить на одно и то же число.*

Мы видѣли, что если $\sqrt[m]{a^k}$ возвысить въ степень p, то получится $\sqrt[m]{a^{kp}}$, извлекая изъ полученнаго выраженія корень порядка p, на осн. § 211 найдемъ $\sqrt[mp]{a^{kp}}$. Такъ какъ надъ выраженіемъ $\sqrt[m]{a^k}$ мы произвели два противоположныя дѣйствія, то величина его не измѣнилась, а потому

$$\sqrt[m]{a^k} = \sqrt[mp]{a^{kp}}.$$

Итакъ: 1) данное выраженіе можно замѣнить равнымъ ему: $\sqrt[mp]{a^{kp}}$, т.-е. величина ирраціональнаго выраженія не измѣняется отъ умноженія показателей корня и подкоренного количества на одно и то же число; 2) обратно. $\sqrt[mp]{a^{kp}}$ равенъ $\sqrt[m]{a^k}$, слѣд. величина корня не измѣнится отъ раздѣленія показателей корня и подкоренного количества на одно и то же число.

Слѣдствія I. -На первомъ изъ этихъ свойствъ основано приведеніе ирраціональныхъ количествъ къ общему показателю корня. Для этого нужно составить наим. кратное всѣхъ показателей корней: оно и будетъ общимъ показателемъ; послѣдній дѣлятъ на показателей каждаго корня и соотвѣтствующими частными множатъ показатели корней и подкоренныхъ количествъ. При этомъ могутъ быть тѣ же случаи, какъ и при приведеніи дробей къ общему знаменателю

1. Всѣ показатели корней числа взаимно первыя, напр.

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt[3]{2ab^2}, \quad \sqrt[5]{\frac{3a^3}{2c^2d}}$$

Общій показатель $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; раздѣливъ его поочередно на 2, на 3 и на 5, множимъ показатели корней и подрадикальныхъ выраженій: перваго — на 15, второго — на 10, третьяго — на 6; найдемъ:

$$\sqrt{a} = \sqrt[2 \cdot 15]{a^{15}} = \sqrt[30]{a^{15}}.$$

$$\sqrt[3]{(2ab^2)^1} = \sqrt[3 \cdot 10]{(2ab^2)^{10}} = \sqrt[30]{2^{10}.a^{10}.b^{20}}.$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{3a^3}{2c^2d}\right)^1} = \sqrt[5 \cdot 6]{\left(\frac{3a^3}{2c^2d}\right)^6} = \sqrt[30]{\frac{3^6.a^{18}}{2^6c^{12}d^6}}.$$

2. Одинъ изъ показателей — число кратное для остальныхъ, напр.

$$\sqrt[3]{2A}, \quad \sqrt[6]{\frac{1}{3}A^2B}, \quad \sqrt[12]{C}.$$

Общій показатель корня $= 12$; имѣемъ:

$$\sqrt[3]{2A} = \sqrt[12]{(2A)^4} = \sqrt[12]{16A^4}.$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{3}A^2B} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}A^2B\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{1}{9}A^4B^2}.$$

$\sqrt[12]{C}$ **остается безъ перемѣны.**

3. Показатели корней имѣютъ общихъ множителей: напр.

$$\sqrt[15]{A}, \quad \sqrt[12]{B}, \quad \sqrt[36]{C}.$$

Общій показатель $= 180$; получимъ:

$$\sqrt[15]{A} = \sqrt[15 \cdot 12]{A^{12}} = \sqrt[180]{A^{12}}; \quad \sqrt[12]{B} = \sqrt[12 \cdot 15]{B^{15}} = \sqrt[180]{B^{15}}. \quad \sqrt[36]{C} = \sqrt[36 \cdot 5]{C^5} = \sqrt[180]{C^5}.$$

Примѣчаніе. Правила, данныя въ §§ 208 и 209 для умноженія и дѣленія корней, относятся къ случаю корней съ одинаковыми показателями: если же показатели корней различны, то ихъ сначала приводятъ къ общему показателю, а затѣмъ уже производятъ умноженіе и дѣленіе по упомянутымъ правиламъ.

Примѣры. I. Составить произведеніе: $\sqrt{ab^3c}\times\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[6]{a^2b^2c^2}$.

Приведя корни къ общему показателю 6, получимъ:

$$\sqrt[6]{a^3b^9c^3}\times\sqrt[6]{a^4b^2}\times\sqrt[6]{a^2b^2c^2}$$

$$\sqrt[6]{a^{10}b^{13}c^5} = \sqrt[6]{a^6b^{12}\times a^4bc^5} = ab^2\,.\,\sqrt[6]{a^4bc^5}.$$

II. Составить частное $\dfrac{\sqrt{ab^3c}}{\sqrt[3]{a^4bc^2}}$. Приведя корни къ общему показателю, получимъ:

$$\frac{\sqrt[6]{a^3b^9c^3}}{\sqrt[6]{a^8b^2c^4}} = \sqrt[6]{\frac{a^3b^9c^3}{a^8b^2c^4}} = \frac{b}{ac}\sqrt[6]{abc^5}.$$

III. Вторая часть теоремы этого § даетъ возможность *сокращать* ирраціональныя выраженія; для этого нужно показателя корня и показателей подкоренного выраженія раздѣлить на ихъ общаго наиб. дѣлителя.

Такъ: $\sqrt[6]{4x^2y^6} = \sqrt[3]{2xy^4}$; $\sqrt[mn]{a^{np}b^nc^{nq}} = \sqrt[m]{a^pbc^q}$; $\sqrt[12]{16a^4b^8} = \sqrt[3]{2ab^2}$.

Ирраціональныя дроби.

213 Когда числитель, или знаменатель, или оба — ирраціональны, дробь называется *ирраціональною*. Въ видахъ упрощенія вычисленій, дроби съ знаменателями ирраціональными выгодно замѣнять равными имъ дробями, но имѣющими раціональные знаменатели. Такъ, если бы требовалось вычислить величину дроби

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$$

то, найдя $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$ и $\sqrt{2} = 1{,}412\ldots$, мы должны бы были раздѣлить 1 на приближенное число $0{,}320\ldots$ Но если умножимъ предварительно числителя и знаменателя дроби на $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, то найдемъ

$$x = \sqrt{3}+\sqrt{2},$$

и простое сложеніе чиселъ $1{,}732\ldots$ и $1{,}412\ldots$ дастъ величину x,

$$x = 3{,}144\ldots$$

Такимъ образомъ дѣйствіе дѣленія приведено къ простѣйшему дѣйствію — сложенію; другая выгода указаннаго преобразованія состоитъ въ томъ, что найденная для x величина $3{,}144\ldots$ допускаетъ непосредственное опредѣленіе предѣла погрѣшности, которая меньше $0{,}002$, потому что каждое слагаемое ошибочно менѣе чѣмъ на $0{,}001$.

Уничтоженіе ирраціональности въ знаменателѣ дроби безусловно всегда возможно. Не останавливаясь на доказательствѣ этого предложенія и на вытекающемъ изъ него общемъ методѣ (о чемъ рѣчь будетъ ниже), разсмотримъ здѣсь частные случаи этой задачи, важные въ практикѣ.

214. Укажемъ пріемы, которыми можно уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ, содержащемъ *только квадратные корни.*

1. $\frac{a}{b\sqrt{c}}$. Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{c}$, получимъ:

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2}=\frac{a\sqrt{c}}{bc}.$$

2. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, найдемъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

3. $\frac{a}{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}}$. Умножая числ. и знам. на $m\sqrt{b}+n\sqrt{c}$, получимъ:

$$\frac{a}{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}}=\frac{a(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})}{(m\sqrt{b})^2-(n\sqrt{c})^2}=\frac{a(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c}$$

4. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$. Умножая числ. и знам. на $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$, найдемъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-d}=$$

$$=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{b+c-d+2\sqrt{bc}};$$

умножая оба члена этой дроби на $b+c-d-2\sqrt{bc}$, получимъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})(b+c-d-2\sqrt{bc})}{(b+c-d)^2-4bc}.$$

Общій способъ исключенія изъ знаменателя квадратныхъ корней, каково бы ни было ихъ число, заключается въ слѣдующемъ. Если $\sqrt{k}$ есть одинъ изъ радикаловъ, который мы хотимъ исключить, выносимъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, его содержащихъ; знаменатель приметъ видъ $P+Q\sqrt{k}$, гдѣ P и Q — раціональныя или ирраціональныя выраженія, не содержащія $\sqrt{k}$. Если теперь умножимъ оба члена дроби на $P-Q\sqrt{k}$, то новый знаменатель P^2-Q^2k уже не будетъ содержать $\sqrt{k}$. Такъ какъ произведенное умноженіе не вводитъ новыхъ радикаловъ, то очевидно, что примѣняя указанный пріемъ послѣдовательно къ каждому изъ нихъ, мы исключимъ всѣ радикалы.

Этотъ именно способъ мы и прилагали въ предыдущихъ примѣрахъ; приложимъ его еще къ дроби, содержащей въ знаменателѣ пять радикаловъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}}.$$

Умноживъ оба члена ея на $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}-\sqrt{e}$, получимъ новый знаменатель, въ которомъ f есть раціональная часть:

$$f+2(\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{b}\sqrt{c})+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{d}\;.\;.\;.\;(1)$$

Умножая оба члена полученной дроби на выраженіе, выведенное изъ (1) перемѣною $\sqrt{d}$ на $-\sqrt{d}$, получимъ новый знаменатель, въ которомъ g представляетъ раціональную часть:

$$g-4(f+2c-2d)\sqrt{a}\sqrt{b}+4[(f+2b-2d)\sqrt{a}+(f+2a-2d)\sqrt{b}]\sqrt{c}\ \ldots\ (2).$$

Помножая оба члена новой дроби на выраженіе, выведенное изъ предыдущаго перемѣною $\sqrt{c}$ на $-\sqrt{c}$, получимъ новый знаменатель, котораго раціональная часть обозначена буквою h:

$$h+[8g(f+2c-2d)-32c(f+2a-2d)(f+2b-2d)]\sqrt{ab}\ \ldots\ (3).$$

Умножая, наконецъ, оба члена послѣдней дроби на выраженіе, выведенное изъ предыдущаго перемѣною $\sqrt{ab}$ на $-\sqrt{ab}$, и означая числителя новой дроби буквою A, найдемъ

$$\frac{A}{h^2-[8g(f+2c-2d)-32c(f+2a-2d)(f+2b-2d)]^2\,.\,ab}$$

дробь, которой знаменатель раціоналенъ.

Примѣчаніе I. Взявъ, напр., дробь

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

и примѣняя къ ней указанный пріемъ, мы должны начать исключеніе съ большаго корня, такъ какъ вычисленія при этомъ будутъ проще. Умножая, поэтому, оба члена на $\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$, найдемъ:

$$x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.$$

Умножая оба члена этой дроби на $\sqrt{6}$, получимъ окончательно:

$$x=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}.$$

Примѣчаніе II. Нерѣдко можно значительно упрощать вычисленія, пользуясь слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Выраженіе $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, состоящее изъ четырехъ радикаловъ, разлагается на два множителя вида $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, если числа a, b, c и d составляютъ кратную пропорцію.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть напр.

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k,\ \text{откуда}\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}=\sqrt{k},\ \text{и слѣд.}\ \sqrt{a}=\sqrt{c}.\sqrt{k}\ \text{и}\ \sqrt{b}=\sqrt{d}.\sqrt{k}.$$

Знаменатель приметъ видъ

$$\sqrt{c}.\sqrt{k}+\sqrt{d}.\sqrt{k}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\sqrt{c}(1+\sqrt{k})+\sqrt{d}(1+\sqrt{k})=$$
$$=(\sqrt{c}+\sqrt{d})(1+\sqrt{k})$$
$$\text{или}\ \frac{1}{\sqrt{c}}(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{c}).$$

Примѣнимъ это замѣчаніе къ дроби

$$x=\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}.$$

Такъ какъ $10\times21=15\times14$, то, согласно сказанному, найдемъ:

$$x=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})};$$

умноживъ числ. и знам. на $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$, сразу уничтожимъ ирраціональность въ знаменателѣ, и найдемъ:

$$x=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}.$$

215. Пусть знаменатель содержитъ только радикалы *кубичные.*

1. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. Положивъ: $\sqrt[3]{a}=x$ и $\sqrt[3]{b}=y$, имѣемъ: $a=x^3$, $b=y^3$.

Взявъ разложеніе $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, и подставивъ вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ:

$$a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}),$$

откуда видно, что отъ умноженія знаменателя дроби на $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ онъ обращается въ раціональное выраженіе, равное $a+b$. Итакъ, умноживъ числ. и знам. на указанный триномъ, получимъ:

$$x=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}.$$

2. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$. Подобнымъ же образомъ, пользуясь разложеніемъ: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

3. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$. Положивъ въ равенствѣ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

$x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, найдемъ:

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc});$$

отсюда, умноживъ числителя и знам. данной дроби на

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}.$$

найдемъ: $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}$.

Если abc есть точный кубъ, то преобразованіе окончено: новый знаменатель раціоналенъ; если же abc не есть точный кубъ, то представивъ знаменатель въ видѣ

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^3}-\sqrt[3]{27abc},$$

приводимъ вопросъ къ предыдущему случаю.

4. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}$, съ условіемъ, что $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. Не трудно убѣдиться, что знаменатель можно представить въ видѣ произведенія двухъ множителей вида $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$, и вопросъ приводится къ примѣру 1.

216. Если знаменатель дроби есть сумма или разность двухъ радикаловъ какого угодно порядка, то ихъ можно привести къ общему показателю корня; такимъ образомъ знаменатель будетъ вида $\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[m]{b}$. Отсюда два случая:

I. $\frac{A}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}$. Положивъ $\sqrt[m]{a}=x$ и $\sqrt[m]{b}=y$, откуда $a=x^m$ и $b=y^m$, и замѣчая, что при всякомъ m — четномъ или нечетномъ, имѣемъ:

$$x^m-y^m=(x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots+xy^{m-2}+y^{m-1}),$$

подставивъ сюда вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ:

$$a-b=(\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}+\ldots+\sqrt[m]{ab^{m-2}}+\sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Это равенство показываетъ, что если числит. и знам. данной дроби помножимъ на $\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\ldots+\sqrt[m]{b^{m-1}}$, то знаменатель обратится въ раціональное выраженіе $a-b$; такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}+\ldots+\sqrt[m]{b^{m-1}})}{a-b}.$$

II. $\frac{A}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}}$. Если m — число четное, то замѣчая, что разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму первыхъ степеней, имѣемъ:

$$x^m-y^m=(x+y)(x^{m-1}-x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots-y^{m-1}).$$

Подставляя сюда $\sqrt[m]{a}$ вмѣсто x, и $\sqrt[m]{b}$ вмѣсто y, дадимъ равенству видъ:

$$a-b=(\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}}-\sqrt[m]{^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}-\ldots-\sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Отсюда видно, что для уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ дроби при m четномъ, надо оба члена ея помножить на $\sqrt[m]{a^{m-1}}-\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\ldots-\sqrt[m]{b^{m-1}}$. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}}-\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\ldots-\sqrt[m]{b^{m-1}})}{a-b}.$$

Если m — число нечетное, то припомнивъ, что сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму первыхъ степеней, имѣемъ равенство:

$$x^m + y^m = (x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 - \dots + y^{m-1});$$

положивъ въ немъ $x = \sqrt[m]{a}$ и $y = \sqrt[m]{b}$, имѣемъ:

$$a + b = (\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \sqrt[m]{a^{m-3}b^2} - \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Отсюда слѣдуетъ, что для уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ данной дроби, при m нечетномъ, надо оба ея члена умножить на $\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}}$; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}} = \frac{1(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \dots + \sqrt[m]{b^{m-1}})}{a + b}.$$

Примѣръ. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}}$. Приводя корни къ общему показателю 6, получимъ дробь

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}}.$$

Множитель, обращающій знаменатель въ выраженіе раціональное, въ данномъ случаѣ есть

$$\sqrt[6]{(a^3)^5} - \sqrt[6]{(a^3)^4b^2} + \sqrt[6]{(a^3)^3(b^2)^2} - \sqrt[6]{(a^3)^2(b^2)^3} + \sqrt[6]{a^3(b^2)^4} - \sqrt[6]{(b^2)^5}, \text{ или}$$

$$\sqrt{a^5} - \sqrt{a^4} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^2} - ab + \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^4} - \sqrt[3]{b^5}.$$

Умноживъ имъ числитель и знаменатель дроби, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt{a^5} - a^2\sqrt[3]{b} + a\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2} - ab + \sqrt{a} \cdot b\sqrt[3]{b} - b\sqrt[3]{b^2}}{a^3 - b^2}.$$

217. Въ заключеніе этой главы приведемъ нѣсколько примѣровъ дѣйствій надъ ирраціональными выраженіями.

1. Провѣрить равенство:

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

Провѣрка равенства двухъ данныхъ выраженій, которыя > 0, приводится къ провѣркѣ равенства ихъ квадратовъ, т.-е. что

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2 - (a^2 - b)}{4}} = a + \sqrt{b},$$

или что $$a + \sqrt{b} = a + \sqrt{b}.$$

Но это равенство вѣрно; слѣд. вѣрно и предложенное.

2. Упростить выраженіе:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

Это выраженіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-2\sqrt[3]{xy})}{(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4})+\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2})}$$

или

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy})}$$

или, по сокращеніи на $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy})}.$$

т.-е.

$$\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}.$$

3. Разложить на множители выраженіе:

$$\sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{b^2c^4}+\sqrt[3]{c^2a^4}-(\sqrt[3]{b^4c^2}+\sqrt[3]{c^4a^2}+\sqrt[3]{a^4b^2}).$$

Называя это выраженіе буквою P имѣемъ послѣдовательно:

$$P=\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{c^2}(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4})+\sqrt[3]{c^4}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})$$

$$=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})\{\sqrt[3]{c^2}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})-\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{c^4}\}$$

$$=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})\{\sqrt[3]{c^2}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2})-\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2})\}$$

$$=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{a^2}).$$

Примѣчаніе. Индусамъ уже были извѣстны методы извлеченія корней — квадратнаго и кубичнаго. — *Омаръ Алкхайями* (средина XI вѣка) доказалъ точность этихъ методовъ и указалъ пріемы для нахожденія корней высшихъ порядковъ. Правила дѣйствій надъ коренными количествами находимъ уже въ ариѳметикѣ ***Алькальцади*** (+ 1477).

ГЛАВА XVI.

Степени и корни съ дробными и отрицательными показателями.

Дробные показатели.

218. *Происхожденіе степеней съ дробными показателями.* — Для извлеченія корня изъ степени надо показатель подкореннаго количества раздѣлить на показателя корня; такимъ образомъ: $\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5$. Но если показатель подкореннаго количества не дѣлится на показателя корня, какъ напр. въ случаѣ $\sqrt[3]{a^2}$, то, примѣняя указанное правило, мы найдемъ выраженіе $a^{\frac{2}{3}}$, не имѣющее смысла степени какъ произведенія множителей, равныхъ основанію a: въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что нельзя a повторить множителемъ $\frac{2}{3}$ раза. Однако, вполнѣ позволительно допускать подобныя выраженія, если только подъ ними разумѣть ничто иное какъ новый особый способъ изображать ирраціональныя выраженія. Такимъ образомъ пишутъ: $a^{\frac{2}{3}}$ вмѣсто $\sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{1}{2}}$ вмѣсто $\sqrt{a}$, $a^{\frac{7}{5}}$ вмѣсто $\sqrt[5]{a^7}$ и т. д. Вообще, *выраженіе* $a^{\frac{m}{n}}$ *есть ничто иное какъ* $\sqrt[n]{a^m}$, и называется *количествомъ съ дробнымъ показателемъ*. Итакъ: *количество съ дробнымъ показателемъ есть корень, показатель котораго равенъ знаменателю дробнаго показателя, изъ количества въ степени, равной числителю дробнаго показателя.*

Условное обозначеніе ирраціональныхъ выраженій въ видѣ дробныхъ степеней, распространяя правило показателей при извлеченіи корня и на тотъ случай, когда показатель подрадикальнаго количества не дѣлится на показателя корня, т.-е. *обобщая* это правило, вполнѣ соотвѣтствуетъ духу алгебры, стремящейся къ обобщеніямъ.

Разсматривая правила дѣйствій надъ дробными степенями, мы придемъ къ тому важному заключенію, что правила эти остаются тѣми же самыми, какія мы нашли раньше для показателей цѣлыхъ. Обстоятельство это, говоритъ Лакруа въ своей алгебрѣ, «служитъ однимъ изъ замѣчательнѣйшихъ примѣровъ пользы знаковъ, когда они удачно выбраны. Чѣмъ дальше мы подвигаемся въ алгебрѣ, тѣмъ болѣе узнаемъ безчисленныя выгоды, какія повело за собою введеніе показателей...»

Дробные показатели были введены *Ньютономъ*.

219. Теорема. *Двѣ дробныя степени равны, если показатели ихъ равны*; т.-е. если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.

Дѣйствительно, по опредѣленію степени съ дробнымъ показателемъ имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Приводя корни къ общему показателю, найдемъ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \;.\;.\;.\;(1) \text{ и } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} \;.\;.\;.\;(2);$$

но изъ условія $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ имѣемъ: $mq = np$, слѣд. вторыя части равенствъ (1) и (2) равны, а потому равны и первыя. Итакъ

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

220. Умноженіе. Умножить $a^{\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{p}{q}}$. По опредѣленію дробныхъ степеней имѣемъ

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{и} \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p};$$

откуда $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}}$ (по приведеніи корней къ общему показателю). Такъ какъ nq, mq и np — числа цѣлыя и положительныя, то примѣняя правила — умноженія корней и степеней, доказанныя для такихъ показателей, получимъ:

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} . a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Такъ какъ nq и $mq + np$ — цѣлыя положительныя числа, то раздѣливъ въ полученномъ выраженіи показатель подкореннаго количества на показателя корня, найдемъ:

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Итакъ:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ сперва $n = 1$, потомъ $q = 1$ (на что имѣемъ право, такъ какъ n и q — цѣлыя положительныя числа) найдемъ, въ первомъ случаѣ:

$$a^m \times a^{\frac{p}{q}} = a^{m+\frac{p}{q}} \quad . \; . \; . \; (2).$$

а во второмъ

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^p = a^{\frac{m}{n}+p} \quad . \; . \; . \; (3).$$

Равенства (1), (2) и (3) показываютъ, что: *будутъ ли оба показателя дробные, или одинъ цѣлый, а другой дробный, при умноженіи степеней одного и того же основанія показатели складываются.*

Такъ: 1) $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{10}}$; 2) $a^3 \times a^{\frac{2}{5}} = a^{3+\frac{2}{5}} = a^{\frac{17}{5}}$.

221. Дѣленіе. Раздѣлить $a^{\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{p}{q}}$, полагая, что $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Послѣдовательно имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}.$$

По приведеніи обѣихъ частей неравенства $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ къ общему знаменателю, найдемъ $\frac{mq}{nq} > \frac{np}{nq}$, откуда: $mq > np$, а слѣдовательно разность $mq - np$ положительна. Но при цѣлыхъ положительныхъ показателяхъ имѣемъ

$$\sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Итакъ

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Положивъ $n = 1$, находимъ изъ этого равенства:

$$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Положивъ въ равенствѣ (1) $q = 1$, найдемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^p = a^{\frac{m}{n} - p} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Равенства (1), (2) и (3) доказываютъ, что правило показателей при дѣленіи, доказанное первоначально для цѣлыхъ показателей, остается справедливымъ и тогда, когда оба или одинъ изъ показателей — числа дробныя.

Примѣръ: $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{5}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$.

222. Возвышеніе въ степень. Пусть требуется $a^{\frac{m}{n}}$ возвысить въ степень порядка $\frac{p}{q}$, т.-е. опредѣлить $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}$. Замѣняя каждую изъ степеней съ дробнымъ показателемъ — корнями, получимъ.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

Такъ какъ показатели nq и mp — числа цѣлыя и положительныя, то $\sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$. Слѣд.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Полагая сперва $q = 1$, а затѣмъ $n = 1$, найдемъ:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m}{n} \cdot p} \; . \; . \quad (2); \text{ и } \left(a^m\right)^{\frac{p}{q}} = a^{m \cdot \frac{p}{q}} \; . \; . \; . \; (3).$$

Отсюда слѣдуетъ, что правило показателей при возвышеніи въ степень, выведенное въ § 104 для показателей цѣлыхъ, распространяется и на тѣ случаи, когда одинъ или оба показателя — дробные.

Примѣръ. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}} = a^{\frac{5}{8}}$.

223 Возвышеніе въ дробную степень произведенія и дроби.

1. $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{A}{B}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{A^p}{B^p}} = \frac{\sqrt[q]{A^p}}{\sqrt[q]{B^p}} = \frac{A^{\frac{p}{q}}}{B^{\frac{p}{q}}}$. Заключаемъ, что для возвышенія дроби въ дробную степень нужно отдѣльно возвысить въ данную степень числителя и знаменателя и первый результатъ раздѣлить на второй: то же самое правило, что и для возвышенія дроби въ цѣлую степень.

2. $(A.B)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(AB)^p} = \sqrt[q]{A^p B^p} = \sqrt[q]{A^p}.\sqrt[q]{B^p} = A^{\frac{p}{q}}.B^{\frac{p}{q}}$, слѣд. правило возвышенія произведенія въ дробную степень — такое же какъ и въ цѣлую степень.

224. Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь корень порядка $\frac{p}{q}$ изъ $a^{\frac{m}{n}}$ т.-е. найти $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}}$. Распространяя опредѣленіе корня и на этотъ случай, *Условимся подъ корнемъ порядка* $\frac{p}{q}$ *изъ* $a^{\frac{m}{n}}$ *разумѣть такое количество, которое, будучи возвышено въ степень порядка* $\frac{p}{q}$, *давало бы* $a^{\frac{m}{n}}$. Согласно этому опредѣленію, назвавъ искомый корень буквою x, т.-е. положивъ

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = x \;.\;.\;.\;(1)$$

Имѣемъ, что $x^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$, откуда, возвышая обѣ части въ степень $\frac{q}{p}$, получимъ: $x = a^{\frac{mq}{np}}$, или $x = a^{\frac{m}{n}:\frac{p}{q}}$. Подставивъ въ равенство (1) вмѣсто x найденное выраженіе, получимъ:

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}:\frac{p}{q}} \;.\;.\;.\;(2).$$

Полагая здѣсь сначала $q = 1$, а потомъ $n = 1$, имѣемъ:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}:p} \;.\;.\;.\;(3);\quad \sqrt[\frac{p}{q}]{a^{m}} = a^{m:\frac{p}{q}} \;.\;.\;.\;(4)$$

Такимъ образомъ, будутъ ли показатели — корня и подкоренного количества оба дробные, или одинъ — цѣлый, а другой — дробный, надо для извлеченія корня — показатель подкоренного количества раздѣлить на показатель корня, [illegible] то же самое, что и для цѣлыхъ показателей.

Примѣръ. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{5}{7}}} = a^{\frac{5}{7}:\frac{2}{3}} = a^{\frac{15}{14}}$.

225. Корень дробнаго порядка изъ произведенія, дроби и корня съ дробнымъ показателемъ.

1. $\sqrt[\frac{p}{q}]{A.B} = \sqrt[\frac{p}{q}]{(AB)^1} = (AB)^{1:\frac{p}{q}}$ (§ 224,4) $= (AB)^{\frac{q}{p}} = A^{\frac{q}{p}}.B^{\frac{q}{p}}$ (§ 223, 2) $= A^{1:\frac{p}{q}}.B^{1:\frac{p}{q}} = \sqrt[\frac{p}{q}]{A}\times\sqrt[\frac{p}{q}]{B}$ (§ 224, 4).

Заключаемъ, что правило извлеченія корня дробнаго порядка изъ произведенія такое же точно какъ и корня съ цѣлымъ показателемъ.

2. $\sqrt[\frac{p}{q}]{\frac{A}{B}} = \sqrt[\frac{p}{q}]{\left(\frac{A}{B}\right)^1} = \left(\frac{A}{B}\right)^{1:\frac{p}{q}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{q}{p}} = \frac{A^{\frac{q}{p}}}{B^{\frac{q}{p}}}$ (§ 223,1) $= \frac{A^{1:\frac{p}{q}}}{B^{1:\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[\frac{p}{q}]{A}}{\sqrt[\frac{p}{q}]{B}}$.

3. $\sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[\frac{p}{q}]{A^k}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{A^{k:\frac{p}{q}}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{A^{\frac{kq}{p}}} = A^{\frac{kq}{p}:\frac{m}{n}} = A^{\frac{kqn}{pm}} = A^{k:\frac{mp}{nq}} = \sqrt[\frac{mp}{nq}]{A^k}$ (§224):

и въ этомъ случаѣ для извлеченія корня изъ корня нужно показатели корней перемножить.

Итакъ, всѣ правила, доказанныя для показателей цѣлыхъ, распространяются и на дробные показатели. Замѣняя радикалы дробными показателями, мы получаемъ возможность совершать преобразованія ирраціональныхъ выраженій по тѣмъ же правиламъ, какія имѣемъ для выраженій раціональныхъ, а это ведетъ къ упрощенію вычисленій и болѣе быстрому полученію результатовъ.

226. Приводимъ примѣры преобразованій выраженій съ дробными показателями.

I. *Упростить выраженіе*

$$\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выноса въ первыхъ скобкахъ общаго множителя $a^{\frac{4}{3}}$, а во вторыхъ $b^{\frac{4}{3}}$, имѣемъ:

$$\left[a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$

возвышая каждаго множителя отдѣльно въ степень $\frac{1}{2}$, находимъ:

$$a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

взявъ общимъ множителемъ $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, имѣемъ

$$\left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right);$$

или, выполнивъ умноженіе:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

II. *Провѣрить равенство*

$$2^{\frac{1}{2}}\left[2a+(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[a-(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=(a+b)^{\frac{3}{2}}-(a-b)^{\frac{3}{2}}.$$

Для облегченія повѣрки положимъ:

$$x=a+b\ .\ .\ .\ (1)\quad \text{и}\quad y=a-b\ .\ .\ .\ (2).$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$2a=x+y, \text{ а отсюда } a=\frac{x+y}{2};$$

перемноживъ (1) со (2), найдемъ

$$a^2-b^2=xy, \text{ откуда } (a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}=(xy)^{\frac{1}{2}}.$$

Первая часть даннаго равенства послѣ подстановки приметъ видъ:

$$2^{\frac{1}{2}}.\left[x+y+(xy)^{\frac{1}{2}}\right].\left[\frac{x+y-2(xy)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[x+y+(xy)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[x+y+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)=x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}=$$

$$(a+b)^{\frac{3}{2}}-(a-b)^{\frac{3}{2}},$$

что и требовалось найти.

Отрицательные показатели.

227. Въ § 41 мы нашли, что $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, но тамъ формула эта установлена была для случая m цѣлаго. Если въ равенствѣ

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

показанномъ въ § 221 при условіи $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, условимся не дѣлать послѣдняго ограниченія, и положимъ $\frac{m}{n}=0$, то $a^{\frac{m}{n}}$ обратится въ a^0 или въ 1, а самое равенство въ $1:a^{\frac{p}{q}}=a^{-\frac{p}{q}}$. Итакъ

$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

т.-е. степень съ отрицательнымъ дробнымъ показателемъ равна единицѣ, дѣленной на то же основаніе съ положительнымъ показателемъ, равнымъ по абсолютной величинѣ отрицательному. Такимъ образомъ, будетъ ли m — цѣлое или дробное, всегда имѣемъ:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

Отрицательные показатели даютъ возможность изображать дробь въ формѣ цѣлаго выраженія (безъ знаменателя). Такъ дробь $\frac{5a^2b^3}{c^5d^7}$ можно написать въ видѣ: $5a^2b^3\cdot\frac{1}{c^5}\cdot\frac{1}{d^7}$; замѣтивъ, что $\frac{1}{c^5}=c^{-5}$ и $\frac{1}{d^7}=d^{-7}$, найдемъ, что

$$\frac{5a^2b^3}{c^5b^7}=5a^2b^3c^{-5}d^{-7}.$$

Такимъ образомъ, чтобы дробь представить безъ знаменателя, надо всѣ множители знаменателя перенести въ числитель съ отрицательными показателями.

Наоборотъ, всѣ множители числителя можно перенести въ знаменатель, написавъ ихъ съ отрицательными показателями; въ самомъ дѣлѣ, напр.

$$\frac{a^2b}{c^3d^5} = \frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot c^3d^5} = \frac{1}{a^{-2}b^{-1}c^3d^5}.$$

Перейдемъ теперь къ изученію дѣйствій надъ количествами съ отрицательными показателями.

228. Умноженіе. 1. Пусть требуется помножить a^p на a^{-q}; замѣтивъ, что $a^{-q}=\frac{1}{a^q}$, получимъ:

$$a^p\cdot a^{-q}=a^p\cdot\frac{1}{a^q}=\frac{a^p}{a^q};$$

такъ какъ p и q—числа положительныя, то, будутъ ли они цѣлыя или дробныя, нужно при раздѣленіи a^p на a^q вычесть q изъ p; слѣд.

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = a^{p+(-q)},\text{ слѣдовательно}$$

$$a^p\cdot a^{-q}=a^{p+(-q)},$$

т.-е. *показатель произведенія равенъ алгебраической суммѣ показателей множимаго и множителя.*

2. Пусть оба показателя—отрицательны; найдемъ:

$$a^{-p}\cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)} = a^{-p-q} = a^{-p+(-q)};$$

то же самое заключеніе, что и въ предыдущемъ случаѣ.

229. Дѣленіе. 1. Пусть будетъ одинъ изъ показателей — положительный, а другой — отрицательный.

$$a^{-p}:a^q = \frac{1}{a^p}:a^q = \frac{1}{a^p\cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q} = a^{-p-(+q)},$$

т.-е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

2. $a^{-p}:a^{-q}=\frac{1}{a^p}:\frac{1}{a^q}=\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{-p+q}=a^{-p-(-q)}$; то же заключеніе.

230. Возвышеніе въ степень. 1. $(a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{(a^m)^n}$ по правилу возвышенія дроби въ положительную степень; далѣе: $\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{-m\cdot n}$.

2. $(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{m\cdot -n}$.

3. $(a^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}=a^{-m\cdot -n}$.

Всѣ три результата приводятъ къ общему заключенію: при возвышеніи степени въ новую степень показатели перемножаются, будутъ ли они цѣлые или дробные, положительные или отрицательные.

231. Возвышеніе въ отрицательную степень произведенія и дроби.

1. $(A.B)^{-m}=\frac{1}{(AB)^m}=\frac{1}{A^m.B^m}=\frac{1}{A^m}.\frac{1}{B^m}=A^{-m}.B^{-m}$.

Заключаемъ, что для возвышенія въ отрицательную степень (цѣлую или дробную) произведенія нужно отдѣльно возвысить въ эту степень каждаго множителя и результаты перемножить.

2. $\left(\frac{A}{B}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)^m}=\frac{1}{\frac{A^m}{B^m}}=\frac{B^m}{A^m}=\frac{A^{-m}}{B^{-m}}$, по перенесеніи A^m въ числителя, а B^m — въ знаменателя. Заключеніе: для возвышенія дроби въ отрицательную степень нужно въ эту степень возвысить отдѣльно числителя и знаменателя, и первый результатъ раздѣлить на второй.

232. Извлеченіе корня. I. Пусть требуется извлечь корень положительнаго порядка изъ степени съ отрицательнымъ показателемъ: $\sqrt[m]{a^{-p}}$, гдѣ m и p — цѣлыя или дробныя числа. Имѣемъ:

$\sqrt[m]{a^{-p}}=\sqrt[m]{\frac{1}{a^p}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{m}}}=a^{-\frac{p}{m}}=a^{\frac{-p}{m}}$, т.-е. показатель подкореннаго количества нужно раздѣлить на показатель корня.

2. Разсмотримъ теперь извлеченіе корня съ отрицательнымъ показателемъ. Опредѣленіе корня, данное для цѣлаго положительнаго показателя и распространенное затѣмъ на корень дробнаго порядка, распространяютъ и на корни отрицательнаго порядка. Такимъ образомъ, корнемъ минусъ m-го порядка изъ A называютъ количество, которое по возвышеніи въ минусъ m-ую степень даетъ A; согласно этому опредѣленію:

если $\sqrt[-m]{A}=B$, то $B^{-m}=A$.

Докажемъ, что

$$\sqrt[-m]{A}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}},$$

т.-е. *что корень съ отрицательнымъ показателемъ равенъ единицѣ, раздѣленной на корень съ тѣмъ же по величинѣ, но положительнымъ по знаку, показателемъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\sqrt[-m]{A}=x$; по опредѣленію корня найдемъ: $x^{-m}=A$, или $\frac{1}{x^m}=A$, откуда $x^m=\frac{1}{A}$, а извлекая изъ обѣихъ частей корень m-го (положительнаго) порядка, получимъ:

$x=\sqrt[m]{\frac{1}{A}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}}$, и требуемое доказано.

Пусть теперь требуется извлечь корень $(-m)$-ой степени изъ a^p, гдѣ p — положительно; въ силу только что доказаннаго предложенія имѣемъ:

$\sqrt[-m]{a^p}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{m}}}=a^{-\frac{p}{m}}=a^{\frac{p}{-m}}$, т.-е. и въ этомъ случаѣ показатель подкореннаго количества надо раздѣлить на показатель корня.

Пусть, наконецъ, оба показателя отрицательны; найдемъ, что

$\sqrt[-m]{a^{-p}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^{-p}}}$; но $\sqrt[m]{a^{-p}}=a^{\frac{-p}{m}}$ (§ 232,1); слѣдовательно

$\sqrt[-m]{a^{-p}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{m}}}=a^{\frac{p}{m}}=a^{\frac{-p}{-m}}$: прежнее заключеніе.

Итакъ, *во всѣхъ случаяхъ, при извлеченіи корня нужно показатель подрадикальнаго количества дѣлить на показатель корня, будутъ ли оба показателя — цѣлые или дробные, положительные или отрицательные.*

Напр. $\sqrt[-3]{a^{-\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{3}{4}:-3}=a^{\frac{1}{4}}$.

233. *Извлеченіе корня отрицательнаго порядка изъ произведенія, дроби и корня съ отрицат. или положит. показателемъ.*

1. $\sqrt[-m]{AB}=\frac{1}{\sqrt[m]{AB}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}}\times\frac{1}{\sqrt[m]{B}}$. Но, по доказанному,

$\frac{1}{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[-m]{A}$ и $\frac{1}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[-m]{B}$, слѣд.

$$\sqrt[-m]{AB}=\sqrt[-m]{A}\times\sqrt[-m]{B},$$

т.-е. для извлеченія корня отрицательнаго порядка изъ произведенія нужно извлечь его отдѣльно изъ каждаго производителя и результаты перемножить.

$$2.\quad \sqrt[-m]{\frac{A}{B}}=\sqrt[-m]{\left(\frac{A}{B}\right)^1}=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{-m}}=\frac{A^{\frac{1}{-m}}}{B^{\frac{1}{-m}}}=\frac{\sqrt[-m]{A}}{\sqrt[-m]{B}}$$

(по §§ 231,2 и 232,2). Итакъ

$$\sqrt[-m]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[-m]{A}}{\sqrt[m]{B}},$$

т.-е. для извлеченія корня отрицательнаго порядка изъ дроби нужно извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй.

3. Пусть, наконецъ, требуется извлечь корень $(-m)$-го порядка изъ $\sqrt[-p]{A^k}$.

$\sqrt[-m]{\sqrt[-p]{A^k}}=\sqrt[-m]{A^{\frac{k}{-p}}}=A^{\frac{k}{-p}:-m}=A^{\frac{k}{mp}}=\sqrt[mp]{A^k}=\sqrt[(-m)(-p)]{A^k}$, т.-е. показатели корней слѣдуетъ перемножать.

Итакъ, всѣ правила, относящіяся къ вычисленіямъ надъ количествами съ положительными показателями, относятся и къ отрицательнымъ показателямъ.

Отрицательные показатели были введены раньше дробныхъ; ихъ введеніе приписываютъ Михаилу Стифелю (1509—1567).

ГЛАВА XVII.

Замѣчательныя формы алгебраическихъ выраженій.

Формы. $\frac{0}{m}$, $\frac{m}{0}$, $\frac{m}{\infty}$, $\frac{\infty}{m}$, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$.— Раскрытіе неопредѣленностей.

234. Въ силу общности алгебраическихъ формулъ онѣ могутъ представлять замѣчательныя формы при частныхъ предположеніяхъ относительно количествъ, входящихъ въ составъ ихъ. Займемся изученіемъ этихъ особыхъ, замѣчательныхъ формъ.

I. Форма: $\frac{0}{m}$.

235. *Численная величина алгебраическаго выраженія равна нулю, если оно является въ видѣ частнаго отъ раздѣленія нуля на конечное количество отличное отъ нуля.* Такимъ образомъ, если m есть конечное количество, отличное отъ нуля, то

$$\frac{0}{m}=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію частнаго, оно есть такое количество, которое, по умноженіи на дѣлителя, даетъ дѣлимое; но только нуль, умноженный на количество отличное отъ нуля, можетъ дать въ произведеніи нуль.

Примѣръ. — Дробь

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2+5}$$

при $x=2$ обращается въ нуль; въ самомъ дѣлѣ, подставляя вмѣсто x число 2, находимъ $\frac{0}{9}$, т.-е. 0.

II. Форма: $\frac{m}{0}$.

236. *Численная величина алгебраическаго выраженія равна безконечности, если оно является подъ видомъ частнаго отъ раздѣленія числа отличнаго отъ нуля на нуль.*

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ дробь $\frac{m}{x}$, которой числитель m есть нѣкоторое конечное число отличное отъ нуля, станемъ уменьшать ея знаменателя, неограниченно приближая его къ нулю: дробь будетъ безпредѣльно возрастать.

$\frac{1}{1}=1$

$\frac{1}{\frac{1}{10}}=10$

$\frac{1}{\frac{1}{100}}=100$

$\frac{1}{\frac{1}{1000}}=1000$

и т. д.

Такъ, дѣля 1 послѣдовательно на 1, на $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,... будемъ въ частномъ получать: 1, 10, 100, 1000,..., т.-е. числа возрастающія, такъ что когда численная величина знаменателя будетъ менѣе всякой величины, т.-е. 0, то численная величина дроби будетъ больше всякой величины, т.-е. будетъ *безконечно велика.*

Такъ какъ безконечность не можетъ быть выражена никакимъ числомъ, то для письменнаго изображенія ея необходимъ особый знакъ; такимъ знакомъ служитъ ∞. Итакъ

$$\frac{m}{0} = \infty,$$

если m отлично отъ нуля.

Знакъ ∞ предложенъ *Валлисомъ* въ XVII столѣтіи.

Примѣчаніе. Иногда говорятъ, что $\frac{m}{0}$ есть символъ *невозможности;* это нужно понимать такъ, что невозможно найти никакого *конечнаго числа,* которое, будучи помножено на нуль, давало бы m. И въ самомъ дѣлѣ, всякое конечное число, помноженное на 0, дастъ *нуль.*

Примѣръ. Дробь

$$\frac{x^2+1}{x^2-3x-4}$$

обращается въ ∞, если положить $x = 4$; въ самомъ дѣлѣ, тогда получимъ $\frac{17}{0}$ или ∞.

Когда числитель и знаменатель дроби имѣютъ одинаковые знаки, то при постепенномъ уменьшеніи численной величины знаменателя до нуля дробь будетъ оставаться положительною, и потому она стремится къ *положительной безконечности.* Если же числитель и знаменатель имѣютъ разные знаки, то по мѣрѣ приближенія знаменателя къ нулю дробь стремится къ *отрицательной безконечности.* Положительная безконечность изображается знакомъ $+\infty$, отрицательная — знакомъ $-\infty$. Такъ, если въ дроби $\frac{+2}{x-3}$, x, будучи больше 3, приближается къ 3, то $x-3$ будетъ оставаться величиною положительною; а потому, когда x, въ концѣ своего измѣненія, обратится въ 3, дробь обратится въ $+\infty$. Если же x, будучи меньше 3, приближается къ 3, то разность $x-3$ все время будетъ оставаться отрицательною; а потому, когда x достигнетъ своего предѣла 3, дробь обратится въ $-\infty$. Но дробь $\frac{x^2+2}{(x-1)^2}$, будетъ ли x приближаться къ 1 уменьшаясь, или увеличиваясь, въ обоихъ случаяхъ при $x = 1$ обращается въ $+\infty$, потому что и въ томъ и въ другомъ случаѣ ея числитель и знаменатель остаются положительными.

III. Формы: $\frac{\infty}{m}$ и $\frac{m}{\infty}$.

237. *Частное отъ раздѣленія безконечности на конечное количество—есть безконечность;* т.-е.

$$\frac{\infty}{m} = \infty,$$

если m конечно.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію частнаго,—это послѣднее, будучи умножено на конечное количество m, должно дать безконечность; но никакое конечное количество, умноженное на конечное m, не можетъ дать безконечности; поэтому частное—безконечно велико.

238. *Частное отъ раздѣленія конечнаго количества на безконечно-большое равно нулю;* т.-е.

$$\frac{m}{\infty}=0,$$

если m конечно.

Въ самомъ дѣлѣ, если дѣлимое конечно, то при неограниченномъ возрастаніи дѣлителя частное неограниченно приближается къ нулю, сл. при безконечно-большомъ дѣлителѣ численная величина частнаго будетъ нуль.

239. *Частное отъ раздѣленія нуля на безконечность есть нуль, а частное отъ раздѣленія безконечности на нуль есть безконечность;* т.-е.

$$\frac{0}{\infty}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\infty}{0}=\infty.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{0}{\infty}$ есть 0 по двоякой причинѣ: съ одной стороны потому, что числитель $=0$ (§ 235), съ другой потому, что знаменатель равенъ безконечности (§ 238). — Подобнымъ же образомъ убѣдимся и въ томъ, что $\frac{\infty}{0}=\infty$.

240. Теорема. *Численная величина цѣлаго по буквѣ x полинома съ конечными коэффиціентами, — конечна при x конечномъ, и безконечно-велика при x безконечномъ.*

Пусть имѣемъ полиномъ

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

цѣлый относительно x, съ конечными коэффиціентами a, b, c, d, e, причемъ a отлично отъ нуля; понятно, что при всякомъ конечномъ значеніи x каждый членъ полинома конеченъ, а алгебраическая сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ конечна.

Пусть теперь x будетъ безконечно-велико: вынеся x^4 за скобки, дадимъ полиному видъ

$$x^4\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}+\frac{e}{x^4}\right);$$

при $x=\infty$ каждый изъ членовъ въ скобкахъ, содержащій x въ знаменателѣ, обратится въ 0 (§ 238), такъ что въ скобкахъ останется a; поэтому произведеніе, т.-е. данный полиномъ, обращается въ $a\times\infty$, т.-е. представляетъ произведеніе конечнаго числа a, отличнаго отъ нуля, на безконечность; а такое произведеніе, очевидно, есть безконечность. Очевидно, знакъ этой безконечности будетъ такой, какой имѣетъ членъ ax^4 — высшій членъ полинома.

IV. Форма: $\frac{0}{0}$.

241. Выраженіе $\frac{0}{0}$, разсматриваемое само-по-себѣ, означаетъ какое угодно число. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на 0 значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на 0, давало бы 0; но всякое конечное число имѣетъ это свойство (такъ: $5\times0=0$, $-2\times0=0$ и т. д.), слѣд. $\frac{0}{0}$ означаетъ не одно какое-либо число въ частности, но какія угодно числа. Поэтому $\frac{0}{0}$ называютъ **символомъ** *неопредѣленности.*

Изъ этого слѣдуетъ, что если два количества A и B равны третьему C, то нельзя еще заключить, что A = B, не увѣрившись предварительно, что C не есть $\frac{0}{0}$.

242. Теорема. *Когда алгебраическая дробь, которой числитель и знаменатель суть цѣлые раціональные относительно x полиномы, принимаетъ при нѣкоторомъ частномъ значеніи x неопредѣленную форму* $\frac{0}{0}$, *— эта неопредѣленность — только кажущаяся, на самомъ же дѣлѣ дробь имѣетъ совершенно опредѣленную величину.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дробь $\frac{A}{B}$, которой числитель и знаменатель обращаются въ нуль при $x = a$; это доказываетъ, что и A и B дѣлятся на $x - a$ (§ 60). Пусть частное отъ раздѣленія A на $x - a$ будетъ A'; въ такомъ случаѣ

$$A = (x - a)A';$$

цѣлый относительно x полиномъ A' можетъ также обращаться въ нуль при $x = a$; тогда онъ будетъ имѣть видъ

$$A' = (x - a)A'',$$

а слѣд.

$$A = (x - a)^2 A''.$$

A'', въ свою очередь, также можетъ обратиться въ нуль при $x = a$ и т. д.

Такимъ образомъ можно написать:

$$A = (x - a)^m . P,$$

гдѣ P есть цѣлый относительно x полиномъ, не обращающійся въ нуль при $x = a$; онъ можетъ быть и нулевой степени, т.-е. вовсе не содержать буквы x.

Такимъ же образомъ можемъ написать:

$$B = (x - a)^p . Q,$$

гдѣ Q — цѣлый относительно x полиномъ, который можетъ быть и нулевой степени, не обращающійся въ нуль при $x = a$. Данная дробь имѣетъ, такимъ образомъ, видъ:

$$\frac{(x - a)^m . P}{(x - a)^p . Q}.$$

Изслѣдуемъ всевозможные случаи, полагая послѣдовательно:

$$m > p, \quad m = p, \quad m < p.$$

Первый случай. $m > p$. Положимъ $x = a$, найдемъ, что дробь обращается въ $\frac{0}{0}$. Но сокративъ ее на $(x - a)^p$, дадимъ ей видъ

$$\frac{(x - a)^{m-p} . P}{Q},$$

гдѣ $m - p$ — положительно; положивъ $x = a$, найдемъ, что $(x - a)^{m-p} = 0$, а P и Q — отличны отъ нуля; поэтому, *истинная величина* дроби при $x = a$ есть нуль.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{(x-3)^4(x+1)}{(x-3)^2(x+2)}$$

при $x = 3$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$; но, сокративъ ее на $(x-3)^2$, найдемъ

$$\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x+2)},$$

и, положивъ $x = 3$, найдемъ

$$\frac{0 \times 4}{5} \text{ или } 0.$$

Второй случай. $m = p$. Положивъ $x = a$, найдемъ, что дробь обращается въ $\frac{0}{0}$, а сокративъ ее на $(x-a)^m = (x-a)^p$, получимъ

$$\frac{A}{B} = \frac{P}{Q},$$

а такъ какъ P и Q не обращаются при $x = a$ въ ноль, то $\frac{A}{B}$ представляетъ нѣкоторое опредѣленное число.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-1)^3(x+3)}$$

при $x = 1$ обращается въ $\frac{0}{0}$; но, по сокращеніи на $(x-1)^3$, она обращается въ

$$\frac{x+2}{x+3}.$$

Положивъ въ этой дроби $x = 1$, найдемъ вполнѣ опредѣленное число $\frac{3}{4}$.

Третій случай. $m < p$. Положивъ $x = a$, найдемъ $\frac{0}{0}$; но если предварительно сократимъ дробь на $(x-a)^m$, то найдемъ

$$\frac{A}{B} = \frac{P}{(x-a)^{p-m}.Q};$$

такъ какъ $p - m$ — положительно, то при $x = a$ знаменатель обратится въ ноль; а какъ числитель отличенъ отъ нуля, то дробь обратится въ ∞.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{(x+1)^3(x-2)}{(x+1)^5(x-3)}$$

при $x = -1$ обращается въ $\frac{0}{0}$; но, по сокращеніи на $(x+1)^3$, принимаетъ видъ

$$\frac{x-2}{(x+1)^2.(x-3)};$$

положивъ $x = -1$, найдемъ $\frac{-3}{0(-4)} = \infty$. Такимъ образомъ, истинное значеніе дроби при $x = -1$ есть безконечность

243. Первый способъ опредѣленія истиннаго значенія неопредѣленности вида $\frac{0}{0}$.

Изъ предыдущаго § слѣдуетъ, что для опредѣленія истиннаго значенія неопредѣленности, или, какъ говорятъ, для *раскрытія неопредѣленности*, надо въ числителѣ и знаменателѣ дроби выдѣлить общаго множителя, обращающагося при сдѣланномъ частномъ предположеніи въ нуль, сократить дробь на этого множителя и потомъ ввести сказанное предположеніе.

Примѣръ I. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-6}$$

при $a=2$.

Замѣняя a числомъ 2, получаемъ $\frac{0}{0}$, т.-е. неопредѣленность; тѣмъ не менѣе, мы утверждаемъ, что при $a=2$ данная дробь имѣетъ совершенно опредѣленную величину. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ уже, что если числитель и знаменатель обращаются при $a=2$ въ нуль, то они дѣлятся на $a-2$, откуда находимъ, что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{(a-2)(a-1)}{(a-2)(a+3)},$$

сокративъ на $a-2$, находимъ

$$\frac{a-1}{a+3},$$

положивъ здѣсь $a=2$, найдемъ, что истинная величина дроби равна

$$\frac{2-1}{2+3} \text{ или } \frac{1}{5}.$$

Примѣчаніе. О данномъ предметѣ нельзя составить себѣ вполнѣ яснаго представленія, не обращаясь къ теоремамъ о предѣлахъ. Здѣсь мы имѣемъ двѣ перемѣнныя величины:

$$\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-6} \text{ и } \frac{a-1}{a+3}\cdot\frac{a-2}{a-2},$$

которыя, если a приближать къ 2, будутъ при всякомъ значеніи a оставаться равными. Но мы знаемъ, что въ такомъ случаѣ, въ силу теоремы III, § 184, и предѣлы этихъ перемѣнныхъ, при $a=2$, будутъ равны; такъ что

$$\lim\left(\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-6}\right)=\lim\left(\frac{a-1}{a+3}\cdot\frac{a-2}{a-2}\right) \text{ при } a=2\ldots(1).$$

Но, по теоремѣ XI, § 190,

$$\lim\left(\frac{a-1}{a+3}\cdot\frac{a-2}{a-2}\right)=\lim\left(\frac{a-1}{a-3}\right)\cdot\lim\left(\frac{a-2}{a-2}\right), \text{ при } a=2.$$

Но $\lim\left(\frac{a-1}{a+3}\right)$, при $a=2$, равенъ $\frac{1}{5}$. Что касается $\lim\left(\frac{a-2}{a-2}\right)$, то, по теор. XI, § 192, этотъ предѣлъ $=1$. Подставляя въ (1), имѣемъ

$\lim\left(\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-6}\right)_{a=2}=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}$, т.-е. что истинное значеніе данной дроби, при $a=2$, есть $\frac{1}{5}$.

Примѣръ II. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{x^4-4x^3-4x^2+24x-9}{x^3-x^2-21x+45}$$

при $x=3$.

Подставляя 3 вмѣсто x, замѣчаемъ, что оба члена дроби обращаются въ нуль; слѣд. они дѣлятся на $x-3$. Совершивъ дѣленія, найдемъ въ частныхъ: x^3-x^2-7x+3 и $x^2+2x-15$, такъ что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{(x-3)(x^3-x^2-7x+3)}{(x-3)(x^2+2x-15)},$$

или, по сокращеніи на $x-3$:

$$\frac{x^3-x^2-7x+3}{x^2+2x-15}.$$

Для нахожденія истиннаго значенія нужно теперь положить $x=3$. Сдѣлавъ это, находимъ, что новая дробь также обращается въ $\frac{0}{0}$; это значитъ, что оба члена ея дѣлятся снова на $x-3$, такъ что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{(x-3)(x^2+2x-1)}{(x-3)(x+5)}\text{ или, по сокращеніи, }\frac{x^2+2x-1}{x+5}.$$

Положивъ $x=3$, находимъ $\frac{14}{8}$ или $\frac{7}{4}$: это и есть истинное значеніе предложенной дроби при $x=3$.

Примѣръ III. Найти величину дроби $\frac{a^m-b^m}{a^p-b^p}$ при $a=b$.

При $a=b$ оба члена дроби дѣлаются нулями; слѣд. они дѣлятся на $a-b$; по сокращеніи на $a-b$ дробь принимаетъ видъ

$$\frac{a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}}{a^{p-1}+a^{p-2}b+a^{p-3}b^2+\ldots+b^{p-1}};$$

положивъ $a=b$, находимъ $\frac{ma^{m-1}}{pa^{p-1}}$ или $\frac{m}{p}\cdot a^{m-p}$: это и есть истинное значеніе данной дроби при $a=b$.

244. Второй способъ нахожденія истиннаго значенія неопредѣленности $\frac{0}{0}$.

Пусть дробь $\frac{A}{B}$ принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$ при $x=a$. Положивъ $x=a+h$, подставимъ въ данную дробь $a+h$ вмѣсто x: получимъ дробь $\frac{A'}{B'}$; сдѣлавъ въ ней приведеніе, найдемъ, что числитель и знаменатель ея будутъ содержать общимъ множителемъ h. Въ самомъ дѣлѣ, данная дробь принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x=a$, сл. оба члена ея содержатъ общій множитель $x-a$, т.-е. h (ибо изъ равенства $x=a+h$, слѣдуетъ $x-a=h$). Сокрадѣлимъ дробь $\frac{A'}{B'}$ на h, и если по сокращеніи количество h еще будетъ находиться въ дроби, нужно положить $h = 0$: полученный результатъ и будетъ представлять истинную величину данной дроби при $x = a$, ибо изъ равенства $x = a + h$ слѣдуетъ, что положить $h = 0$ то же самое, что въ данной дроби положить $x = a$.

Способъ этотъ принадлежитъ *Руше* (Rouché).

Примѣръ. Найти истинную величину дроби

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 - 5x + 2}$$

при $x = 1$.

Положивъ $x = 1$, найдемъ, что дробь принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. Подставляемъ въ нее вмѣсто x биномъ $1 + h$; находимъ:

$$\frac{(1+h)^3 - (1+h)^2 - (1+h) + 1}{(1+h)^4 - (1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 5(1+h) - 2} = \frac{2h^2 + h^3}{3h^3 + h^4}$$

Сокративъ на h^2, получимъ $\frac{2 + h}{3h + h^2}$, а положивъ здѣсь $h = 0$, найдемъ $\frac{2}{0}$ или ∞. Итакъ, истинное значеніе данной дроби при $x = 1$ есть ∞.

V. Форма: $0 \times \infty$.

245. Если въ равенствѣ $A \times \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$ положить: $A = 0$ и $B = 0$, то получится $0 \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$, или $0 \times \infty = \frac{0}{0}$. Итакъ, символъ $0 \times \infty$, разсматриваемый самъ по себѣ, означаетъ неопредѣленность.

Эта неопредѣленность можетъ быть только кажущеюся: ею можетъ маскироваться совершенно опредѣленная величина. Напримѣръ:

$$x^4 \times \frac{3}{x^3} = 3x;\ \text{при } x = 0 \text{ получаемъ: } 0 \times \infty = 0.$$

$$x^4 \times \frac{3}{x^4} = 3;\ \text{при } x = 0 \text{ получаемъ: } 0 \times \infty = 3.$$

$$x^4 \times \frac{3}{x^5} = \frac{3}{x};\ \text{при } x = 0 \text{ получаемъ: } 0 \times \infty = \infty.$$

Итакъ, подъ видомъ неопредѣленности $0 \times \infty$ можетъ являться и 0, и конечное число, и безконечность.

246. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что *если одинъ изъ сомножителей произведенія равенъ нулю, то мы не вправѣ утверждать, что и произведеніе равно нулю, не убѣдившись предварительно, что ни одинъ изъ остальныхъ сомножителей не есть безконечность.*

247. Такимъ образомъ, когда алгебраическое выраженіе принимаетъ видъ $0 \times \infty$, при частномъ значеніи какой-либо буквы, то является вопросъ объ опредѣленіи истинной величины этого выраженія.

Примѣръ. Найти истинную величину выраженія

$$(x^2+5x+6)\times\frac{3}{x^2+3x+2}$$

при $x=-2$.

Подставивъ (-2) вмѣсто x, находимъ: $0\times\infty$. Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$\frac{3(x^2+5x+6)}{x^2+3x+2},$$

приводимъ вопросъ къ раскрытію неопредѣленности $\frac{0}{0}$, при $x=-2$.

Примѣняя пріемъ § 243, находимъ:

$$\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)}=\frac{3(x+3)}{x+1}$$

Истинное значеніе будетъ:

$$\frac{3(-2+3)}{-2+1}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{-1}=-3$$

VI. Форма: $\frac{\infty}{\infty}$.

248. Если въ равенствѣ $\frac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{B}}=\frac{B}{A}$ положить $A=0$ и $B=0$, то получимъ: $\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}=\frac{0}{0}$, или $\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0}$. Слѣдовательно, символъ $\frac{\infty}{\infty}$, разсматриваемый самъ по себѣ, означаетъ неопредѣленность.

Неопредѣленность эта можетъ быть только кажущеюся. Такъ:

1) $\frac{2x^5}{x^4}=2x$; положивъ $x=\infty$, найдемъ: $\frac{\infty}{\infty}=\infty$.

2) $\frac{2x^5}{x^5}=2$; положивъ $x=\infty$, найдемъ въ этомъ случаѣ, что $\frac{\infty}{\infty}=2$.

3) $\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$; положивъ $x=\infty$, въ этомъ случаѣ найдемъ: $\frac{\infty}{\infty}=0$.

Итакъ, подъ видомъ неопредѣленности $\frac{\infty}{\infty}$ можетъ скрываться или ∞, или конечное количество, или нуль. Отсюда задача о раскрытіи неопредѣленности разсматриваемаго вида.

249. Въ § 240 мы видѣли, что величина цѣлаго раціональнаго по буквѣ x полинома равна безконечности при $x=\infty$, если коэффиціенты его конечны. Отсюда слѣдуетъ, что алгебраическая дробь, числитель и знаменатель которой суть цѣлые относительно x полиномы, обращается въ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x=\infty$. Докажемъ, что истинная величина такой дроби при x безконечномъ равна: *нулю*, *если степень знаменателя выше степени числителя; безконечности если, наоборотъ, степень знаменателя ниже степени числителя; и частному отъ раздѣленія коэффиціентовъ при высшихъ степеняхъ буквы x, если степень знаменателя равна степени числителя.*

Первый случай. Найти истинную величину дроби

$$\frac{x^2-x+1}{2x^3+3x^2-4}$$

при $x=\infty$.

Дробь принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$; чтобы раскрыть эту кажущуюся неопредѣленность, раздѣлимъ числ. и знам. на высшую степень x, въ данномъ случаѣ на x^3. Найдемъ

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}\quad\frac{4}{x^3}} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{2+\frac{3}{x}\quad\frac{4}{x^3}}.$$

Если положить $x=\infty$, каждый членъ, содержащій x въ знаменателѣ, обратится въ нуль, а дробь въ $\frac{0}{2}$ или въ 0.

Второй случай. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{3x^3+2x-1}{5x^3-2x^2+3}$$

при $x=\infty$.

Дробь принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Раздѣливъ оба члена ея на высшую степень x, въ данномъ случаѣ на x^3, найдемъ:

$$\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}.$$

При $x=\infty$ дроби: $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{2}{x}$ и $\frac{3}{x^3}$ обращаются въ нуль, и данная дробь равна $\frac{3}{5}$, т.-е. отношенію коэффиціентовъ при высшихъ степеняхъ x.

Третій случай. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{x^3-x+1}{-2x^2+5}$$

при $x=\infty$.

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x^3, получимъ:

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}} \quad \text{или} \quad \frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}.$$

При $x=\infty$ числитель обращается въ 1, а знаменатель въ 0 —2 или въ —0, истинная величина дроби $=-\infty$.

VII. Форма: $\infty - \infty$.

250. Сумма двухъ безконечностей одного знака, очевидно, равна безконечности съ тѣмъ же знакомъ; разность двухъ безконечностей съ противоположными знаками равна безконечности: но разность двухъ безконечностей одного знака и сумма двухъ безконечностей противоположнаго знака суть формы неопредѣленныя.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ равенствѣ $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B - A}{AB}$, положимъ $A = 0$ и $B = 0$, то найдемъ: $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$, или $\infty - \infty = \frac{0}{0}$.

Укажемъ, какъ раскрывать кажущуюся неопредѣленность этого вида.

Примѣръ I. Найти истинное значеніе выраженія

$$x^3 - x^2$$

при $x = \pm\infty$.

При $x = +\infty$ данная разность принимаетъ видъ $\infty - \infty$. Вынося x^3 за скобки, мы дадимъ ей видъ: $x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, что при $x = +\infty$ обращается въ $+\infty$.

При $x = -\infty$ данное выраженіе $= -\infty - \infty = -\infty$.

Примѣръ II. Найти истинное значеніе разности

$$(x + 1) - \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

при $x = \pm\infty$.

При $x = -\infty$ данная разность обращается въ $-\infty - \infty$ или въ $-\infty$

При $x = +\infty$, $x + 1$ равняется $+\infty$, равно какъ и $2x^2 - 3x + 1$; сл. мы получаемъ разность двухъ положительныхъ безконечностей — выраженіе неопредѣленное. Чтобы раскрыть эту кажущуюся неопредѣленность, множимъ и дѣлимъ данное выраженіе на сумму $x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$, и получаемъ

$$\frac{(x + 1 - \sqrt{2x^2 - 3x + 1})(x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1})}{x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}},$$

или

$$\frac{(x + 1)^2 - (2x^2 - 3x + 1)}{x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}},$$

или

$$\frac{-x^2 + 5x}{x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}}.$$

Раздѣливъ числ. и знам. на x^2, находимъ

$$\frac{-1 + \frac{5}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}$$

или

$$\frac{-1 + \frac{5}{x}}{\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}.$$

Положивъ здѣсь $x = +\infty$, находимъ $\frac{-1}{0(1+\sqrt{2})}$ или ∞.

Примѣръ III. Найти истинное значеніе разности

$$x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 1}$$

при $x = +\infty$.

При $x = -\infty$ находимъ $-\infty$.

При $x = +\infty$ разность принимаетъ неопредѣленный видъ $\infty - \infty$.

Чтобы раскрыть неопредѣленность, множимъ и дѣлимъ данное выраженіе на $x + 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 1}$; находимъ:

$$\frac{(x+2)^2 - (x^2 - 5x + 1)}{x + 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 1}},$$

или

$$\frac{9x + 3}{x + 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 1}}.$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x, получаемъ

$$\frac{9 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

Положивъ $x = +\infty$, находимъ $\frac{9}{1+\sqrt{1}}$, или $\frac{9}{2}$. Итакъ, истинная величина даннаго выраженія, при $x = +\infty$, равна $\frac{9}{2}$.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

УРАВНЕНІЯ и НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

ГЛАВА XVIII.

Уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Опредѣленія: равенство, тождество, уравненіе.—Уравненія эквивалентныя.—Преобразованія уравненія въ другое ему эквивалентное.—Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.—Примѣры.

Опредѣленія.

251. Соединеніе двухъ равныхъ количествъ знакомъ = (знакъ равенства) называется *равенствомъ*. Такъ $7 = 5 + 2$ есть равенство; общій видъ равенства есть

$$A = B.$$

Количество A, находящееся влѣво отъ знака равенства, наз. *первою частью*, количество же B, стоящее вправо отъ этого знака, *второю частью* равенства. Равенства бываютъ двоякаго рода: *тождества* и *уравненія*.

Всякое *очевидное равенство* называютъ *тождествомъ*.

Такъ, равенства

$$5 = 5; \qquad 10 = 7 + 2 + 1; \qquad (a + b)^2 = (a + b)^2$$

суть тождества.

Тождествомъ называютъ также всякое равенство двухъ буквенныхъ выраженій, вѣрное при всѣхъ, какихъ угодно, значеніяхъ входящихъ въ него буквъ. Такимъ образомъ, равенства

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

суть *тождества*.

Но если возьмемъ равенство $2x - 10 = 0$, то легко убѣдимся, что оно будетъ вѣрно не при всякихъ частныхъ значеніяхъ буквы x; въ самомъ дѣлѣ, чтобы первая часть была нулемъ, нужно чтобы $2x$ равнялось 10, а это возможно только при x равномъ 5, и ни при какомъ другомъ значеніи буквы x. Точно такъ же равенство $x^2 = 16$ возможно не при всякомъ значеніи буквы x, а лишь при двухъ частныхъ значеніяхъ этой буквы, именно: при $x = +4$ и при $x = -4$; въ самомъ дѣлѣ, какъ $(+4)^2 = 16$, такъ и $(-4)^2 = 16$.

Такія равенства, которыя вѣрны не при всѣхъ, а лишь при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ, называются уравненіями.

Тѣ буквы, которымъ нужно дать особыя значенія для того, чтобы существовало равенство между обѣими частями ур—нія, иначе говоря, тѣ буквы, при частныхъ значеніяхъ которыхъ уравненіе въ самомъ дѣлѣ обращается въ тождество, называются неизвѣстными количествами уравненія, или просто *неизвѣстными*. Прочія же количества, входящія въ уравненія, наз. *извѣстными*.

Такъ, если мы ищемъ, при какомъ значеніи x равенство

$$a + b = 2x - c$$

будетъ справедливо, т.-е. обратится въ тождество, то x будетъ *неизвѣстнымъ* этого уравненія. Легко видѣть, что ур. это обратится въ тождество, если x-су дать значеніе $\frac{a+b+c}{2}$; въ самомъ дѣлѣ, вторая часть обращается при этомъ въ $2 \times \frac{a+b+c}{2} - c$ или въ $a + b + c - c$, что равно $a + b$; ур—ніе же дѣйствительно дѣлается тождествомъ

$$a + b = a + b.$$

Тѣ частныя значенія неизвѣстныхъ, при которыхъ ур—ніе обращается въ тождество, называются *рѣшеніями* или *корнями* уравненія. Въ вышеприведенныхъ примѣрахъ:

ур—ніе $2x - 10 = 0$ имѣетъ одинъ корень $= 5$;

ур—ніе $x^2 = 16$ имѣетъ два корня: $+4$ и -4;

ур—ніе $a + b = 2x - c$ имѣетъ одинъ корень: $\frac{a+b+c}{2}$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти его корни, т.-е. тѣ значенія для неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ уравненіе въ тождество.

Принято говорить, что *корень удовлетворяетъ уравненію*; этимъ сокращенно выражаютъ, что уравненіе обращается въ тождество, если замѣнить въ немъ неизвѣстныя корнями.

Для отличія неизвѣстныхъ количествъ ур - нія отъ извѣстныхъ, принято неизвѣстныя обозначать послѣдними буквами азбуки: x, y, z, t, u, v, . . . ; извѣстныя же первыми: a, b, c, d, ... , m, n, . . .

Такъ, въ уравненіи $a + b = 2x - c$ неизвѣстное есть x, извѣстныя же: a, b и c.

252. Классификація уравненій.—Уравненіе наз *алгебраическимъ*, если въ немъ надъ неизвѣстными не совершается иныхъ дѣйствій кромѣ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня.

Во всѣхъ другихъ случаяхъ ур. называется *трансцендентнымъ*.

Такъ уравненіе $10^x = 8$ есть трансцендентное; оно называется *показательнымъ*, ибо въ немъ неизвѣстное является показателемъ.

Всѣ алгебраическія уравненія раздѣляются на два класса: на *раціональныя* и *ирраціональныя*.

Алгебраическое ур. называется *раціональнымъ*, если въ немъ *неизвѣстныя не входятъ подъ знакомъ корня;* если же въ уравненіи неизвѣстныя встрѣчаются подъ знакомъ корня, то оно наз. *ирраціональнымъ*.

Такъ, уравненіе

$$\frac{2}{x} + x^2 - 1 = \sqrt{5}$$

есть раціональное, ибо въ немъ неизвѣстное не встрѣчается подъ знакомъ корня.

Уравненіе же

$$\sqrt{5x - 1} = 2x - 3$$

есть ирраціональное, ибо членъ $\sqrt{5x - 1}$ содержитъ неизвѣстное подъ знакомъ корня.

Раціональныя уравненія, въ свою очередь, раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя*.

Цѣлымъ наз. такое раціональное ур., которое не содержитъ неизвѣстное въ знаменателѣ; напр. уравненія

$$x^2 - 5x - 4 = 0, \quad \frac{2}{3}x - 10 = 5x - 1 \quad \text{и} \quad x - x\sqrt{2} = 6$$

суть цѣлыя.

Если же уравненіе содержитъ неизвѣстныя въ знаменателѣ, то оно назыв. *дробнымъ*. Уравненіе

$$\frac{3 - 5x}{1 + x} = 4$$

есть ур. дробное.

Такимъ образомъ обѣ части цѣлаго алгебраическаго уравненія суть *полиномы цѣлые относительно неизвѣстнаго*.

Степенью цѣлаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ называется высшій показатель при неизвѣстномъ въ этомъ уравненіи. Такъ:

ур—ніе $ax + b = 0$ есть ур—ніе первой степени;

ур—ніе $ax^2 + bx + c = 0$—второй степени;

ур—ніе $4x^3 - 2ax^2 + 5x - 1 = 0$—третьей степени.

Если же цѣлое ур. содержитъ нѣсколько неизвѣстныхъ, то степенью его наз. наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ въ одномъ и томъ же членѣ.

Такъ, ур—ніе

$$ax + by + cz = d$$

есть ур. первой степени съ тремя неизвѣстными (x, y и z).

Ур.

$$4x - 5xy - 9 = 4y - 11x$$

есть ур. второй степени съ двумя неизвѣстными, ибо наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ равна 2 (въ членѣ $-5xy$).

Ур. $$x^3y^4+y^2+\frac{xy}{7}+\sqrt{c}=2$$

есть ур. седьмой степени, такъ какъ наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ въ одномъ и томъ же членѣ равна 7 (въ первомъ членѣ).

Понятно, что нельзя говорить о степени ур—нія, если оно не есть раціональное цѣлое. Такъ мы не можемъ говорить о степени ур—ній

$$x+\sqrt{x}+1=0,\qquad \frac{x}{x-a}+\frac{x-b}{x+a}=c,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad c,$$

ибо они содержатъ члены или дробные, или ирраціональные относительно неизвѣстныхъ.

Уравненія раздѣляютъ еще на *численныя* и *буквенныя;* численнымъ ур—мъ называютъ такое, коэффиціенты котораго суть опредѣленныя числа, а буквеннымъ такое, коэффиціенты коего суть буквенныя выраженія. Такъ

ур—ніе $3x-y^2+5=0$ есть численное;

ур—ніе $a^2x-\frac{a+b}{c}x^2-2=d$ есть ур. буквенное.

Если два ур—нія имѣютъ одинаковые корни, то они наз. *эквивалентными* ур—ми. Итакъ, уравненія

$$A=B\ \ldots\ (1)\quad \text{и}\quad A'=B'\ \ldots\ (2)$$

будутъ эквивалентны, если всякій корень ур—нія (1) удовлетворяетъ (2), и обратно, каждый корень (2) удовлетворяетъ (1).

Такъ напр., ур—нія

$$2x+1=7\ \ldots\ (1)\quad \text{и}\quad 2x+4=10\ \ldots\ (2)$$

эквивалентны, ибо какъ то, такъ и другое удовлетворяются однимъ и тѣмъ же корнемъ, равнымъ 3.

253. Процессъ рѣшенія ур—нія заключается въ томъ, что отъ даннаго уравненія, путемъ послѣдовательныхъ преобразованій, стараются придти къ такому уравненію, первая часть котораго есть само неизвѣстное; понятно, что вторая часть такого ур—нія и будетъ искомымъ корнемъ, если послѣднее эквивалентно данному.

Сказанныя преобразованія основаны на слѣдующихъ началахъ.

254. Первое начало. — *Придавая къ обѣимъ частямъ уравненія поровну, или отнимая отъ обѣихъ частей равныя количества, получимъ уравненіе эквивалентное данному.*

Пусть данное уравненіе будетъ

$$A=B\ \ldots\ (1)$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя алгебраическія выраженія, содержащія одно или нѣсколько неизвѣстныхъ. Пусть будетъ, далѣе, M нѣкоторое произвольное количество, содержащее или не содержащее неизвѣстныя. Требуется доказать, что уравненіе

$$A + M = B + M \ . \ . \ . \ (2)$$

эквивалентно данному. Это значитъ, нужно доказать, что всякій корень ур—нія (1) служитъ также корнемъ и для (2), и обратно—всякій корень ур—нія (2) удовлетворяетъ и ур—нію (1). Въ самомъ дѣлѣ:

1. Пусть $x = 5$ будетъ корнемъ ур—нія (1); это значитъ, что при подстановкѣ числа 5 вмѣсто x въ уравненіе (1) количества A и B дѣлаются равными; но такъ какъ M всегда остается равнымъ самому себѣ, то очевидно, что при $x = 5$, и $A + M$ будетъ равно $B + M$, т.-е. подстановка 5 вмѣсто x въ уравненіе (2) обращаетъ его въ тождество, а это и значитъ, что 5 есть корень уравненія (2). Такимъ образомъ, мы доказали, что всякій корень уравненія (1) удовлетворяетъ необходимо и уравненію (2).

2. Наоборотъ: пусть $x = \alpha$ будетъ корнемъ уравненія (2), т.-е. что при подстановкѣ количества α вмѣсто x въ уравненіе (2), $A + M$ дѣлается равнымъ $B + M$; но какъ M всегда равно самому себѣ, то равенство суммъ $A + M$ и $B + M$ требуетъ равенства выраженій A и B. Итакъ, при $x = \alpha$ имѣемъ $A = B$, т.-е. $x = \alpha$ служитъ корнемъ ур—нія (1).

Итакъ, доказано, что уравненія (1) и (2) эквиваленты.

Если отъ обѣихъ частей ур—нія (1) отнять по M, то уравненіе $A - M = B - M$ также эквивалентно уравненію $A = B$. Въ самомъ дѣлѣ, отнять M все равно что придать (— M) къ обѣимъ частямъ даннаго ур—нія; но уже доказано, что придаліе равныхъ количествъ къ обѣимъ частямъ уравненія приводитъ къ уравненію, эквивалентному данному.

255. Слѣдствіе I.— *Всякій членъ уравненія можно перенести изъ одной части уравненія въ другую, написавъ его въ этой другой части съ обратнымъ знакомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть данное уравненіе будетъ

$$ax - b = cx + d \ . \ . \quad (1)$$

Придавая къ обѣимъ частямъ по $-cx$, имѣемъ

$$ax - cx - b = cx - cx + d, \text{ или } ax - cx - b = +d \ . \ . \ . \ (2)$$

причемъ, на основаніи доказаннаго начала, ур. (2) эквивалентно (1)-му. Придавая, затѣмъ, къ обѣимъ частямъ ур. (2) по $+b$, находимъ

$$ax - cx - b + b = b + d, \text{ или } ax - cx = b + d \ . \ . \ . \ (3),$$

причемъ это ур. эквивалентно (2)-му, а слѣд. и (1)-му.

Сравнивая ур. (3) съ (1), замѣчаемъ, что членъ cx перешелъ въ первую часть съ знакомъ —, между тѣмъ какъ во второй части ур. (1) этотъ членъ имѣлъ знакъ +, членъ b перешелъ во вторую часть съ знакомъ +, между тѣмъ какъ въ первой части уравненія этому члену предшествовалъ знакъ —. Отсюда выводится заключеніе: перенося члены изъ одной части уравненія въ другую, слѣдуетъ у переносимыхъ членовъ мѣнять знаки на противоположные.

256. Слѣдствіе II. — *Всякое уравненіе можно привести къ виду*

$$P = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, перенеся всѣ члены изъ второй части уравненія въ первую, очевидно, будемъ имѣть во второй части 0.

Напримѣръ, уравнение

$$4x^2 - 7x + 2 = 3x - 6$$

эквивалентно уравненію

$$4x^2 - 10x + 8 = 0.$$

Если имѣемъ уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, то перенеся всѣ члены въ первую часть и сдѣлавъ приведеніе, дадимъ такому ур—нію видъ

$$ax + b = 0,$$

гдѣ a и b суть выраженія, не содержащія x. Это и есть, слѣд., самый общій видъ уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Точно такъ же уравненіе

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

въ которомъ a, b и c не зависятъ отъ x, есть самый общій видъ ур—нія второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Уравненіе

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

представляетъ общій видъ ур—нія третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Наконецъ, уравненіе

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

есть общій видъ ур—нія m-ой степени съ 1 неизвѣстнымъ.

257. Слѣдствіе III. — *Можно перемѣнить знаки у всѣхъ членовъ уравненія на обратные.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дано уравненіе

$$19 - 7x = 5 - 4x \ . \ . \ . \ (1)$$

Замѣтимъ прежде всего, что всегда можно переставить части уравненія, т.-е написать вторую часть уравненія влѣво отъ знака равенства и наоборотъ; ибо очевидно, что ур—ніе $M = N$, эквивалентно ур—нію $N = M$ [1]. Сдѣлавъ это, найдемъ

$$5 - 4x = 19 - 7x.$$

Затѣмъ перенесемъ члены второй части въ первую и наоборотъ; получимъ

$$-19 + 7x = -5 + 4x \ . \ . \ . \ (2).$$

Сравнивая это ур. съ (1), замѣчаемъ, что оно отличается отъ (1) знаками при всѣхъ членахъ.

---

[1] Дѣйствительно, всякое значеніе неизвѣстнаго, дѣлающее M равнымъ N, дѣлаетъ, наоборотъ, и N равнымъ M.

258. Второе начало. *Помноживъ обѣ части уравненія на одно и то же количество, получимъ уравненіе эквивалентное данному, если только взятый множитель не есть ни нуль, ни безконечность, и не содержитъ неизвѣстнаго.*

Пусть дано уравненіе

$$A = B \ldots (1),$$

и M — количество, не равное ни 0, ни ∞ и не обращающееся ни въ 0, ни въ ∞. Требуется доказать, что при такомъ ограниченіи относительно M, уравненіе

$$A \cdot M = B \cdot M \ldots (2)$$

эквивалентно уравненію A = B, т.-е. что всякій корень перваго удовлетворяетъ второму и наоборотъ.

Для удобства доказательства замѣнимъ уравненія (1) и (2) имъ эквивалентными

$$A - B = 0 \ldots (I) \quad \text{и} \quad (A - B) \cdot M = 0 \ldots (II)$$

ур. (I) эквивалентно (1)-му и (II) (2)-му, ибо перенесеніе членовъ изъ одной части въ другую приводитъ всегда къ ур—мъ эквивалентнымъ даннымъ.

Итакъ, докажемъ, что (I) эквивалентно (II)-му.

1. Пусть $x = \alpha$ будетъ однимъ изъ корней уравненія (I); это значитъ, что при подстановкѣ α вмѣсто x въ ур. (I), это ур. обращается въ тождество, т.-е. A — B — въ нуль. Подставимъ теперь α вмѣсто x въ ур. (II); при этомъ A — B, какъ уже знаемъ, обратится въ 0; а произведеніе двухъ множителей: A — B и M, изъ коихъ одинъ равенъ нулю, само равняется 0, если только другой множитель не обращается въ ∞; но, по условію, M не есть и не обращается въ ∞, сл. произведеніе (A — B) M, при $x = \alpha$, дѣйствительно обращается въ 0, а ур. (II) въ тождество 0 = 0. Значитъ $x = \alpha$ служитъ корнемъ ур—нія (II).

2. Пусть $x = \beta$ есть одинъ изъ корней ур—нія (II); это значитъ, что при подстановкѣ β вмѣсто x въ ур-ніе (II) произведеніе (A — B) M дѣлается нулемъ; но чтобы произведеніе двухъ множителей было = 0, необходимо, чтобы одинъ изъ множителей равнялся 0, и какъ M, по условію, не есть 0, то A — B должно обращаться въ нуль. Итакъ, при подстановкѣ β вмѣсто x, выраженіе A — B обращается въ 0, а сл. $x = \beta$ служитъ корнемъ и (I) уравненія.

Итакъ, мы доказали, что при сдѣланномъ ограниченіи относительно M, всякій корень 1-го уравненія служитъ корнемъ и втораго, и наоборотъ; а слѣд. ур—нія (I) и (II) эквивалентны, и одно изъ нихъ можетъ быть замѣнено другимъ.

259. Можно раздѣлить обѣ части ур—нія на одно и то же количество M, лишь бы оно не было = ни нулю, ни безконечности; полученное ур. будетъ эквивалентно данному. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на M — все равно что помножить на $\frac{1}{M}$; но если M не есть 0 или ∞, то $\frac{1}{M}$ не есть ни ∞, ни 0; а такой множитель, по доказанному, приводитъ къ эквивалентному съ даннымъ уравненію.

260. Приложеніе. На этомъ началѣ основано уничтоженіе дробей въ уравненія, когда знаменатели этихъ дробей не содержатъ неизвѣстныхъ. Пусть, напр., требуется освободить отъ дробей уравненіе

$$\frac{7x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5x}{12}\ldots(1).$$

Для этого нужно помножить обѣ части ур—нія, или, что то же, всѣ члены ур—нія на наименьшее кратное знаменателей, и затѣмъ въ каждомъ членѣ сократить общихъ множителей числителя и знаменателя; такъ какъ каждый знаменатель входитъ множителемъ въ составъ наименьшаго кратнаго, то очевидно, что указаннымъ сокращеніемъ всѣ дробные члены будутъ приведены къ цѣлому виду.

Наименьшее кратное знаменателей ур—нія (1) есть $2^3 \times 3 = 24$; умножаемъ всѣ члены на 24; имѣемъ

$$\frac{7x\times 24}{8}-\frac{3\times 24}{4}=\frac{24}{6}+\frac{5x\times 24}{12},$$

или, сокращая первую дробь на 8, вторую на 4, третью на 6 и четвертую на 12, находимъ

$$7x\times 3-3\times 6=4+5x\times 2,$$

или, наконецъ

$$21x-18=4+10x\ldots(2).$$

Это ур. (2), по доказанному, эквивалентно (1)-му, ибо множитель въ данномъ случаѣ не содержалъ неизвѣстнаго, поэтому онъ не могъ измѣнять своей величины, а слѣдовательно и не могъ обратиться ни въ 0, ни въ ∞: это была конечная величина 24.

Возьмемъ еще примѣръ: освободить отъ дробей уравненіе

$$\frac{x+a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}.$$

Наименьшее кратное знаменателей $= ab(a-b)(a+b)$; умноживъ на него всѣ члены уравненія, получимъ:

$$\frac{(x+a)ab(a-b)(a+b)}{b}+\frac{(x-b)ab(a-b)(a+b)}{a}=\frac{xab(a-b)(a+b)}{a-b}$$

$$+\frac{xab(a-b)(a+b)}{a+b}$$

Сокративъ дроби, по порядку, на b, a, $a-b$ и $a+b$, получимъ:

$$(x+a)a(a^2-b^2)+(x-b)b(a^2-b^2)=x.ab(a+b)+xab(a-b).$$

Такъ какъ множитель въ данномъ случаѣ $= ab(a^2-b^2)$, т.-е. количеству, не зависящему отъ неизвѣстнаго, то послѣднее ур. эквивалентно данному.

261. Случаи, когда множитель равенъ безконечности, нулю или же содержитъ неизвѣстное.

При доказательствѣ предыдущей теоремы мы сдѣлали ограниченіе относительно величины множителя M, разумѣя подъ M количество опредѣленное, не равное ни 0, ни ∞, и не зависящее отъ неизвѣстнаго. При такомъ ограниченіи уравненіе, полученное по умноженіи на M, всегда эквивалентно данному. Разсмотримъ теперь случаи: $M = \infty$, $M = 0$, M содержитъ неизвѣстное.

Случай: $M = \infty$. — Въ этомъ случаѣ уже нельзя утверждать, что всякій корень ур—нія (I) удовлетворяетъ и II-му, потому что, хотя $A - B$ и равно 0, но $(A - B) \,.\, M$, принимая теперь видъ $0 \times \infty$, не необходимо равно нулю. Но всякое рѣшеніе ур—нія (II) необходимо будетъ удовлетворять и I-му; въ самомъ дѣлѣ, $(A - B) \,.\, M$ должно быть нулемъ, но какъ $M = \infty$, то необходимо, чтобы было $A - B = 0$.

Случай: $M = 0$. — Въ этомъ случаѣ всякій корень ур—нія (I) необходимо удовлетворяетъ II-му, такъ какъ при $A - B = 0$, первая часть ур—нія (II) обращается въ 0×0. Но не всякій корень II-го ур. будетъ необходимо удовлетворять и I-му, потому что $(A - B) \,.\, 0$ равно 0, хотя бы $A - B$ и не было нулемъ.

Случаи, когда M зависитъ отъ неизвѣстнаго. — Если множитель M есть выраженіе, содержащее неизвѣстное, то при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ послѣдняго оно можетъ обращаться или въ 0, или въ ∞; напримѣръ, если $M = x + 2$, то при $x = -2$, M дѣлается нулемъ; если $M = \frac{1}{x - 1}$, то при $x = 1$, M обращается въ ∞. Разсужденія, служившія намъ при доказательствѣ теоремы, опять становятся неприложимыми, и мы не въ правѣ утверждать, что по умноженіи будемъ имѣть уравненіе эквивалентное данному. Вопросъ этотъ требуетъ, поэтому, особаго изслѣдованія, которое, въ видахъ ясности, подраздѣляемъ на три случая.

1. **Выраженія $A - B$ и M — цѣлыя относительно неизвѣстнаго.** — Кромѣ тѣхъ значеній x, обращающія M въ нуль, пусть не обращаютъ въ нуль $A - B$. Доказать, что ур—нія

$$A - B = 0 \ldots (1) \quad \text{и} \quad M(A - B) = 0 \ldots (2)$$

не эквивалентны одно другому.

Здѣсь прежде всего необходимо замѣтить, что ур. $P = 0$, гдѣ P — цѣлый относительно x многочленъ съ конечными коэффиціентами, не можетъ имѣть безконечнаго корня, ибо цѣлый отн. x многочленъ съ конечными коэффиціентами обращается при $x = \infty$ въ ∞, а не въ нуль, какъ требуетъ ур. $P = 0$. Слѣдоват., уравненіе (1) имѣетъ конечные корни; въ частности, нѣкоторые изъ нихъ могутъ быть нулями. Переходимъ къ доказательству теоремы.

Всякій корень ур—нія (1), обращая $A - B$ въ нуль, дѣлаетъ нулемъ множителя $A - B$ въ ур—ніи (2); выраженіе же M, какъ цѣлое относительно x, при корняхъ ур—нія (1), какъ конечныхъ количествахъ, не можетъ обратиться въ ∞, а будетъ конечнымъ количествомъ. Поэтому, произведеніе $M(A - B)$ обратится въ нуль, а ур. (2) въ тождество $0 = 0$.

Итакъ, всякій корень ур—нія (1) удовлетворяетъ и ур—нію (2).

Но корни ур—нія (2) не необходимо удовлетворяютъ и ур—нію (1). Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ значеній x, обращающихъ $A - B$ въ нуль, ур—ніе (2) удовлетворяется еще такими значеніями x, при которыхъ M обращается въ нуль, но эти значенія, какъ неравныя ∞, не могутъ обратить $A - B$ въ ∞. Н, значенія x, обращающія въ нуль выраженіе M, по условію, не обращаютъ въ нуль количество $A - B$. Значитъ, этотъ второй родъ корней ур—нія (2) *не удовлетворять первому уравненію,* такъ что ур—віе (2) имѣетъ большее число корней нежели (1), и слѣдовательно, ему не эквивалентно.

Заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ умноженіе ур—нія на множитель, зависящій отъ неизвѣстнаго, приводитъ къ уравненію, имѣющему лишніе корни сравнительно съ даннымъ, при чемъ эти *лишніе корни суть тѣ значенія неизвѣстнаго, при которыхъ множитель* M *обращается въ нуль.*

Примѣръ. — Пусть дано ур—ніе

$$2x - 4 = 3x - 6,$$

корень котораго есть $x = 2$. Умноживъ обѣ части на $x - 1$, найдемъ новое уравненіе

$$(2x - 4)(x - 1) = (3x - 6)(x - 1).$$

Значеніе $x = 2$, удовлетворяющее первому, удовлетворяетъ и второму ур—нію, ибо обращаетъ обѣ его части въ 0. Но легко видѣть, что второе ур—ніе обращается въ тождество и при $x = 1$, слѣд., имѣетъ еще корень $= 1$, не удовлетворяющій первому. Заключаемъ, что второе ур—віе не эквивалентно первому.

II. A — B — **выраженіе цѣлое относительно неизвѣстнаго,** M — **дробное.** — Въ этомъ случаѣ уравненія

$$A - B = 0 \;.\;.\;.\; (1) \quad \text{и} \quad M(A - B) = 0 \;.\;.\;.\; (2)$$

не необходимо эквивалентны: *ур—ніе* (2) *можетъ не удовлетворяться нѣкоторыми корнями ур—нія* (1).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = a$ будетъ одинъ изъ корней ур—нія (1). Обращая, при подстановкѣ во (2), множителя A — B въ нуль, корень этотъ можетъ обратить M въ ∞; тогда первая часть ур—нія (2) приметъ видъ $\infty \times 0$, но это выраженіе можетъ и не быть нулемъ. Такимъ образомъ, умноженіе ур—нія можетъ въ разсматриваемомъ случаѣ повести къ *потерѣ* нѣкоторыхъ корней; *эти теряемые корни суть тѣ значенія неизвѣстнаго, которыя обращаютъ множителя въ безконечность.*

Примѣръ I. — Пусть данное ур. будетъ

$$(x - 1)(x + 2) = 0 \;.\;.\;.\; (1).$$

Корни его, какъ легко видѣть, суть: $x' = 1$ и $x'' = -2$. Помноживъ ур—ніе на $\frac{1}{x - 1}$, получимъ

$$\frac{1}{x - 1} \cdot (x - 1)(x + 2) = 0 \;.\;.\;.\; (2).$$

Подставивъ въ это ур—ніе 1 вмѣсто x, замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ

$$\infty \times 0 = 0.$$

Если теперь истинное значеніе неопредѣленности $\infty \times 0$, при $x = 1$, будетъ 0, то $x = 1$ будетъ служить корнемъ ур—нія (2); въ противномъ случаѣ, ур. (2) не имѣетъ корня равнаго 1.

Для раскрытія неопредѣленности $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1}$ сокращаемъ дробь на $x - 1$, и затѣмъ въ полученномъ выраженіи $x+2$ полагаемъ $x=1$: въ результатѣ находимъ 3. Значитъ ур. (2), при $x=1$, беретъ видъ

$$3=0,$$

и потому $x=1$ не есть его корень.

Но $x=-2$ служитъ корнемъ и ур—нія (2). Итакъ, вслѣдствіе умноженія на M дробное, ур—ніе потеряло одинъ изъ корней, равный тому значенію неизвѣстнаго, при которомъ множитель обращается въ ∞.

Примѣръ II. — Пусть данное ур—ніе будетъ

$$x^2+12=7x,$$

имѣющее корни $x'=3$ и $x''=4$.

Умноживъ обѣ части на $\frac{1}{x-3}$, находимъ

$$\frac{x^2+12}{x-3}=\frac{7x}{x-3}, \text{ или } \frac{x^2-7x+12}{x-3}=0, \text{ или } \frac{1}{x-3}\times(x-3)(x-4)=0.$$

Это ур—ніе удовлетворяется значеніемъ $x=4$. Но подставивъ $x=3$, находимъ $\infty\times 0=0$; и какъ истинное значеніе неопредѣленности $\infty\times 0$, при $x=3$, есть 1, то второе ур. не имѣетъ корня $=3$. Здѣсь опять отъ умноженія на $\frac{1}{x-3}$ ур—ніе потеряло корень 3, т.-е. равный тому значенію неизвѣстнаго, которое обращаетъ множителя въ ∞.

III. A — B — **выраженіе дробное относительно неизвѣстнаго,** M — **цѣлое.**

Мы видѣли, что когда въ случаѣ M цѣлаго было и A — B — цѣлое относительно x, то ур—ніе $M(A-B)=0$ имѣло больше корней чѣмъ ур—ніе $A-B=0$, и этими лишними корнями были тѣ значенія неизвѣстнаго, при которыхъ M обращалось въ нуль. Но если, при цѣломъ M, A — B будетъ дробное, то уже нельзя утверждать, чтобы ур—ніе $M(A-B)=0$ удовлетворялось и всѣми корнями ур—нія $M=0$; ибо можетъ случиться, что нѣкоторые изъ корней ур—нія $M=0$ обратятъ A — B въ ∞, и тогда произведеніе $M(A-B)$ не необходимо будетъ нулемъ, но можетъ быть и отличнымъ отъ нуля. Это значитъ, что умноженіе на M, въ данномъ случаѣ, можетъ и не ввести постороннихъ рѣшеній; иначе говоря, можетъ получиться ур. эквивалентное данному.

262. Случай дробнаго ур—нія и цѣлаго множителя особенно важенъ, ибо онъ встрѣчается при освобожденіи ур—нія отъ дробей; поэтому мы должны разсмотрѣть съ особеннымъ вниманіемъ всѣ представляемыя имъ обстоятельства.

Притомъ, для большаго удобства, предположимъ, что всѣ члены перенесены въ первую часть, приведены къ общему знаменателю и соединены въ одну дробь $\frac{P}{Q}$, гдѣ P и Q — цѣлые относительно x полиномы. Ур. приметъ видъ

$$\frac{P}{Q}=0;$$

оно всегда м. б. приведено къ этому виду.

Рѣшить это уравненіе — значитъ найти для неизвѣстнаго такія значенія, при которыхъ дробь $\frac{P}{Q}$ обратилась бы въ нуль; но дробь можетъ обратиться въ нуль только при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1 Если числитель обращается въ нуль, а знаменатель при этомъ остается отличнымъ отъ нуля.

2. Если знаменатель обращается въ безконечность, а числитель не дѣлается безконечностью.

3 Если числитель и знаменатель обращаются: оба въ нуль, или же оба въ ∞, но истинная величина полученныхъ неопредѣленныхъ формъ равна 0.

Разберемъ эти обстоятельства.

1. Во-первыхъ, числитель обращается въ нуль при значеніяхъ x, равныхъ корнямъ ур-нія $P = 0$. Поэтому, приравнявъ числителя нулю, опредѣляемъ всѣ корни уравненія $P = 0$ Затѣмъ, каждый изъ найденныхъ корней подставляемъ въ знаменателя Q: всѣ корни ур—нія $P = 0$, не обращающіе знаменателя Q въ нуль, обращаютъ въ нуль дробь $\frac{P}{Q}$, поэтому удовлетворяютъ данному уравненію $\frac{P}{Q} = 0$; если же при какомъ-либо корнѣ $x = \alpha$ ур-нія $P = 0$ и знаменатель Q обратится въ 0, такъ что дробь $\frac{P}{Q}$ приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, нужно будетъ найти истинное значеніе этой неопредѣленности; если это истинное значеніе будетъ нуль, то $x = \alpha$ удовлетворяетъ данному ур-нію; если же истинная величина неопредѣленности, при $x = \alpha$, будетъ отлична отъ нуля, корень α слѣдуетъ отбросить.

2. Во-вторыхъ, такъ какъ знаменатель Q есть полиномъ цѣлый по буквѣ x, то онъ можетъ обратиться въ ∞ только при $x = \infty$; но при этомъ и числитель, какъ цѣлый полиномъ относительно x, также обратится въ ∞, дробь же $\frac{P}{Q}$ приметъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$; истинная величина этой неопредѣленной формы будетъ нулемъ только тогда, когда степень знаменателя выше степени числителя. Въ этомъ, и только въ этомъ случаѣ, ур. $\frac{P}{Q} = 0$ будетъ имѣть безконечный корень.

Это изслѣдованіе приводитъ къ слѣдующему заключенію: для рѣшенія ур—нія, содержащаго неизвѣстное въ знаменателяхъ дробей, собираемъ всѣ члены въ первую часть, приводимъ ихъ къ общему знаменателю и соединяемъ въ одну дробь; приравнявъ числителя этой дроби нулю, рѣшаемъ уравненіе $P = 0$. Если окажется, что ни одинъ изъ корней этого ур. не обращаетъ знаменателя Q въ нуль, то заключаемъ, что ур $P = 0$ эквивалентно данному, если оставить въ сторонѣ безконечные корни.

Если же окажется, что какой-либо изъ корней ур—нія $P = 0$ обращаетъ и знаменателя Q въ нуль, то истинная величина дроби $\frac{P}{Q}$ при этомъ частномъ значеніи x покажетъ, слѣдуетъ ли его удержать или отбросить.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ въ поясненіе этого правила.

Примѣръ I. Рѣшить уравненіе

$$\frac{(x-1)^2(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-2)^3(x+3)^2} = 0 \ldots (1).$$

Приравнивая числителя нулю, рѣшаемъ уравненіе:

$$(x-1)^2(x+2)(x-3) = 0 \;.\;.\;.\;(2)$$

Произведеніе $(x-1)^2.(x+2)(x-3)$ обращается въ 0 при $x=1$, при $x=-2$ и при $x=3$. Слѣд. (2) имѣетъ три корня.

$$x'=1;\quad x''=-2;\quad x'''=3.$$

Подставляемъ каждый изъ нихъ, поочередно, въ знаменателя. При $x=1$ знаменатель обращается въ 0, а вся первая часть въ $\frac{0}{0}$; но сократимъ дробь на $x-1$, и положивъ затѣмъ $x=1$, находимъ, что истинная величина первой части ур—нія (1) есть 0. Заключаемъ, что $x'=1$ есть одинъ изъ корней ур—нія (1).

При $x=-2$, знаменатель снова обращается въ 0, а первая часть ур—нія (1) въ $\frac{0}{0}$; но истинная величина этой неопредѣленности, при $x=-2$, есть ∞, слѣд. корень $x''=-2$ не удовлетворяетъ данному ур—нію.

Наконецъ, корень $x'''=3$, обращая числителя въ 0, знаменателя — дѣлаетъ конечнымъ, а потому удовлетворяетъ ур—нію (1).

Замѣчая, наконецъ, что степень знаменателя ур. (1) выше степени числителя (числитель 4-й степени относительно x, а знаменатель 6-й), заключаемъ, что данное ур. имѣетъ еще безконечный корень.

Итакъ, данное ур. имѣетъ три корня:

$$1,\ 3\ \text{и}\ \infty.$$

Примѣръ II. Рѣшить уравненіе

$$1+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}-6.$$

Собравъ всѣ члены въ 1-ую часть и соединивъ ихъ въ одну дробь, найдемъ уравненіе

$$\frac{x^2-7x+6}{1-x}=0;$$

или, разложивъ числитель на множители и умноживъ обѣ части на -1, получимъ

$$\frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)}=0$$

Приравнивая числитель нулю, находимъ уравненіе $(x-1)(x-6)=0$, которое имѣетъ, какъ легко видѣть, два корня: $x'=1$ и $x''=6$. Изъ нихъ второй, какъ обращающій знаменателя въ конечную величину 5, удовлетворятъ и данному уравненію. Первый же, т.-е. 1, обращаетъ дробь $\frac{(x-1)(x-6)}{x-1}$ въ $\frac{0}{0}$; истинная величина этой неопредѣленности, при $x=1$, есть не 0, а -5, сл. корень $x=1$ не удовлетворяетъ предложенному уравненію.

Наконецъ, данное ур. не имѣетъ безконечнаго корня, ибо степень числителя дроби $\frac{x^2-7x+6}{x-1}$ выше степени ея знаменателя.

Итакъ, данное ур. имѣетъ одинъ корень: $x=6$.

Рѣшеніе уравненій 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

263. Доказанныхъ началъ совершенно достаточно для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Механизмъ рѣшенія укажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ I. Рѣшить уравненіе

$$\frac{7}{6}-\frac{x}{4}=4-\frac{5x}{3}\ .\ .\ .\ (1).$$

Освобождаемъ уравненіе отъ дробей, умножая обѣ части его на общаго знаменателя 12; получимъ

$$\frac{7\times 12}{6}-\frac{x\times 12}{4}=4\times 12-\frac{5x\times 12}{3},$$

или, по сокращеніи,

$$14-3x=48-20x\ .\ .\ .\ (2).$$

Перенеся, затѣмъ, неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую, найдемъ ур.

$$20x-3x=48-14;$$

сдѣлавши приведеніе въ той и другой части,

$$17x=34;\ .\ .\ .\ (3);$$

наконецъ, раздѣливши обѣ части на коэффиціентъ 17 при неизвѣстномъ, имѣемъ:

$$x=\frac{34}{17}\ \text{или}\ x=2\ .\ .\ .\ (4).$$

Уравненія (1), (2) (3) и (4) всѣ эквивалентны между собою: въ самомъ дѣлѣ, каждое изъ нихъ мы выводимъ изъ предыдущаго или умноженіемъ, или дѣленіемъ обѣихъ частей на одно и то же число, или перенесеніемъ членовъ изъ одной части въ другую; а всѣ эти преобразованія не измѣняютъ корней ур—нія. Но ур—ніе (4), очевидно, можетъ быть удовлетворено лишь величиною x равною 2; слѣд. 2 служитъ и корнемъ уравненія (1), эквивалентнаго (4).

Изъ предыдущаго выводимъ слѣдующее:

Общее правило. Для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ нужно:

1. *Освободить ур—ніе отъ дробей, если таковыя имѣются;*

2. *Перенести всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть, а всѣ извѣстные члены въ другую;*

3. *Сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, т.-е. всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, соединить въ одинъ членъ, а также и члены извѣстные;*

4. *Раздѣлить обѣ части полученнаго так. обр. уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ; частное и будетъ корнемъ предложеннаго уравненія.*

Примѣръ II. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x+1}{2}+\frac{1}{3}(x+2)=16-\frac{1}{4}(x+3).$$

Умноживъ обѣ части на 12—общаго знаменателя дробей, получимъ

$$6(x+1)+4(x+2)=192-3(x+3);$$

раскрывъ скобки, найдемъ

$$6x+6+4x+8=192-3x-9;$$

сдѣлавъ приведеніе въ каждой части уравненія, получимъ болѣе простое уравненіе

$$10x+14=183-3x;$$

по перенесеніи членовъ, имѣемъ

$$10x+3x=183-14,$$

по приведеніи:

$$13x=169.$$

Отсюда, раздѣливъ обѣ части на 13, имѣемъ

$$x=13.$$

Повѣрка. Подставивъ вмѣсто x въ данное ур. 13, получимъ

$\frac{13+1}{2}+\frac{1}{3}(13+2)=16-\frac{1}{4}(13+3)$, или $7+5=16-4$, или $12=12$.

Слѣд. найденное рѣшеніе въ самомъ дѣлѣ удовлетворяетъ данному уравненію.

Примѣръ III. Рѣшить уравненіе

$$5x-9-\frac{4x}{3}=7x-19$$

Освободивъ отъ дробей, получимъ

$$15x-27-4x=21x-57;$$

по перенесеніи членовъ имѣемъ:

$$15x-4x-21x=27-57;$$

по приведеніи:

$$-10x=-30.$$

Умноживъ обѣ части на —1, найдемъ

$$10x=30;$$

откуда

$$x=3.$$

Повѣрка не представляетъ никакого затрудненія.

Примѣръ IV. Рѣшить уравненіе

$$\frac{6x+7}{15}-\frac{2x-2}{7x-6}=\frac{2x+1}{5}\ \ldots\ (1).$$

Умножаемъ обѣ части на $15(7x-6)$ и рѣшаемъ полученное уравненіе: если найденный корень не обращаетъ въ нуль знаменателя, то онъ удовлетворяетъ данному уравненію. Но знаменатель $15(7x-6)$ обращается въ нуль при $x=\frac{6}{7}$; сл. если корень освобожденнаго отъ дробей уравненія будетъ отличенъ отъ $\frac{6}{7}$, онъ удовлетворяетъ предложенному уравненію.

Освобожденное отъ дробей ур—ніе есть

$$(6x+7)(7x-6)-(2x-2)15=3(2x+1)(7x-6)$$

или, собирая всѣ члены въ первую часть и въ двухъ изъ нихъ выводя за скобки $7x-6$, находимъ

$$(7x-6).4-30(x-1)=0,\quad \text{или}$$

$$28x-24-30x+30=0,\quad \text{или}$$

$$-2x=-6,\quad \text{откуда}$$

$$x=3.$$

Итакъ, данному уравненію удовлетворяетъ значеніе x, равное 3, въ чемъ не трудно убѣдиться повѣркою.

Примѣръ V. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{x}{x^2+5x+6}=4-\frac{9+4x}{x+3}.\ (1).$$

Для нахожденія общаго знаменателя, разлагаемъ на множителей знаменатели первой части уравненія; находимъ:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2);$$
$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3);$$
$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3);$$

общій знаменатель $=(x+1)(x+2)(x+3)$.

Умноживъ обѣ части на общаго знаменателя и сдѣлавъ надлежащія сокращенія въ дробныхъ членахъ, имѣемъ:

$$x+3+2x(x+2)+x^2+x=4(x+1)(x+2)(x+3)-(9+4x)(x+1)(x+2),$$

или

$$3x^2+6x+3=4x^3+24x^2+44x+24-4x^3-21x^2-35x-18,$$

или, по приведеніи во второй части и по отнятіи отъ обѣихъ частей по $3x^2$, имѣемъ:

$$6x+3=9x+6\ \ldots\ (2).$$

Это уравненіе не необходимо эквивалентно данному, такъ какъ оно получено умноженіемъ даннаго на выраженіе $(x+1)(x+2)(x+3)$, содержащее неизвѣстное. Но если корень (2) не обращаетъ въ нуль общаго знаменателя, то онъ удовлетворяетъ и ур—нію (1); общій же знаменатель обращается въ 0 при значеніяхъ x, равныхъ -1, -2 и -3; поэтому, если корень ур—нія (2) не равенъ ни одному изъ этихъ чиселъ, то онъ необходимо уд—тъ данному ур—нію; если же равенъ одному изъ этихъ чиселъ, то необходимо дальнѣйшее изслѣдованіе.

Рѣшая ур. (2) имѣемъ:

$$6x-9x=6-3$$

или

$$-3x=3,$$

откуда

$$x=-1.$$

Перенеся всѣ члены даннаго ур—нія въ первую часть и соединивъ ихъ въ одну дробь, имѣемъ

$$\frac{-3x-3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{-3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0.$$

Первая часть, при $x=-1$, обращается въ $\frac{0}{0}$; но, сокративъ на $x+1$, и положивъ затѣмъ $x=-1$, найдемъ

$$\frac{-3}{2}, \text{ что не} = 0,$$

слѣд. -1 не есть корень даннаго ур—нія. Но какъ степень знаменателя дроби $\frac{-3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ выше степени числителя, то данное ур. имѣетъ корень $=\infty$.

Примѣръ VI. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x+7b}{2a+b}=1+\frac{x+a}{2a-b}.$$

Умноживъ обѣ части на общаго знаменателя $(2a+b)(2a-b)$, найдемъ

$$(2x+7b)(2a-b)=(2a+b)(2a-b)+(x+a)(2a+b),$$

или, выполнивъ указанныя дѣйствія,

$$4ax+14ab-2bx-7b^2=4a^2-b^2+2ax+2a^2+bx+ab,$$

а по перенесеніи членовъ,

$$4ax-2bx-2ax-bx=4a^2-b^2+2a^2+ab-14ab+7b^2, \text{ или}$$

$$(2a-3b)\,x=6a^2-13ab+6b^2, \text{ откуда}$$

$$x=\frac{6a^2-13ab+6b^2}{2a-3b}.$$

Совершивъ дѣленіе, найдемъ окончательно

$$x=3a-2b.$$

Если значенія, данныя буквамъ a и b, обращаютъ одного изъ знаменателей въ нуль, тогда мы уже не имѣли бы права умножать ур. на произведеніе $(2a+b)(2a-b)$, какъ равное 0; но въ этомъ случаѣ самое ур., содержа дробь съ знаменателемъ равнымъ 0, не имѣло бы никакого смысла.

Примѣръ VII. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x-6a}+\frac{2}{x+3a}+\frac{3}{x-2a}-\frac{6}{x-a}=0\ .\ \ .\ \ .\ (1).$$

Приводя къ общему знаменателю, имѣемъ:

$$\frac{(x+3a)(x-2a)(x-a)+2(x-6a)(x-2a)(x-a)+3(x-6a)(x+3a)(x-a)-6(x-6a)(x+3a)(x-2a)}{(x-6a)(x+3a)(x-2a)(x-a)}=0.$$

Числитель м. б. упрощенъ: вынося въ первыхъ двухъ членахъ общій множитель $(x-2a)(x-a)$, а въ двухъ послѣднихъ $3(x-6a)(x+3a)$, найдемъ

$$\begin{aligned}(x-2a)(x-a)[x+3a+2x-12a]+3(x-6a)(x+3a)[x-a-2x+4a]=\\ (x-2a)(x-a)(3x-9a)+3(x-6a)(x+3a)(-x+3a)=\\ 3(x-2a)(x-a)(x-3a)-3(x-6a)(x+3a)(x-3a)=\\ 3(x-3a)[(x-2a)(x-a)-(x-6a)(x+3a)]=3(x-3a)\times 20a^2.\end{aligned}$$

Уравненіе принимаетъ, поэтому, видъ

$$\frac{60a^2(x-3a)}{(x-6a)(x+3a)(x-2a)(x-a)}=0\ .\ \ .\ \ .\ (2).$$

Числитель обращается въ 0 только при $x=3a$; и какъ это значеніе x не обращаетъ въ нуль знаменателя, то оно уд—тъ и ур—нію (1). Кромѣ того, данное ур. имѣетъ еще безконечный корень, ибо степень знаменателя выше степени числителя. Итакъ, ур. имѣетъ два корня

$$x'=3a,\quad \text{и}\quad x''=\infty.$$

Повѣрка. Подставляя $3a$ вмѣсто x въ данное ур., находимъ

$$\frac{1}{3a}+\frac{2}{6a}+\frac{3}{a}-\frac{6}{2a}=0,\quad \text{или}$$

$$-\frac{1}{3a}+\frac{1}{3a}+\frac{3}{a}-\frac{3}{a}=0,$$

что вѣрно.

Подставивъ ∞ вмѣсто x, замѣчаемъ, что каждый членъ первой части обращается въ 0, сл. ур. также обращается въ тождество $0=0$.

Задачи, приводящія къ уравненіямъ 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

264. Рѣшеніе задачи средствами алгебры состоитъ изъ четырехъ частей:

1) *составленія уравненій* или *неравенствъ* изъ условій, связывающихъ данныя величины съ неизвѣстными;

2) *рѣшенія* полученныхъ *уравненій* или *неравенствъ;*

3) *изслѣдованія задачи*, т.-е. a) опредѣленія условій, которымъ должны удовлетворять данныя (предполагая, что они изображены буквами), для того чтобы задача была возможна; b) опредѣленія числа рѣшеній въ случаяхъ возможности задачи, и c) разсмотрѣнія всякихъ представляемыхъ ею особенностей. Замѣтимъ, что не всякая задача даетъ матеріалъ для изслѣдованія;

4) *повѣрки* найденныхъ *рѣшеній*, служащей удостовѣреніемъ въ правильности рѣшенія задачи.

Въ этой главѣ мы займемся рѣшеніемъ только такихъ задачъ, которыя приводятся къ уравненіямъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; а изслѣдованіемъ рѣшеній займемся въ отдѣльной главѣ, не касаясь пока этого вопроса.

Что касается составленія уравненій изъ условій задачи, то на этотъ счетъ нѣтъ никакихъ общихъ правилъ; все, что можно сказать по этому предмету, сводится къ слѣдующему: назвавъ неизвѣстное (мы ограничиваемся здѣсь случаемъ одного неизвѣстнаго) буквою x, обозначаютъ при помощи этой буквы и данныхъ задачи всѣ дѣйствія, какія должно бы было произвести надъ ними для повѣрки рѣшенія, предполагая, что неизвѣстное найдено; такимъ образомъ получатся выраженія, которыя, по условію задачи, должны быть равны: соединяя ихъ знакомъ равенства, и получимъ искомое уравненіе.

Укажемъ примѣненіе этого правила на нѣсколькихъ вопросахъ.

265. Первая задача. *Часовая и минутная стрѣлка находятся вмѣстѣ, показывая полдень. Въ которомъ часу произойдетъ слѣдующая ихъ встрѣча?*

Составленіе уравненія. Циферблатъ часовъ раздѣленъ на 60 равныхъ частей, каждую изъ которыхъ большая стрѣлка проходитъ въ минуту времени, и пусть отъ полудня до встрѣчи стрѣлокъ малая стрѣлка прошла x такихъ дѣленій. Минутная стрѣлка, чтобы догнать часовую, должна обойти весь циферблатъ, т.-е. пройти 60 дѣленій, да еще x дѣленій, пройденныхъ часовою, всего $60+x$ дѣленій. Но въ то время какъ часовая проходитъ 5 дѣленій (отъ XII до I), минутная стрѣлка проходитъ 60 такихъ дѣленій, сл. въ 12 разъ большее число ихъ. Изъ этого слѣдуетъ, что въ одно и то же время путь, пройденный минутною стрѣлкою, въ 12 разъ больше пути, пройденнаго часовою, т.-е. $60+x$ въ 12 разъ больше x.

Итакъ, пишемъ уравненіе

$$60+x=12x.$$

Рѣшеніе уравненія. Перенеся x во вторую часть, находимъ

$$60=11x;$$

откуда

$$x=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}.$$

Слѣд., до встрѣчи стрѣлокъ часовая должна пройти $5\frac{5}{11}$ минутн. дѣленія, т.-е. встрѣча произойдетъ въ 1 ч. $5\frac{5}{11}$ мин.

Повѣрка. Пространство, пройденное минутною стрѣлкою, должно быть въ 12 разъ больше разстоянія, пройденнаго часовою; и въ самомъ дѣлѣ

$$65\frac{5}{11}:5\frac{5}{11}=\frac{720}{11}:\frac{60}{11}=12.$$

266. Вторая задача. *Въ трехзначномъ числѣ цифра десятковъ вдвое больше цифры сотенъ, цифра же единицъ втрое больше цифры сотенъ; если къ искомому числу придать 396, найдемъ число обращенное, т.-е. составленное тѣми же цифрами какъ и искомое, но написанными въ обратномъ порядкѣ. Опредѣлить неизвѣстное число?*

Составленіе уравненія. Пусть цифра сотенъ искомаго числа будетъ x; тогда цифра десятковъ выразится черезъ $2x$, а цифра единицъ формулою $3x$. Все число единицъ въ искомомъ числѣ будетъ

$$100x + 20x + 3x.$$

Число единицъ въ обращенномъ числѣ будетъ

$$300x + 20x + x.$$

Придавъ къ первому 396, найдемъ число обращенное; слѣдов.

$$100x + 20x + 3x + 396 = 300x + 20x + x.$$

Рѣшеніе уравненія. Отнявъ отъ обѣихъ частей по $20x$, собравъ неизвѣстные члены въ одну часть и сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$396 = 198x,$$

откуда

$$x = \frac{396}{198} = 2.$$

Итакъ, число сотенъ искомаго числа равно 2; слѣд. число десятковъ $= 4$, а число единицъ 6. Поэтому искомое число есть 246.

Повѣрка. Придавъ къ найденному числу 396, должны получить обращенное число, т.-е. 642; и дѣйствительно

$$246 + 396 = 642.$$

267. Третья задача. *Два капитала составляютъ въ совокупности 167280 руб. Первый, помѣщенный на 4%, принесъ бы въ 3 м. прибыль вдвое большую той, какую можетъ принести второй капиталъ, помѣщенный на 5%, въ 7 мѣсяцевъ. Опредѣлить оба капитала?*

Составленіе уравненія. Пусть первый капиталъ $= x$; тогда второй будетъ $= 167280 - x$ руб. Каждая сотня перваго капитала, принося въ 1 годъ 4 руб. прибыли, дастъ въ 1 мѣсяцъ $\frac{4}{12}$, въ 3 мѣсяца $\frac{4\quad 3}{12}$ или 1 руб.; слѣд. каждый рубль перваго капитала принесетъ $\frac{1}{100}$ руб. прибыли, а x рублей $\frac{x}{100}$.

Такимъ же точно образомъ найдемъ, что капиталъ $167280 - x$ р., при 5%, дастъ въ 7 мѣсяцевъ

$$\frac{(167280 - x) \times 5 \times 7}{100 \times 12} \text{ или } \frac{(167280 - x) \times 35}{100 \times 12} \text{ р. прибыли.}$$

По условію, первая прибыль вдвое больше второй, слѣд.

$$\frac{x}{100} = \frac{(167280 - x) \times 35 \times 2}{100 \times 12}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освободивъ это ур. отъ дробей, имѣемъ

$$12x = 167280 \times 70 - 70x,$$
$$12x + 70x = 167280 \times 70\ ,$$
$$82x = 167280 \times 70\ ,$$
$$x = \frac{167280 \times 70}{82} = 142800 \text{ р.}$$

Итакъ: капиталъ, помѣщенный на 4%, = 142800 р.; капиталъ, помѣщенный на 5%, = 167280 − 142800 = 24480 р.

Повѣрка. Прибыль, приносимая первымъ капиталомъ, равна $\frac{142800 \times 3 \times 4}{12 \times 100} =$ 1428 р.; вторымъ — $\frac{24480 \times 5 \times 7}{12 \times 100} = 714$. Дѣйствительно, 1428 больше 714 въ 2 раза.

268. Четвертая задача. *Лисица, преслѣдуемая собакою, находится впереди послѣдней на 60 своихъ скачковъ, и дѣлаетъ 9 скачковъ въ то время, въ какое собака дѣлаетъ только 6; но 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы. Сколько скачковъ должна сдѣлать собака, чтобы догнать лисицу?*

Когда въ задачѣ рѣчь идетъ о разстояніяхъ, полезно изображать ихъ линіями: этимъ путемъ мы яснѣе представимъ себѣ зависимость между величинами и скорѣе съумѣемъ составить ур—ніе.

Предложенная задача представляетъ примѣръ этого рода.

Составленіе уравненія. Пусть N (см. черт. 3) означаетъ мѣсто, въ которомъ находится собака; O — мѣсто, въ которомъ въ тотъ же самый моментъ находится лисица; M — точка, въ которой собака настигаетъ лисицу. Пусть, затѣмъ, собака должна сдѣлать x скачковъ, чтобы догнать лисицу, т.-е. чтобы пробѣжать разстояніе NM.

Выразимъ черезъ x число скачковъ, которое должна сдѣлать лисица на разстояніи OM. Въ то время какъ собака дѣлаетъ 6 скачковъ, лисица дѣлаетъ ихъ 9, сл. пока собака дѣлаетъ 1 скачекъ, лисица дѣлаетъ $\frac{9}{6}$ или $\frac{3}{2}$ скачка; потому, въ то время какъ собака дѣлаетъ x скачковъ отъ N до M, лисица дѣлаетъ x разъ $\frac{3}{2}$ или $\frac{3x}{2}$ скачковъ отъ O до M.

Итакъ, на одномъ и томъ же разстояніи NM, собака дѣлаетъ x скачковъ, а лисица $60 + \frac{3x}{2}$ (60 скачковъ на разстояніи отъ N до O).

Примемъ скачекъ лисицы за единицу мѣры: тогда разстояніе NM, выраженное въ этихъ единицахъ, будетъ $1 \times \left(60 + \frac{3x}{2}\right)$ или $60 + \frac{3x}{2}$ принятыхъ единицъ.

Съ другой стороны, 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы, сл. 1 скачекъ собаки = $\frac{7}{3}$ скачка лисицы; а потому x скачковъ собаки = $\frac{7x}{3}$ принятымъ единицамъ: это другая формула, выражающая разстояніе NM въ тѣхъ же единицахъ, какъ и формула $60+\frac{3x}{2}$.

Приравнивая одну формулу другой, имѣемъ ур—ніе

$$\frac{7x}{3}=60+\frac{3x}{2}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая ур. отъ дробей умноженіемъ обѣихъ частей на 6, получаемъ

$$14x=360+9x,$$
$$5x=360,$$
$$x=\frac{360}{5}=72.$$

Итакъ, собака сдѣлала 72 скачка, чтобы догнать лисицу

Повѣрка не представляетъ затрудненій.

269. Пятая задача. „*Два поѣзда выходятъ одновременно со станцій* A *и* B *и идутъ на встрѣчу другъ другу; первый все разстояніе* AB *можетъ пройти въ 4 ч. 20 м.; второй на прохожденіе того же пути употребляетъ 3 ч. 30 м. Разстояніе отъ* A *до* B *равно 211 верстамъ На какомъ разстояніи отъ* A *оба поѣзда встрѣтятся, полагая, что каждый движется все время съ одинаковою скоростью?*

Составленіе уравненія. Пусть будетъ x искомое разстояніе, т.-е. число верстъ отъ A до мѣста встрѣчи; разстояніе отъ мѣста встрѣчи до B равно, поэтому, $211-x$. Такъ какъ оба поѣзда выходятъ со станцій одновременно, то до встрѣчи они находятся въ дорогѣ *одинаковое время;* выразивъ эти времена и приравнявъ полученныя выраженія, и найдемъ искомое уравненіе.

Первый поѣздъ въ 4 ч. 20 м. или въ 260 м. можетъ пройти 211 верстъ, сл. чтобы пройти одну версту, времени нужно $\frac{260}{211}$ мин., а для прохожденія x верстъ $\frac{260x}{211}$ мин. Такимъ же разсужденіемъ убѣдимся, что второму поѣзду для прохожденія $211-x$ верстъ потребуется $\frac{210(211-x)}{211}$ мин. Сл. ур—ніе есть

$$\frac{260x}{211}=\frac{210(211-x)}{211}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая отъ дробей, имѣемъ

$$260x=210(211-x);$$

выполняя умноженіе и перенося члены:

$$260x+210x=44310;$$

$$470x=44310;$$

$$x=\frac{44310}{470}=94\tfrac{13}{47}\text{ версты.}$$

Итакъ, встрѣча произойдетъ въ разстояніи $94\frac{13}{47}$ версты отъ A.

Провѣрить рѣшеніе нетрудно.

270. Шестая задача. *Раздѣлить 5600 р. между пятью лицами такъ, чтобы 2-е имѣло вдвое больше 1-го и еще 200 р.; 3-е втрое больше 1-го безъ 400 руб.; 4-е полусумму частей 2-го и 3-го и еще 150 р.; наконецъ, 5-е четверть суммы остальныхъ четырехъ и еще 475 руб.*

Составленіе уравненія. Пусть будетъ x часть перваго; часть второго выражается формулою $2x+200$;—3-го $3x-400$.

Четвертый получитъ $\frac{2x+200+3x-400}{2}+150$ или $\frac{5x+100}{2}$.

Сумма частей четырехъ первыхъ лицъ =

$$x+2x+200+3x-400+\frac{5x+100}{2}, \text{ или } 6x-200+\frac{5x+100}{2},$$

$$\text{или } \frac{17x-300}{2}.$$

Пятый получитъ $\frac{17x-300}{8}+475$, т.-е. $\frac{17x+3500}{8}$.

По условію задачи части всѣхъ пяти лицъ въ совокупности составляютъ 5600 р.; отсюда уравненіе

$$\frac{17x-300}{2}+\frac{17x+3500}{8}=5600.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая уравненіе отъ дробей, находимъ

$$68x-1200+17x+3500=44800;$$
$$85x=44800+1200-3500,$$
$$85x=42500,$$
$$x=\frac{42500}{85}=500.$$

Итакъ: часть 1-го = 500 р.; часть 2-го = 1200; 3-го = 1100; 4-го = 1300; 5-го = 1500 р.

Повѣрка. Дѣйствительно, сумма $500+1200+1100+1300+1500=$ $=5600$.

Примѣчаніе. Задача эта приведена какъ примѣръ, указывающій, насколько должно сокращать и приводить въ простѣйшій видъ сложный результатъ, прежде чѣмъ переходить къ слѣдующему.

Перейдемъ къ примѣрамъ съ буквенными данными.

271. Седьмая задача. *Число a раздѣлить на двѣ части, которыя относились бы между собою какъ $m:n$?*

Составленіе уравненія. Пусть первая часть $=x$; тогда вторую можно выразить при помощи x изъ пропорціи

$$x : \text{второй части} = m : n,$$

откуда

$$\text{вторая часть} = \frac{nx}{m}.$$

Отсюда уравненіе

$$x + \frac{nx}{m} = a.$$

Рѣшеніе уравненія. Умноживъ обѣ части на m, найдемъ

$$mx + nx = am;$$
$$(m + n)x = am;$$
$$x = \frac{am}{m + n}.$$

$$\text{Вторая часть} = \frac{n}{m}x = \frac{n}{m} \cdot \frac{ma}{m + n} = \frac{na}{m + n}.$$

Повѣрка. Обѣ части должны въ суммѣ составлять a.
И дѣйствительно

$$\frac{ma}{m + n} + \frac{na}{m + n} = \frac{ma + na}{m + n} = \frac{(m + n)a}{m + n} = a.$$

272. Восьмая задача. *Нѣкто долженъ уплатить своему заимодавцу нѣсколько суммъ въ различные сроки, а именно: s руб. черезъ m мѣсяцевъ, s' руб. черезъ m' мѣс., s'' руб. по истеченіи m'' мѣсяцевъ, наконецъ s''' руб. черезъ m''' мѣсяцевъ. Заимодавецъ желаетъ получить всю сумму $s + s' + s'' + s'''$ разомъ. Черезъ сколько мѣсяцевъ должна быть произведена та уплата, чтобы ни та ни другая сторона не потерпѣла* ***убытка?***

Составленіе уравненія. Допустимъ, что каждые сто руб. приносятъ заимодавцу p % въ мѣсяцъ; тогда прибыль, которую заимодавецъ получилъ бы съ перваго капитала при уплатѣ его черезъ m мѣсяцевъ, составляетъ $\frac{spm}{100}$ р.; прибыль, доставляемая вторымъ капиталомъ, при уплатѣ его черезъ m' мѣсяцевъ, равна $\frac{s'pm'}{100}$; третьимъ — $\frac{s''pm''}{100}$; и четвертымъ $\frac{s'''pm'''}{100}$; слѣдов. общая прибыль, которую долженъ получить заимодавецъ, составляетъ $\frac{spm}{100} + \frac{s'pm'}{100} + \frac{s''pm''}{100} + \frac{s'''pm'''}{100}$ р. Время, по истеченіи котораго вся сумма $s + s' + s'' + s'''$ должна быть уплачена разомъ, должно быть таково, чтобы вся сумма давала прибыль равную вышеозначенной. Пусть это время x мѣсяцамъ; прибыль, доставляемая капиталомъ $s + s' + s'' + s'''$ по истеченіи этого времени, составляетъ

$$\frac{(s + s' + s'' + s''')px}{100} \text{ руб.}$$

Поэтому, уравненіе будетъ

$$\frac{(s + s' + s'' + s''')px}{100} = \frac{spm}{100} + \frac{s'pm'}{100} + \frac{s''pm''}{100} + \frac{s'''pm'''}{100}.$$

Рѣшеніе уравненія. Сокращая обѣ части на общаго множителя $\frac{p}{100}$, находимъ

$$(s + s' + s'' + s''')x = sm + s'm' + s''m''' + s'''m''',$$

откуда

$$x = \frac{sm + s'm + s''m'' + s'''m''}{s + s' + s'' + s'''}.$$

Повѣрка не представляетъ затрудненій.

ГЛАВА XIX

Уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

Опредѣленія.—Начала и методы.

273. Опредѣленія. Одного уравненія со многими неизвѣстными недостаточно для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть два неизвѣстныя x и y связаны однимъ уравненіемъ, наприм.

$$4x - 5y = 12.$$

Выражая отсюда x, имѣемъ

$$x = \frac{12 + 5y}{4},$$

откуда видно, что величина x-са зависитъ отъ y, самый же y остается вполнѣ произвольнымъ, такъ что ему можемъ давать какія угодно значенія; такъ, положивъ

$$y = 0,\ \text{находимъ, что}\ x = \frac{12 + 5 \times 0}{4} = 3.$$

$$y = 1,\ \ »\ \ »\ \ x = \frac{12 + 5 \times 1}{4} = \frac{17}{4};$$

$$y = 2,\ \ »\ \ »\ \ x = \frac{12 + 5 \times 2}{4} = \frac{11}{2};\ \text{и т. д.}$$

Итакъ, *одно ур. съ 2 неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество паръ рѣшеній, и слѣд. неопредѣленно.*

Если уравненіе содержитъ три неизвѣстныя, то двумъ изъ нихъ можно дать произвольныя значенія, а третье неизвѣстное получить совершенно опредѣленное значеніе; ур. будетъ имѣть опять безчисленное множество рѣшеній. Вообще, одно уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и называется поэтому неопредѣленнымъ.

Система совмѣстныхъ уравненій. Когда нѣсколько неизвѣстныхъ должны удовлетворять одновременно нѣсколькимъ уравненіямъ, то совокупность ур—ній составляетъ то, что называется *системою совмѣстныхъ уравненій.*

Простѣйшую систему составляютъ, очевидно, два уравненія съ двумя неизвѣстными.

Рѣшить систему нѣсколькихъ уравненій со многими неизвѣстными значитъ найти значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одновременно всѣмъ уравненіямъ. Такъ, система

$$4x - 3y = 8,$$
$$7x + 2y = 43$$

имѣетъ рѣшеніемъ $x = 5$, $y = 4$, потому что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ и то и другое уравненія обращаются въ тождества.

Двѣ системы уравненій называются *эквивалентными*, если они принимаютъ одни и тѣ же рѣшенія.

Начала и методы.

274. Начало первое. *Если* p, q, p' и q' *суть количества конечныя, т.-е. не равныя ни* 0, *ни* ∞, *если притомъ* $pq' - p'q$ *неравно нулю, то системы*

$$\left.\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

и

$$\left.\begin{aligned} pA + qB &= 0 \\ p'A + q'B &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

эквивалентны.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Пусть $x = \alpha$ и $y = \beta$ суть рѣшенія системы (1): это значитъ, что при подстановкѣ въ A и B вмѣсто x количества α и вм. y количества β, A и B обращаются въ нули; но какъ p, q, p' и q', по условію, конечны, а произведеніе конечнаго количества на нуль равно 0, то при тѣхъ же значеніяхъ x и y выраженія $pA + qB$ и $p'A + q'B$ обращаются въ нули. Слѣд. $x = \alpha$ и $y = \beta$ удовлетворяютъ системѣ (2).

2) Пусть теперь $x = a$ и $y = b$ будутъ рѣшенія системы (2), т.-е. пусть при этихъ величинахъ x и y выраженія $pA + qB$ и $p'A + q'B$ обращаются въ нули; въ такомъ случаѣ и выраженіе

$$q'(pA + qB) - q(p'A + q'B) \; . \; . \; . \; (3).$$

въ которомъ q' и q конечны, а $pA - qB$ и $p'A - q'B$ равны нулю, обращается въ нуль; но выраженіе (3) равно

$$(pq' - p'q)A;$$

слѣд. и это послѣднее равно нулю; но по условію $pq' - p'q$ отлично отъ нуля, слѣд. A должно быть равно нулю при $x = a$ и $y = b$. Но тогда и $pA = 0$, а потому ур. $pA + qB = 0$ обращается въ $qB = 0$; а какъ q конечно, то должно быть $B = 0$. Итакъ рѣшенія системы (2) удовлетворяютъ уравненіямъ системы (1).

Мы доказали, что системы (1) и (2) эквивалентны.

На этомъ началѣ основанъ

275. Методъ уравниванія коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ или методъ сложенія и вычитанія.

Пусть имѣемъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными

$$\left.\begin{aligned} 7x + 4y &= 76 \\ 11x - 9y &= 43 \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій неизвѣстное x; для этого помножимъ обѣ части 1-го ур. на коэффиціентъ 11 при x во второмъ уравненіи, а обѣ части 2-го ур. на -7, т.-е. на взятый съ обратнымъ знакомъ коэф. при x въ первомъ ур—ніи, и полученныя уравненія сложимъ. Такимъ обр. получимъ

$$\begin{aligned} 77x + 44y &= \quad 836 \\ 77x - 63y &= -301 \\ 107y &= \quad 535. \end{aligned}$$

Для исключенія y изъ системы (1), множимъ обѣ части перваго ур—нія на 9, а обѣ части втораго на 4 и складываемъ почленно полученныя уравненія:

$$\begin{aligned} 63x + 36y &= 684 \\ 44x - 36y &= 172 \\ \hline 107x \qquad &= 856. \end{aligned}$$

На основаніи доказаннаго начала, система ур—ній

$$107y = 535 \quad \text{и} \quad 107x = 856 \;.\;.\;. (2)$$

эквивалентна данной системѣ: поэтому рѣшенія системы (2) будутъ удовлетворять и (1). Рѣшая ур—нія (2), находимъ

$$y = \frac{535}{107} = 5; \qquad x = \frac{856}{107} = 8.$$

Нетрудно провѣрить, что рѣшенія

$$x = 8 \quad \text{и} \quad y = 5$$

дѣйствительно удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ.

Отсюда

Правило. Для нахожденія одного изъ неизвѣстныхъ, напр. x, умножаемъ данныя уравненія на такія количества чтобы коэффиціенты при другомъ неизвѣстномъ (y) сдѣлались равными, но имѣли бы противоположные знаки; затѣмъ полученныя новыя ур—нія почленно складываемъ. Такимъ обр. неизвѣстное y исключится приведеніемъ и получится ур—ніе съ однимъ неизвѣстнымъ x, которое уже легко опредѣлить. Подобнымъ же образомъ найдемъ y, исключивши x.

На практикѣ нужно пользоваться всѣми обстоятельствами, ведущими къ упрощенію вычисленій. Поясним это примѣрами.

1. Рѣшить уравненія

$$\begin{aligned} 5x - 12y &= 17 \\ 3x + 8y &= 71. \end{aligned}$$

Для исключенія y замѣчаемъ, что нѣтъ надобности множить первое ур. на 8, а второе на 12. Въ самомъ дѣлѣ, наим кратное чиселъ 12 и 8 есть 24, и для того чтобы коэффиціенты при y сдѣлались равными 24, достаточно первое ур. помножить на 2, а второе на 3. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\begin{aligned} 10x - 24y &= 34 \\ 9x + 24y &= 213; \end{aligned}$$

сложивъ почленно оба ур—нія, найдемъ

$$19x = 247;$$

откуда

$$x = 13.$$

Умноживъ 1-ое ур. на 3, а второе на 5, имѣемъ

$$\begin{aligned} 15x - 36y &= 51 \\ -15x - 40y &= -355; \end{aligned}$$

сложивъ эти уравненія, получимъ

$$-76y = -304,$$

откуда

$$y = \frac{-304}{-76} = 4.$$

2. Рѣшить уравненія

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 40 \\ 11x - 4y &= 4. \end{aligned}$$

Для исключенія y достаточно первое ур. умножить на 2, а второе оставить безъ перемѣны (или, что то же, умножить на 1); найдемъ

$$\begin{aligned} 10x + 4y &= 80 \\ 11x - 4y &= 4; \end{aligned}$$

сложивъ эти уравненія, получимъ

$$21x = 84, \quad \text{откуда} \quad x = 4.$$

Умноживъ первое ур. на 11, а второе на — 5, находимъ

$$\begin{aligned} 55x + 22y &= 440 \\ -55x + 20y &= -20; \end{aligned}$$

сложивъ, имѣемъ:

$$42y = 420, \quad \text{откуда} \quad y = 10.$$

3. Рѣшить ур—нія

$$\begin{aligned} 4x + 9y &= 127 \\ 8x - 3y &= 23. \end{aligned}$$

Умноживъ второе ур. на 3 и сложивъ съ первымъ, найдемъ

$$28x = 196, \quad \text{откуда} \quad x = 7.$$

Умноживъ первое на -2 и сложивъ со вторымъ, получимъ

$$-21y = -231, \quad \text{откуда} \quad y = 11.$$

4. **Рѣшить уравненія**

$$x + y = a$$
$$x - y = b.$$

Рѣшеніе этой системы встрѣчается на каждомъ шагу, и весьма просто. Складывая почленно оба ур—нія, получимъ

$$2x = a + b, \text{ откуда } x = \frac{a+b}{2};$$

вычитая изъ перваго второе, имѣемъ:

$$2y = a - b, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{a-b}{2}.$$

5. **Рѣшить систему уравненій**

$$(a+b)x + (a-b)y = a^2 + 2ab - b^2$$
$$(a^3 + b^3)x + (a^3 - b^3)y = a^4 - b^4 + ab(a^2 + b^2).$$

Для исключенія y замѣчаемъ, что $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, откуда видно, что достаточно первое ур. помножить на $a^2 + ab + b^2$, второе на 1, и изъ перваго вычесть второе.

Сдѣлавъ это, найдемъ

$$\{(a+b)(a^2 + ab + b^2) - (a^3 + b^3)\} x = (a^2 + 2ab - b^2 (a^2 + ab + b^2)$$
$$- \{a^4 - b^4 + ab(a^2 + b^2)\}$$

или

$$2ab(a+b)x = 2a^2b(a+b),$$

откуда

$$x = a.$$

Для исключенія x, т.-е. для нахожденія y, замѣчаемъ, что $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, и слѣд. достаточно, умноживъ первое уравн. на $a^2 - ab + b^2$, а второе на 1, вычесть второе изъ перваго. По упрощеніи, найдемъ

$$y = b.$$

6. **Рѣшимъ общія уравненія**

$$ax + by = c \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$a'x + b'y = c' \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Для исключенія y умножаемъ 1-е ур. на b', а второе на $-b$ и складываемъ почленно; так. обр. найдемъ

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

откуда

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Для исключенія x, съ цѣлію опредѣлить y, умножимъ 1-ое ур. на $-a'$, второе на $+a$; сложивъ почленно оба ур., найдемъ

$$(ab' - a'b)\,y = ac' - a'c, \;.\;.\;.\;(4)$$

откуда

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Уравненія (3) и (4) эквивалентны уравненіямъ (1) и (2); въ самомъ дѣлѣ, множители p, q, p', q' имѣютъ здѣсь частныя значенія

$$b', \quad -b, \quad -a', \quad +a;$$

поэтому эквивалентность обѣихъ системъ имѣетъ мѣсто всякій разъ, когда $ab' - a'b$ не равно нулю. Итакъ: *если* $(ab' - a'b)$ *отлично отъ нуля, система ур—ній*

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

имѣетъ единственное конечное и опредѣленное рѣшеніе:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

276. Начало второе. *Если* p *и* q *суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то ур—ніе*

$$pA + qB = 0$$

можетъ замѣнить одно изъ ур—ній

$$A = 0, \quad B = 0;$$

то-есть системы

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}(1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{c} A = 0 \\ pA + qB = 0 \end{array}\right\}(2)$$

эквивалентны.

Доказательство. Дѣйствительно:

1. Всякое рѣшеніе системы (1), обращая A и B въ нули, обращаетъ pA и qB въ нули, ибо p и q конечны, а слѣд. удовлетворяетъ системѣ (2).

2. Всякое рѣшеніе системы (2), обращая A въ нуль, тѣмъ самымъ удовлетворяетъ первому ур—нію системы (1); но если A обращается въ 0, то и pA равно нулю, а какъ сумма $pA + qB$, которой одно слагаемое равно 0, также обращается въ нуль, то должно и другое слагаемое qB обратиться въ 0; но q конечно, слѣд. B должно равняться 0. А этимъ доказано, что всякое рѣшеніе системы (2), удовлетворяетъ и второму ур—нію системы (1).

Эквивалентность системъ (1) и (2) такимъ образомъ доказана.

На этомъ началѣ основаны методы: *подстановленія*, *сравненія величинъ неизвѣстныхъ и методъ неопредѣленныхъ множителей или методъ Безу* (Bezout).

277. Методъ подстановленія. Пусть даны уравненія

$$\begin{cases} ax+by=c \;.\;.\;.\;(1) \\ a'x+b'y=c' \;.\;.\;.\;(2) \end{cases}$$

Опредѣлимъ изъ ур—нія (1) x, принимая на время y за извѣстное; находимъ

$$x=\frac{c-by}{a}\;.\;.\;.\;(3)$$

Подставляя эту величину въ ур—ніе (2), находимъ ур.

$$a'\frac{c-by}{a}+b'y=c',$$

которое и рѣшаемъ:

$$a'c-a'by+ab'y=ac'$$
$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c\;.\;.\;.\;(4)$$
$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\;.\;.\;.\;(5)$$

Подставляя эту величину y-ка въ формулу (3), получимъ

$$x=\frac{c-b\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}}{a};$$

$$x=\frac{cab'-ba'c-bac'+ba'c}{a(ab'-a'b)};$$

$$x=\frac{a(cb'-c'b)}{a(ab'-a'b)}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

Нужно доказать, что найденныя такимъ образомъ величины x и y удовлетворяютъ предложенной системѣ (1) и (2).

Въ самомъ дѣлѣ, перенесеніемъ ax и by въ другую часть замѣняемъ ур. (1) эквивалентнымъ ему ур—емъ

$$-ax+(c-by)=0$$

и слѣд. вмѣсто системы (1) и (2) можемъ взять ей эквивалентную:

$$-ax+(c-by)=0\;.\;.\;.\;(1')$$
$$a'x+b'y=c'\;.\;.\;.\;(2).$$

Помножая обѣ части ур—нія (1') на $\frac{a'}{a}$, а (2) на $+1$ и складывая почленно, имѣемъ

$$\frac{a'}{a}[-ax+(c-by)]+a'x+b'y=c';$$

или

$$a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c'.$$

А потому, на основаніи начала втораго, можемъ систему (1'), (2), а сл. и данную, замѣнить системою

$$(6).\ \begin{cases} ax + by = c \\ a'\left(\frac{c - by}{a}\right) + b'y = c', \end{cases}$$

которая и даетъ искомыя рѣшенія.

Ур—нія (6) позволяютъ формулировать слѣд. *правило:* ***Выводимъ*** *изъ одного изъ предложенныхъ ур—ній величину одного изъ неизвѣстныхъ, принимая другое за извѣстное, и подставляемъ эту величину во второе уравненіе. Изъ полученнаго так. обр. уравненія опредѣляемъ то неизвѣстное, которое въ немъ содержится; а внеся найденное неизвѣстное въ первое ур., получимъ изъ него величину и втораго неизвѣстнаго.*

Нужно, впрочемъ, замѣтить, что (4) можно замѣнить ур—мъ (5) лишь тогда, когда $ab' - a'b \gtrless 0$.

Приводимъ примѣры.

1. Рѣшить систему уравненій

$$3x - 5y = 2$$

$$4x + 2y = 7.$$

Рѣшая первое ур—ніе относительно x, при чемъ y принимаемъ на время за извѣстное, находимъ:

$$x = \frac{2 + 5y}{3};\ .\ .\ .\ (1))$$

Подставляя эту величину x во второе уравненіе, имѣемъ:

$$4 \cdot \frac{2 + 5y}{3} + 2y = 7\ .\ .\ .\ (2).$$

Такимъ образомъ получаемъ систему уравненій (1) и (2), которая, по доказанному, эквивалентна данной. Рѣшая ур. (2), находимъ

$$y = \frac{1}{2};$$

подставляя $\frac{1}{2}$ вмѣсто y въ ур. (1), получаемъ

$$x = \frac{3}{2}.$$

2. Рѣшить систему уравненій

$$(a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b)\ .\ .\ .\ (1)$$

$$a^2y - \frac{ab^2c}{a - b} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b)\ .\ .\ .\ (2).$$

Выводимъ изъ перваго ур—нія x, принимая на время y за извѣстное: находимъ

$$x = \frac{2ab(4a - b) - 3(a^2 - b^2)y}{5(a^2 - b^2)}.$$

Подставляя это выраженіе x въ уравненіе (2), имѣемъ:

$$a^2y-\frac{ab^2c}{a+b}+\frac{(a+b+c)b\cdot[2ab(4a-b)-3(a^2-b^2)y]}{5(a^2-b^2)}=b^2y+ab(a+2b).$$

Освобождаемъ это ур. отъ дробей, помножая обѣ его части на $5(a^2-b^2)$; найдемъ

$$5a^2(a^2-b^2)y-5ab^2c(a-b)+2ab^2(a+b+c)(4a-b)-3(a^2-b^2)(a+b+$$
$$+c)by=5(a^2-b^2)b^2y+5ab(a+2b)(a^2-b^2).$$

Перенося неизвѣстные въ первую часть, а извѣстные члены во вторую и вынося за скобки, найдемъ

$$[5a^2(a^2-b^2)-3(a^2-b^2)(a+b+c)b-5(a^2-b^2)b^2]\cdot y=$$
$$5ab(a+2b)(a^2-b^2)+5ab^2c(a-b)-2ab^2(a+b+c)(4a-b),$$

или

$$(a^2-b^2)[5a^2-8b^2-3ab-3bc]y=ab(5a^3+2a^2b-11ab^2-3abc-8b^3-3b^2c)$$

откуда

$$y=\frac{ab}{a-b}.$$

Внося эту величину y въ формулу для x, найдемъ

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

278. Методъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$ax-by=c\;.\;\;.\;\;.\;(1)$$
$$a'x+b'y=c'\;.\;\;.\;\;.\;(2).$$

Выражая изъ каждаго уравненія одно неизвѣстное черезъ другое, напр. x черезъ y, найдемъ:

$$x=\frac{c-by}{a}\;.\;\;.\;\;.\;(3)\quad\text{и}\quad x=\frac{c'-b'y}{a'}\;.\;\;.\;\;.\;(4)$$

Вставивъ въ (4) на мѣсто x его величину изъ (3), находимъ уравненіе

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}\;.\;\;.\;\;.\;(5)$$

которое вмѣстѣ съ (3) и составитъ систему, эквивалентную данной. Рѣшая (5), найдемъ y; а подставивъ величину y въ (3), опредѣлимъ x.

Итакъ, надо доказать, что система уравненій (3) и (5) эквивалентна системѣ (1) и (2). Въ самомъ дѣлѣ, перенеся by и $b'y$ во вторыя части данныхъ ур—ній, найдемъ имъ эквивалентныя:

$$ax=c-by\;.\;\;.\;\;.\;(1')$$
$$a'x=c'-b'y\;.\;\;.\;\;.\;(2').$$

Помноживъ (1′) на $\frac{1}{a}$, и (2′) на $-\frac{1}{a'}$, и сложивъ, получимъ

$$0 = \frac{c-by}{a} - \frac{c'-b'y}{a'} \quad . \; . \; . \; (6).$$

а это ур. вмѣстѣ съ (1′), на основаніи начала втораго, можетъ замѣнить систему (1′) и (2′), а слѣдовательно данную. Умноживъ обѣ части ур—нія (1′) на $\frac{1}{a}$, получимъ

$$x = \frac{c-by}{a};$$

а перенеся $-\frac{c'-b'y}{a'}$ изъ второй части ур—нія (6) въ первую, находимъ

$$\frac{c'-b'y}{a'} = \frac{c-by}{a},$$

ур—нія, эквивалентныя ур—мъ (1′) и (6). Такимъ образомъ данная система эквивалентна системѣ

$$x = \frac{c-by}{a} \text{ и } \frac{c-by}{a} = \frac{c'-b'y}{a'};$$

требуемое доказано.

Примѣненіе этого метода, согласно началу II, требуетъ, чтобы a и a' были количества конечныя, отличныя отъ нуля; а рѣшеніе ур—нія (5) требуетъ кромѣ того, чтобы $ab' - a'b$ было отлично отъ нуля.

Изъ сказаннаго выводимъ третій пріемъ рѣшенія:

Выводимъ изъ обоихъ данныхъ ур—ній величину одного и того же неизвѣстнаго, напр. x и полученныя выраженія сравниваемъ; такимъ образомъ получаемъ одно ур. съ однимъ неизвѣстнымъ y, которое и опредѣляемъ. Внеся найденную для y величину въ одну изъ формулъ для x, находимъ и это неизвѣстное.

Примѣръ. Рѣшить систему

$$x + \frac{1}{2}(3x - y - 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y - 1).$$

$$\frac{1}{5}(4x + 3y) = \frac{7y}{10} + 2$$

Освобождаемъ ур—нія отъ дробей, и для этого умножимъ обѣ части перваго на 4, а второго на 10. Находимъ:

$$4x + 2(3x - y - 1) = 1 + 3(y - 1).$$

$$2(4x + 3y) = 7y + 20.$$

По перенесеніи членовъ и по упрощеніи, имѣемъ

$$10x - 5y = 0, \quad \text{или} \quad 2x - y = 0,$$

$$8x - y = 20.$$

Опредѣляя изъ каждаго ур—нія y, получаемъ:

$$y = 2x \quad \text{и} \quad y = 8x - 20.$$

Сравнивая оба выраженія для y, находимъ

$$2x = 8x - 20, \quad \text{или} \quad -6x = -20; \quad \text{откуда}$$

$$x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Вставляя найденное для x число въ формулу $y = 2x$, найдемъ

$$y = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

279. Методъ Безу. Этотъ методъ по существу одинаковъ съ методомъ уравниванія коэффиціентовъ или сложенія и вычитанія. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Помноживъ одно изъ данныхъ уравненій на произвольнаго множителя, складываютъ съ нимъ или вычитаютъ изъ него другое, и получаютъ такимъ образомъ уравненіе, содержащее оба неизвѣстныя и произвольный множитель. Произволомъ послѣдняго пользуются для исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, и т. д. для полученія одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Приложимъ этотъ методъ къ системѣ

$$6x + 7y = 46 \;.\;.\;.\;(1)$$

$$5x + 3y = 27 \;.\;.\;.\;(2).$$

Помножимъ первое ур. на произвольнаго множителя m и изъ полученнаго ур—нія вычтемъ второе (или, что тоже, придадимъ (2), помноженное на -1); получимъ

$$6mx - 5x + 7my - 3y = 46m - 27, \quad \text{или}$$

$$(6m - 5)x + (7m - 3)y = 46m - 27.$$

Это ур., въ соединеніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (2), составляетъ, въ силу начала втораго, систему, эквивалентную данной. Такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію ур—ній

$$(6m - 5)\,x + (7m - 3)\,y = 46m - 27 \;.\;.\;.\;(3)$$

и

$$5x + 3y = 27 \;.\;.\;.\;(4).$$

Произволомъ количества m воспользуемся для исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, напр. y. Для этого опредѣлимъ m подъ условіемъ, чтобы коэффиціентъ при y обратился въ нуль, т.-е. чтобы

$$7m - 3 = 0 \;.\;.\;.\;(5).$$

Но значеніе m, обращающее $7m - 3$ въ нуль, есть корень ур—нія (5); его найдемъ, рѣшивъ это ур.:

$$m = \frac{3}{7}.$$

Подставивъ въ ур—ніе (3) $\frac{3}{7}$ вмѣсто m, получимъ ур. съ однимъ неизвѣстнымъ x, именно:

$$(6 \cdot \frac{3}{7} - 5)x = 46 \cdot \frac{3}{7} - 27, \quad \text{откуда } x = 3.$$

Подставивъ найденную для x величину въ ур. (4), найдемъ

$$5 \,.\, 3 + 3y = 27, \quad \text{откуда} \quad y = 4.$$

Приложимъ способъ Безу къ рѣшенію *системы двухъ уравненій въ общемъ видѣ:*

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Множимъ первое уравненіе на произвольнаго множителя m и вычитаемъ изъ него второе уравненіе; найдемъ

$$(am - a')\,x + (bm - b')\,y = cm - c'.$$

Для исключенія y положимъ $bm - b' = 0$, откуда $m = \frac{b'}{b}$.

Вставивъ это значеніе m въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\left(\frac{ab'}{b} - a'\right)x = \frac{cb'}{b} - c';$$

умноживъ обѣ части на b, находимъ:

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b, \quad \text{откуда } x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

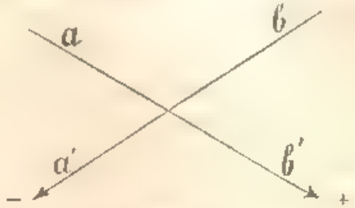
Для исключенія x, полагаемъ $am - a' = 0$, откуда $m = \frac{a'}{a}$; вставивъ эту величину m въ то же самое ур., имѣемъ:

$$\left(\frac{ba'}{a} - b'\right)y = \frac{ca'}{a} - c';$$

умноживъ обѣ части на $-a$, получимъ:

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c, \quad \text{откуда } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Полученныя формулы для x и y имѣютъ одинаковаго знаменателя, который легко получить, не рѣшая ур—ній, слѣдующимъ искусственнымъ пріемомъ: выписываемъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ изъ перваго уравненія, и подъ ними пишемъ коэффиціенты втораго ур—нія:



Черт. 14.

затѣмъ перемножаемъ эти коэффиціенты на-крестъ, какъ указываютъ стрѣлки, причемъ въ произведеніи, взятомъ слѣва на право, не измѣнимъ знака (это ука-показано знакомъ +), а въ произведеніи справо на лѣво перемѣняемъ знакъ на [illegible] (это указано знакомъ минусъ). Такимъ образомъ составится выраженіе

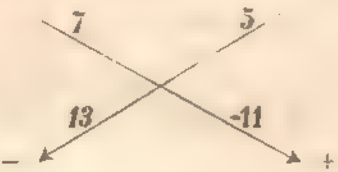
$$ab - a b,$$

представляющее общаго знаменателя корней. Изъ знаменателя легко составить числителей: для этого нужно только въ знаменателѣ коэффиціенты опредѣляемаго неизвѣстнаго замѣнить извѣстными членами изъ соотвѣтствующихъ ур — ній; тогда для составленія числителя неизвѣстнаго x нужно вмѣсто a и a' подставить c и c', а для составленія числителя y, надо въ знаменателѣ буквы b и b' замѣнить соотвѣтственно буквами c и c'. Это правило составленія знаменателя [illegible] и извѣстно подъ именемъ *правила Крамера* (1704—1752).

Такъ, если имѣемъ ур—нія

$$7x + 5y = 60$$
$$13x - 11y = 10,$$

то знаменатель рѣшеній найдемъ, составивъ табличку,



Черт. 15.

изъ которой имѣемъ: $7 \, . \, (-11) - 5 \times 13.$

Подставивъ въ это выраженіе вмѣсто 7 и 13 соотвѣтственно 60 и 10, и вмѣсто 5 и —11 числа 60 и 10, найдемъ числителей: для x: $60 \, . \, (-11) \quad 5 \times 10$, **а для y: $7 \, . \, 10 - 60 \times 13$. Итакъ:**

$$x = \frac{60.(-11)-5.10}{7.(-11)-5.13} = \frac{-660-50}{-77-65} \quad \frac{-710}{-142} \quad 5.$$

$$y - \frac{7.10-60 \; 13}{7.(-11)-5.13} - \frac{70-780}{-142} - \frac{-710}{-142} - 5.$$

280. Всѣ четыре метода рѣшенія ур — ній имѣютъ одну и ту же цѣль: изъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными *исключить* одно изъ неизвѣстныхъ и получить такимъ образомъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, поэтому всѣ четыре методы суть *методы исключенія.*

Изъ всѣхъ четырехъ способовъ исключенія — *способъ уравниванія коэффиціентовъ* самый удобный и всего чаще употребляемый; онъ ведетъ къ болѣе симметричнымъ вычисленіямъ; но неудобенъ, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ выражаются большими числами или десятичными дробями. Въ послѣднемъ случаѣ удобнѣе примѣнять *способъ подстановленія;* этотъ же способъ удобопримѣнимъ и тогда, когда коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ выраженіе неизвѣстнаго черезъ другое не имѣетъ знаменателя. Способъ сравненія неизвѣстныхъ имѣетъ то неудобство, что, какъ и предыдущій способъ, вводитъ въ уравненія дроби; но при большомъ числѣ неизвѣстныхъ имѣетъ то преимущество, что дѣлаетъ рѣшеніе уравненій однообразнымъ. Наконецъ, способъ Безу имѣетъ скорѣе теоретическое, нежели практическое, значеніе.

ГЛАВА XX.

Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

Опредѣленія. — Начала и методы.

281. Опредѣленія. Всякое ур. первой степени съ тремя неизвѣстными можно привести къ виду

$$ax + by + cz = d,$$

гдѣ a, b, c и d суть нѣкоторыя цѣлыя количества. Если x, y и z должны удовлетворять только одному уравненію, то очевидно, что такое ур. будетъ неопредѣленно, потому что двумъ неизвѣстнымъ можно давать совершенно произвольныя значенія. Тоже самое будетъ и въ томъ случаѣ, когда три неизвѣстныя должны удовлетворять двумъ уравненіямъ. Такъ, система

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{aligned}$$

неопредѣленна, потому что одному изъ неизвѣстныхъ можно давать произвольныя значенія: тогда система послужитъ для опредѣленія остальныхъ двухъ неизвѣстныхъ.

Но если неизвѣстныя должны удовлетворять тремъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}$$

то существуетъ, вообще, одна система рѣшеній, удовлетворяющихъ этимъ ур—мъ.

Двѣ системы называются эквивалентными, если онѣ удовлетворяются одними и тѣми же рѣшеніями.

282. Начало I. *Система трехъ уравненій*

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \;.\;.\;.\; (1)$$

эквивалентна системѣ

$$A = 0, \quad pA + qB = 0, \quad p'A + q'C = 0 \;.\;.\;.\; (2)$$

если количества p, q, p', q' конечны и отличны отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ уравненій (1), обращаютъ каждое изъ выраженій A, B и C въ нуль, стало быть эти значенія обратятъ въ нуль и произведенія pA, qB, $p'A$ и $q'C$, ибо p, q, p' и q' конечны; слѣдовательно, величины неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ (1), удовлетворяютъ и системѣ (2).

2) Значенія неизвѣстныхъ x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ (2), обращая въ нуль выраженіе A, обратятъ въ нуль и pA и $p'A$, такъ какъ p и p' конечны; но эти значенія обращаютъ въ нуль суммы $pA + qB$ и $p'A + q'C$, слѣд. они обращаютъ въ нуль и qB и $q'C$; но q и q' отличны отъ нуля, слѣд. B и C обращаются въ нули при сказанныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ. Итакъ, корни системы (2) удовлетворяютъ уравненіямъ системы (1).

Примѣчаніе. Можно выбрать p, p', q и q' такъ, чтобы уравненія

$$pA + qB = 0 \quad и \quad p'A + q'C = 0$$

содержали только два изъ трехъ неизвѣстныхъ: т.-е. *можно исключить одно изъ трехъ неизвѣстныхъ изъ одного изъ данныхъ ур—ній и каждаго изъ двухъ остальныхъ.*

На этомъ началѣ основаны способы исключенія: чрезъ уравниваніе коэффиціентовъ, чрезъ подстановленіе и чрезъ сравненіе величинъ неизвѣстныхъ.

283. Способъ уравниванія коэффиціентовъ. Пусть требуется рѣшить ур—нія

$$3x - 2y + 5z = 13 \; . \; . \; . \; (1)$$
$$5x + 4y - 3z = 25 \; . \; . \; . \; (2)$$
$$11x - 6y - 8z = 24 \; . \; . \; . \; (3)$$

Требуется исключить изъ этихъ уравненій y.

Для исключенія y изъ (1) и (2), множимъ первое на 2 и складываемъ со вторымъ, умноженнымъ на + 1; получимъ:

$$11x + 7z = 51 \; . \; . \; . \; (4).$$

Подобнымъ же образомъ, для исключенія y изъ (1) и (3), множимъ (1) на 3, (3) на — 1 и складываемъ; находимъ:

$$2x - 23z = -15 \; . \; . \; . \; (5).$$

На основаніи начала I, система уравненій (1), (4) и (5) эквивалентна данной; а какъ уравненія (4) и (5) содержатъ только два неизвѣстныхъ x и z; то и опредѣляемъ изъ нихъ эти неизвѣстныя. Для этого множимъ (4) на 2, (5) на — 11 и складываемъ; получаемъ

$$267z = 267,$$

откуда

$$z = 1.$$

Подставивъ вмѣсто z найденную величину въ ур. (5), имѣемъ

$$2x - 23 = -15, \quad откуда \; 2x = 23 - 15 = 8,$$

и слѣд.

$$x = 4.$$

Подставивъ въ ур. (1) найденныя для x и z величины, имѣемъ

$$12 - 2y + 5 = 13,$$

откуда

$$y = 2.$$

Итакъ, искомыя рѣшенія суть:

$$x = 4; \quad y = 2; \quad z = 1.$$

Легко убѣдиться прямою подстановкою ихъ въ ур—нія, что они дѣйствительно удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ.

284. Способъ подстановленія. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$ax+by+cz=d\;.\;.\;.\;.\;(1)$$
$$a'x+b'y+c'z=d'\;.\;.\;.\;.\;(2)$$
$$a''x+b''y+c''z=d''\;.\;.\;.\;(3).$$

Принимая на-время y и z за извѣстныя, рѣшаемъ ур. (1) относительно x:

$$x=\frac{d-by-cz}{a}\;.\;.\;.\;(4).$$

Подставивъ вмѣсто x это выраженіе въ уравненія (2) и (3), получаемъ:

$$\frac{a'(d-by-cz)}{a}+b'y+c'z=d'\;.\;.\;.\;(5)$$

$$\frac{a''(d-by-cz)}{a}+b''y+c''z=d''\;.\;.\;.\;(6).$$

Рѣшаемъ уравненія (5) и (6) относительно y и z. Освободивъ ихъ отъ дробей и отъ скобокъ, имѣемъ:

$$a'd-a'by-a'cz+ab'y+ac'z=ad'$$
$$a''d-a''by-a''cz+ab''y+ac''z=ad'',$$

или

$$(ab'-a'b)y+(ac'-a'c)z=ad'-a'd$$
$$(ab''-a''b)y+(ac''-a''c)z=ad''-a''d.$$

Примѣняя формулы § 275, 6, имѣемъ:

$$y=\frac{(ad'-a'd)(ac''-a''c)-(ad''-a''d)(ac'-a'c)}{(ab'-a'b)(ac''-a''c)-(ab''-a''b)(ac'-a'c)}$$

$$z=\frac{(ab'-a'b)(ad''-a''d)-(ab''-a''b)(ad'-a'd)}{(ab'-a'b)(ac''-a''c)-(ab''-a''b)(ac'-a'c)}.$$

Раскрывая скобки въ знаменателѣ и въ обоихъ числителяхъ, получаемъ: для знаменателя выраженіе:

$$a^2b'c''-aa'bc''-aa''b'c+a'a''bc-a^2b''c'+aa''bc'+aa'b''c-a'a''bc;$$

по приведеніи и по вынесеніи за скобки общаго множителя a, этотъ многочленъ принимаетъ видъ

$$a(ab'c''-a'bc''-a''b'c-ab''c'+a''bc'+a'b''c)\;.\;.\;.\;(7).$$

Для числителя формулы y находимъ

$$a^2c''d'-aa'c''d-aa''cd'+a'a''cd-a^2c'd''+aa''c'd+aa'cd''-a'a''cd,$$

или, вынося за скобки a:

$$a(ac''d'-a'c''d-a''cd'-ac'd''+a''c'd+a'cd'')\;.\;.\;(8).$$

Раскрывъ скобки въ числителѣ формулы z, получимъ:

$$a^2b'd'' - aa'bd'' - aa''b'd + a'a''bd - a^2b''d' - aa''bd' + aa'b''d - a'a''bd,$$

или, по приведеніи и по вынесеніи за скобки a:

$$a(ab'd'' - a'bd'' - a''b'd - ab''d' + a''bd' + a'b''d) \;.\;.\;\; (9).$$

Внося выраженія (7), (8) и (9) въ формулы для y и z и сокращая на a, найдемъ:

$$y = \frac{ac''d' - a'c''d - a''cd' - ac'd'' + a''c'd + a'cd''}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}$$

$$z = \frac{ab'd'' - a'bd'' - a''b'd - ab''d' + a''bd' + a'b''d}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}.$$

Подставляя найденныя для y и z выраженія въ уравненіе (4), находимъ

$$x = \frac{d - \frac{b(ac''d' - a'c''d - a''cd' - ac'd'' + a''c'd + a'cd'')}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c} - \frac{c(ab'd'' - a'bd'' - a''b'd - ab''d' + a''bd' + a'b''d)}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}}{a}$$

$$= \frac{ab'c''d - a'bc''d - a''b'cd - ab''c'd + a''bc'd + a'b''cd - abc''d' + a'bc''d + a''bcd' \\ + abc'd'' - a''bc'd - a'bcd'' - ab'cd'' + a'bcd'' + a''b'cd + ab''cd' - a''bcd' - a'b''cd}{a(ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c)},$$

Сдѣлавъ приведеніе и сокративъ на a, получимъ:

$$x = \frac{b'c''d - b''c'd - bc''d' + bc'd'' - b'cd'' + b''cd'}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}.$$

285. Докажемъ теперь, что уравненія (4), (5) и (6) эквивалентны даннымъ. Уравненіе (4) получено изъ (1) перенесеніемъ членовъ by и cz во вторую часть и дѣленіемъ обѣихъ частей на a, которое предполагается отличнымъ отъ нуля; сл. это уравненіе эквивалентно (1)-му.

Помножая уравненіе

$$\frac{d - by - cz}{a} = x$$

на a' и складывая со (2), найдемъ, по упрощеніи:

$$\frac{a'}{a}(d - by - cz) + b'y + c'z = d'.$$

Умножая то же самое ур. на a'' и складывая съ (3), по упрощеніи найдемъ

$$\frac{a''}{a}(d - by - cz) + b''y + c''z = d''.$$

А, въ силу начала I, эти три уравненія эквивалентны даннымъ: требуемое доказано.

286. Способъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ.

Пусть требуется рѣшить уравненія:

$$5x - 2y + 3z = 35 \;.\;.\;.\; (1)$$
$$8x + 7y - 5z = 67 \;.\;.\;.\; (2)$$
$$9x - 3y + 2z = 58 \;.\;.\;.\; (3).$$

Опредѣляя изъ каждаго ур—нія z, причемъ x и y на-время считаемъ извѣстными, найдемъ

$$z = \frac{35 - 5x + 2y}{3} \quad . \; . \; (4)$$

$$z = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \; . \; . \; . \; (5)$$

$$z = \frac{58 - 9x + 3y}{2} \; . \; . \; . \; (6).$$

Приравнивая первое выраженіе z поочередно — второму и третьему, получимъ:

$$\frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \; . \; . \; (7), \quad \frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{58 - 9x + 3y}{2} \; . \; . \; . \; (8)$$

уравненія съ двумя неизвѣстными x и y.

Докажемъ, что система уравненій: (4), (7) и (8) эквивалентна данной. Съ этою цѣлью перенесемъ въ данныхъ уравненіяхъ всѣ члены, за исключеніемъ содержащихъ z, во вторую часть; такимъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned} 3z &= 35 - 5x + 2y \\ -5z &= 67 - 8x - 7y \\ 2z &= 58 - 9x + 3y. \end{aligned}$$

Помножая первое изъ этихъ ур—ній на $\frac{1}{3}$, второе на $\frac{1}{5}$, и третье на $\frac{1}{2}$, и сложивъ первое сначала со вторымъ, а потомъ съ третьимъ, имѣемъ:

$$0 = \frac{35 - 5x + 2y}{3} + \frac{67 - 8x - 7y}{5}$$

$$0 = \frac{35 - 5x + 2y}{3} - \frac{58 - 9x + 3y}{2}$$

или, по перенесеніи:

$$\frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \text{ и } \frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{58 - 9x + 3y}{2}.$$

Эти два ур—нія, вмѣстѣ съ (4), на осн. начала I, составляютъ систему, эквивалентную данной. Освобождая ур—нія (7) и (8) отъ дробей, перенеся извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую, и сдѣлавъ приведеніе, дадимъ имъ видъ

$$-49x - 11y = -376; \quad 17x - 5y = 104.$$

Рѣшивъ эти ур—нія, найдемъ: $x = 7$, а $y = 3$. Подставивъ эти числа въ ур. (4), найдемъ: $z = 2$.

287. Начало II. *Система уравненій*

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \; . \; . \; . \; (1)$$

эквивалентна системѣ

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \\ mA + nB + pC &= 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2) \end{aligned}$$

гдѣ m, n и p количества конечныя, отличныя отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) Всякое рѣшеніе системы (1), обращая въ нуль выраженія A, B и C, обратитъ въ нуль и выраженія mA, nB и pC, такъ какъ множители m, n и p конечны; слѣд. рѣшеніе первой системы удовлетворяетъ второй.

2) Обратно: всякое рѣшеніе второй системы, обращая A и B въ нули, удовлетворяетъ первымъ двумъ уравненіямъ системы (1). Затѣмъ, при $A = 0$ и $B = 0$, произведенія mA и Bn также обращаются въ нули, потому что m и n кончены, но какъ разсматриваемое рѣшеніе обращаетъ въ нуль выраженіе $mA + nB + pC$, котораго два первые члена — нули; то и pC должно обращаться въ нуль; но p конечно, поэтому C должно обращаться въ нуль; т.-е. рѣшеніе системы (2) удовлетворяетъ и третьему ур—нію системы (1).

На этомъ началѣ основанъ способъ Безу.

288 Способъ Безу Способъ этотъ состоитъ въ употребленіи множителей, которые затѣмъ опредѣляютъ подъ условіемъ исключенія двухъ какихъ-нибудь изъ трехъ неизвѣстныхъ. Приложимъ этотъ способъ къ общей системѣ:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \quad . \ . \ . \ (1) \\ a'x + b'y + c'z &= d' \quad . \ . \ . \ (2) \\ a''x + b''y + c''z &= d''. \ . \ . \ (3). \end{aligned}$$

Помноживъ ур. (1) на произвольный множитель λ, ур. (2) на μ, а третье на $+1$, сложимъ ихъ почленно; получимъ ур.

$$(\lambda a + \mu a' + a'')x + (\lambda b + \mu b' + b'')y + (\lambda c + \mu c' + c'')z = \lambda d + \mu a' + d'' \quad . \ . \ . \ (4).$$

Это ур., въ силу начала II § 287, можетъ замѣнить въ данной системѣ одно изъ трехъ уравненій.

Располагаемъ произвольными множителями λ и μ такъ, чтобы исключить изъ ур—нія (4) неизвѣстныя y и z. Для этого, очевидно, надо, чтобы коэффиціенты при y и z обращались въ нули, т.-е. надо положить:

$$\left.\begin{aligned} \lambda b + \mu b' + b'' &= 0 \\ \lambda c + \mu c' + c'' &= 0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \lambda b + \mu b' &= -b'' \\ \lambda c + \mu c' &= -c'' \end{aligned}\right\} \ (5).$$

Значенія λ и μ, удовлетворяющія ур—мъ (5) найдемъ, рѣшивъ эти уравненія относительно λ и μ; примѣняя правило § 279, получимъ:

$$\lambda = \frac{b'c'' - c'b''}{bc' - cb'}, \quad \mu = \frac{cb'' - bc''}{bc' - cb'}.$$

Подставляя эти значенія λ и μ въ ур. (4), мы исключимъ этимъ самымъ y и z, и получимъ ур—ніе съ однимъ неизвѣстнымъ x:

$$\left(\frac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'}a + \frac{cb''-bc''}{bc'-cb'}a' + a''\right) x = \frac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'}d + \frac{cb''-bc''}{bc'-cb'}d' + d''.$$

откуда

$$x = \frac{(b'c''-c'b'')d+(cb''-bc'')d'+(bc'-cb')d''}{(b'c''-c'b'')a+(cb''-bc'')a'+(bc'-cb')a''},$$

или, по раскрытіи скобокъ:

$$x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

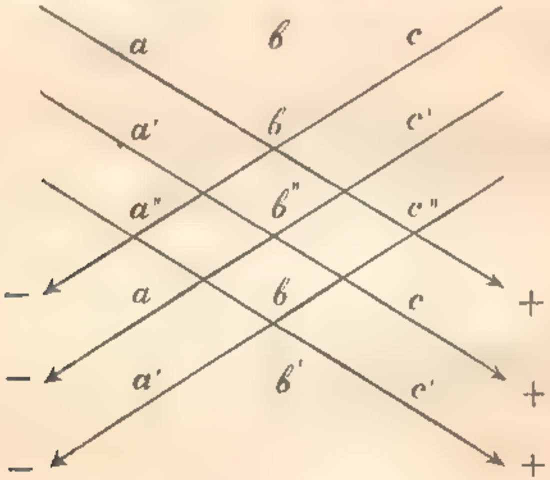
Приравнивая въ ур—ніи (4) коэффиціенты при x и z нулю, найдемъ y: а опредѣливъ для λ и μ такія значенія, при которыхъ обращаются въ нуль коэффиціенты при x и y, найдемъ z:

$$y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

289. Разсмотрѣніе общихъ формулъ предыдущаго параграфа приводитъ къ слѣдующему правилу механическаго рѣшенія трехъ ур—ній съ 3 неизвѣстными (такъ называемое правило *Саррюса*).

Для составленія общаго знаменателя неизвѣстныхъ, выписываютъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ изъ всѣхъ трехъ уравненій, и подъ ними еще разъ коэффиціенты изъ двухъ первыхъ ур—ній; такимъ образомъ получается табличка:



Черт. 16.

Затѣмъ перемножаютъ выписанныя буквы наклонно: сначала слѣва направо, не измѣняя знаковъ этихъ произведеній (что указывается знакомъ +), а потомъ справа на лѣво, перемѣнивъ при каждомъ произведеніи знакъ (что указывается знакомъ —). Такимъ образомъ получается общій знаменатель искомыхъ рѣшеній:

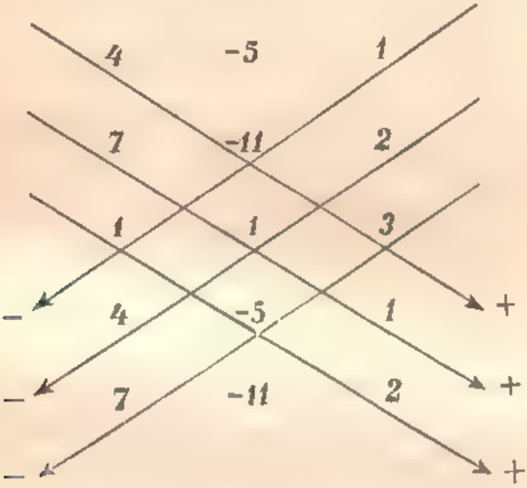
$$ab'c''+a'b''c+a''bc'-cb'a''-c'b''a-c''ba'.$$

Для полученія числителей пользуемся правиломъ Крамера: 1) для полученія числителя неизвѣстнаго x нужно въ знаменатель вмѣсто коэффиціентовъ этого неизвѣстнаго т.-е. вмѣсто a, a' a'' подставить извѣстные члены изъ соотвѣтствующихъ ур—нiй, т.-е. d, d' и d''; 2) неизвѣстнаго y—вмѣсто его коэффицiентовъ: b, b' и b'' подставить d, d' и d''; 3) наконецъ, неизвѣстнаго z — вмѣсто c, c' и c'' подставить d, d' и d'.

Примѣръ. Примѣнимъ этотъ механическiй прiемъ къ рѣшенiю системы:

$$\begin{aligned} 4x - 5y + z &= 6 \\ 7x - 11y + 2z &= 9 \\ x + y + 3z &= 12. \end{aligned}$$

Общiй знаменатель D составляемъ указаннымъ способомъ при помощи таблички:



Черт. 17.

найдемъ:

$$D = 4.(-11).3 + 7.1.1 + 1.(-5).2 - 1.(-11).1 - 2.1.4 - 3.(-5).7$$
$$= -132 + 7 - 10 + 11 - 8 + 105 = -27.$$

Назвавъ числителей неизвѣстныхъ x, y и z, соотвѣтственно буквами N_x, N_y и N_z, найдемъ:

$$N_x = 6(-11).3 + 9.1.1 + 12.(-5).2 - 12.(-11).1 - 2.1.6 - 3.(-5).9$$
$$= -198 + 9 - 120 + 132 - 12 + 135 = -54.$$
$$N_y = 4.(9).3 + 7.12.1 + 1.6.2 - 1.9.1 - 2.12.4 - 3.6.7$$
$$= 108 + 84 + 12 - 9 - 96 - 126 = -27.$$
$$N_z = 4(-11).12 + 7.1.6 + 1.(-5).9 - 1.(-11).6 - 9.1.4 - 12.(-5).7$$
$$= -528 + 42 - 45 + 66 - 36 + 420 = -81.$$

Итакъ:

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{-54}{-27} = 2; \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-27}{-27} = 1; \quad z = \frac{N_z}{D} = \frac{-81}{-27} = 3.$$

ГЛАВА XXI.

Рѣшеніе системы уравненій первой степени съ какимъ угодно числомъ неизвѣстныхъ.

Общій методъ.—Методъ Безу Жергонна.—Случаи упрощенія; искуственные пріемы.—О системахъ уравненій, въ которыхъ число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій: случаи несовмѣстности (условныя уравненія) и неопредѣленности.

Общій методъ.

290. Начало. *Пусть дана система p уравненій первой степени съ p неизвѣстными:*

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0,\ .\ .\ .\ K=0,\ L=0\ .\ .\ .\ (1)$$

если m_1, n_1, m_2, n_2, ... m_{p-1}, n_{p-1} суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то система p уравненій

$$\left.\begin{array}{r} A=0, \\ m_1A+n_1B=0, \\ m_2A+n_2C=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{p-1}A+n_{p-1}L=0 \end{array}\right\}\ (2)$$

эквивалентна данной.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) рѣшенія системы (1), какъ обращающія въ нули выраженія A, B, C, . . . , K, L, обращаютъ въ нули и произведенія m_1A, n_1B, m_2A, n_2C, ... , $m_{p-1}A$, $n_{p-1}L$, такъ какъ количества m_1, n_1, . . . конечны; слѣд. эти рѣшенія удовлетворяютъ системѣ (2).

2) Рѣшенія системы (2), обращая въ нуль A и (m_1A+n_1B), обращаютъ въ нуль и B, такъ какъ m_1 конечно, и n_1 отлично отъ нуля; такимъ же образомъ они обратятъ въ нуль и C, D, . . . L; слѣд. эти рѣшенія удовлетворяютъ системѣ (1).

291. Методъ. Количества m_1, n_1, ... m_{p-1}, n_{p-1} выбираютъ такимъ образомъ, чтобы исключить одно и то же неизвѣстное изъ $(p-1)$ уравненій, напр. изъ послѣднихъ; такимъ образомъ данная система (1) замѣняется новою:

$$A=0,\ B_1=0,\ C_1=0,\ D_1=0,\ .\ .\ .\ .\ ,\ K_1=0,\ L_1=0\ .\ .\ .\ (3)$$

эквивалентною съ (1); но въ ней ур. $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя, а остальныя $p-1$ уравненій содержатъ только $p-1$ одинаковыхъ неизвѣстныхъ.

Подобнымъ же образомъ систему (3) замѣняютъ системою

$$A=0,\ B_1=0,\ C_2=0,\ D_2=0,\ .\ .\ .\ .\ K_2=0,\ L_2=0\ .\ .\ .\ (4)$$

эквивалентною съ (3), а слѣд. и съ (1); но въ этой новой системѣ уравненіе $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя, $B_1=0$ только $p-1$ неизвѣстныхъ, а остальныя уравненія содержатъ однѣ и тѣ же неизвѣстныя въ числѣ $p-2$.

Продолжая такимъ же образомъ, достигнемъ наконецъ того, что данная система будетъ замѣнена новою, ей эквивалентною системою

$$A=0,\ B_1=0,\ C_2=0,\ D_3=0,\ .\ .\ .\ .\ ,\ H_{p-3}=0,\ K_{p-2}=0,\ L_{p-1}=0,$$

въ которой уравненіе $L_{p-1}=0$ содержитъ только одно неизвѣстное, $K_{p-2}=0$ содержитъ это же самое неизвѣстное и еще одно, $H_{p-3}=0$ содержитъ эти два неизвѣстныя и новое, и т. д., наконецъ ур. $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя.

Рѣшивъ ур. $L_{p-1}=0$, опредѣлимъ то неизвѣстное, которое въ немъ содержится. Внеся его величину въ ур. $K_{p-2}=0$, найдемъ изъ него еще одно неизвѣстное. Внеся величины этихъ двухъ неизвѣстныхъ въ ур. $H_{p-3}=0$, найдемъ третье неизвѣстное, и т. д. Всѣ неизвѣстныя будутъ послѣдовательно найдены.

Примѣръ. Рѣшить уравненія

$$\left.\begin{array}{lr}
1) & 3x-4y+3z+3v-6u=11\\
2) & 3x-5y+2z\qquad-4u=11\\
3) & 10y-3z-2v+3u=\ \ 2\\
4) & -2x\qquad+5z+2v+4u=\ \ 3\\
5) & 4x-2y\qquad-3v+6u=\ \ 6
\end{array}\right\}\ \mathrm{I.}$$

Исключаемъ изъ данныхъ уравненій неизвѣстное x; для этого комбинируемъ ур. (1) съ каждымъ изъ остальныхъ, за исключеніемъ (3), которое уже не содержитъ x. Вычтя (2) изъ (1), находимъ:

$$y+z+3v-2u=0.$$

Помноживъ (1) на 2, а (4) на 3, и сложивъ ихъ, имѣемъ

$$-8y+21z+12v=31.$$

Наконецъ, умноживъ (1) на 4, а (5) на -3, и сложивъ, получимъ:

$$-10y+12z-42u+21v=26.$$

Такимъ образомъ, на основаніи общаго начала, замѣняемъ данную систему ей эквивалентною:

$$\left.\begin{array}{lr}
1) & 3x-4y+3z+3v-6u=11\\
2) & y+z+3v-2u=\ \ 0\\
3) & -8y+21z+12v\qquad=31\\
4) & -10y+12z+21v-42u=26\\
5) & 10y-3z-2v+3u=\ \ 2
\end{array}\right\}\ \mathrm{II.}$$

Исключаемъ теперь y изъ (2) уравненія системы II и каждаго за нимъ слѣдующаго: для этого множимъ ур. (2) на 8 и складываемъ съ (3); затѣмъ множимъ (2) на 10 и складываемъ съ (4); наконецъ, помноживъ (2) на 10, вычитаемъ изъ него (5). Такимъ образомъ найдемъ систему III, эквивалентную II а слѣдовательно и предложенной:

$$\left.\begin{array}{r}
3x-4y+3z+3v-6u=11\\
y+z+3v-2u=0\\
29z+36v-16u=31\\
22z+51v-62u=26\\
13z+32v-23u=-2
\end{array}\right\}\ \text{III}.$$

Исключая z изъ трехъ послѣднихъ уравненій, найдемъ:

$$\left.\begin{array}{r}
3x-4y+3z+3v-6u=11\\
y+z+3v-2u=0\\
13z+32v-23u=-2\\
-460v+459u=461\\
41v+300u=-382
\end{array}\right\}\ \text{IV}.$$

систему, эквивалентную данной.

Исключая наконецъ u изъ послѣднихъ двухъ уравненій системы IV, находимъ эквивалентную ей систему:

$$\left.\begin{array}{lr}
1) & 3x-4y+3z+3v-6u=11\\
2) & y+z+3v-2u=0\\
3) & 13z+32v-23u=-2\\
4) & +41v+300u=-382\\
5) & 156819v=-313638
\end{array}\right\}\ \text{V}.$$

Послѣднее ур. этой системы прямо дастъ: $v=-2$. Подставляя вмѣсто v число -2 въ ур. (4), находимъ: $u=1$. Подставляя найденныя для u и v величины въ ур. (3), находимъ: $z=3$. Наконецъ, изъ втораго и перваго ур. получаемъ: $y=1$ и $x=2$.

Методъ Безу, измѣненный Жергонномъ.

292. Начало. *Если* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ *суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то уравненіе*

$$\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots+\lambda L=0$$

можетъ замѣнить одно изъ n *уравненій системы*

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ \ldots,\ L=0,$$

т.-е. системы

$$\left.\begin{array}{r}
A=0\\
B=0\\
\\
\\
.\\
.\\
L=0
\end{array}\right\}\ \text{I}\quad \textit{и}\quad
\left.\begin{array}{r}
\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots+\lambda L=0\\
B=0\\
C=0\\
.\\
.\\
.\\
L=0
\end{array}\right\}\ \text{II}$$

эквивалентны.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) всякое рѣшенiе системы I удовлетворяетъ уравненiямъ системы II, такъ какъ B, C, . . . , L, а также и сумма $\alpha A+\beta B+\ldots+\lambda L$ обращаются въ нули; 2) обратно, всякое рѣшенiе системы II, обращая въ нуль выраженiя B, C, . . . L, удовлетворяетъ всѣмъ уравненiямъ системы I, кромѣ ур—нiя $A=0$: а обращая въ нуль, вмѣстѣ съ выраженiями B, C, . . . , L, также и выраженiе $\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots+\lambda L$, приводитъ первое ур. системы II къ виду $\alpha A=0$, откуда и $A=0$, ибо α отлично отъ нуля.

293. Примѣняя это начало, Безу употреблялъ столько неопредѣленныхъ множителей, сколько неизвѣстныхъ безъ одного: так. обр. для рѣшенiя n уравненiй съ n неизвѣстными онъ бралъ $n-1$ множитель (такъ, въ случаѣ двухъ ур—нiй вводилъ 1 множитель, въ случаѣ трехъ ур—нiй — 2 множителя и т. д.). *Жергоннъ* вводитъ столько множителей, сколько неизвѣстныхъ. При этомъ, вычисленiя остаются такiя же какъ и у Безу; но, приравнивая нулю $n-1$ коэффицiентъ, получаемъ $n-1$ ур—нiй, которыя служатъ для опредѣленiя уже не самихъ множителей, а ***отношенiй*** $n-1$ множителей къ какому-либо одному изъ нихъ.

Въ этомъ Жергонновскомъ варiантѣ способа Безу вычисленiя симметричнѣе; кромѣ того, пользуясь этимъ методомъ, легко избѣгаемъ такихъ случаевъ, когда способъ Безу оказывается непримѣнимымъ. Вотъ примѣры.

Примѣръ I. Рѣшить систему

$$\begin{aligned}2x+3y-z&=9\\4x+6y-3z&=14\\5x-2y+2z&=12.\end{aligned}$$

Попробуемъ сперва примѣнить методъ Безу. Помноживъ 1-е ур. на λ, 2-е на μ, сложимъ ихъ съ 3-мъ; получимъ

$$(2\lambda+4\mu+5)x+(3\lambda+6\mu-2)y-(\lambda+3\mu-2)z=9\lambda+14\mu+12.$$

Приравнивая нулю коэффицiенты при x и y, имѣемъ

$$(1)\ 2\lambda+4\mu+5=0,\ (2)\ 3\lambda+6\mu-2=0,\ \text{и}\ (3)\ z=\frac{9\lambda+14\mu+12}{-\lambda-3\mu+2}.$$

Для опредѣленiя λ и μ, рѣшаемъ ур—нiя (1) и (2), и для этого уравниваемъ коэф—ты при λ; так. обр. найдемъ

$$6\lambda+12\mu=-15\quad\text{и}\quad 6\lambda+12\mu=4,$$

а это система несовмѣстная, ибо первыя части равны, а вторыя различны. И однако, данныя ур—нiя представляютъ систему совмѣстныхъ уравненiй.

Примѣнимъ теперь способъ Жергонна, умноживъ и 3-е ур—нiе на ν; найдемъ:

$$(3)\ 2\lambda+4\mu+5\nu=0,\quad (4)\ 3\lambda+6\mu-2\nu=0\quad\text{и}\quad(5)\ z=\frac{9\lambda+14\mu-12\nu}{-\lambda-3\mu+2\nu}.$$

Изъ ур—нiй (3) и (4) найдемъ отношенiя $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$; имѣемъ

$$4\frac{\mu}{\lambda}+5\frac{\nu}{\lambda}=-2,\ 6\frac{\mu}{\lambda}-2\frac{\nu}{\lambda}=-3,\ \text{откуда}\ \frac{\mu}{\lambda}=-\frac{1}{2}\ \text{и}\ \frac{\nu}{\lambda}=0,$$

и слѣдовательно

$$z=\frac{9+14\frac{\mu}{\lambda}-12\frac{\nu}{\lambda}}{-1-3\frac{\mu}{\lambda}+2\frac{\nu}{\lambda}}=\frac{9-7}{-1+\frac{3}{2}}=4.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ: $x=2$, $y=3$.

Здѣсь, какъ легко видѣть, способъ Жергонна сводится къ перестановкѣ множителей Безу въ другія строки; но какъ вначалѣ нельзя предвидѣть невозможности, которая обнаруживается вычисленіями лишь впослѣдствіи, то понятно, что пользованіе варіантомъ Жергонна имѣетъ преимущества. Въ самомъ дѣлѣ, легче перемѣнить множителя, по отношенію къ которому ищемъ отношенія другихъ множителей, нежели, слѣдуя методѣ Безу, начинать съизнова всѣ вычисленія.

Примѣръ II. Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4u&=27 \quad (1)\\ 3x+5y+7z+u&=48 \quad (2)\\ 5x+8y+10z-2u&=65 \quad (3)\\ 7x+6y+5z+4u&=53 \quad (4). \end{aligned}$$

Помноживъ первое ур. на m, второе на n, третье на p, четвертое на q и сложивъ ихъ, найдемъ:

$$(m+3n+5p+7q)x+(2m+5n+8p\ \ 6q)y+(3m+7n+10p+5q)z+$$
$$(4m+n-2p+4q)u=27m+48n+65p+53q\ .\ .\ .\ (5).$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x, y и z, находимъ первую вспомогательную систему уравненій:

$$(6)\qquad \begin{aligned} m+3n+5p+7q&=0\\ 2m+5n+8p+6q&=0\\ 3m+7n+10p+5q&=0 \end{aligned}$$

$$\text{и}\quad (7)\qquad u=\frac{27m+48n+65p+53q}{4m+n-2p+4q}.$$

Опредѣлимъ отношенія m, p и q къ n. Система (6) дастъ:

$$\frac{m}{n}=-\frac{17}{8},\ \frac{p}{n}=0,\ \ \frac{q}{n}=-\frac{1}{8}.$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе (7), получимъ: $u=2$.

Подставивъ найденную для u величину въ первыя три изъ данныхъ уравненій, найдемъ систему уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=19 \quad (8)\\ 3x+5y+7z&=46 \quad (9)\\ 5x+8y+10z&=69 \quad (10). \end{aligned}$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на r, второе на s, третье на t и сложивъ ихъ, имѣемъ:

$$(r+3s+5t)x+(2r+5s+8t)y+(3r+7s+10t)z=19r+46s+69t\ .\ .\ .\ (11).$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x и y, получаемъ другую вспомогательную систему уравненій:

$$(12)\quad \begin{aligned} r+3s+5t&=0\\ 2r+5s+8t&=0 \end{aligned}$$

$$\text{и}\quad z=\frac{19r+46s+69t}{3r+7s+10t}\quad (13).$$

Опредѣляя изъ системы (12) отношенія $\frac{r}{t}$ и $\frac{s}{t}$, находимъ: $\frac{r}{t}=1$, $\frac{s}{t}=-2$.

Подставляя эти значенія $\frac{r}{t}$ и $\frac{s}{t}$ въ формулу для z, находимъ: $z=4$.

Подставивъ найденную для z величину въ ур—нія (8) и (9), имѣемъ

$$\begin{aligned} x+2y&=\ 7\ .\ .\ .\ (14)\\ 3x+5y&=18\ .\ .\ .\ (15). \end{aligned}$$

Умноживъ (14) на u, (15) на v и сложивъ ихъ, имѣемъ

$$(u+3v)x+(2u+5v)y=7u+18v.$$

Положивъ $u+3v=0$, откуда $\frac{u}{v}=-3$, и подставивъ это значеніе $\frac{u}{v}$ въ

ур—ніе $y=\dfrac{7\cdot\frac{u}{v}+18}{2\cdot\frac{u}{v}+5}$, найдемъ: $y=3$.

Подставивъ 3 вмѣсто y въ уравненіе (14), найдемъ: $x=1$.

294 Случаи упрощенія. Изъ предыдущаго видно, что процессъ рѣшенія системы уравненій вообще довольно сложенъ, особенно если число неизвѣстныхъ велико. Но иногда его можно упростить; случаи для упрощенія представляются тогда, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе, или же когда уравненія представляютъ нѣкоторую симметрію по отношенію къ неизвѣстнымъ.

Когда не всѣ уравненія содержатъ всѣ неизвѣстныя, тогда начинаютъ съ исключенія того неизвѣстнаго, которое входитъ въ наименьшее число уравненій, и тѣ уравненія, въ которыя это неизвѣстное не входитъ, можно считать результатами его исключенія.

Примѣръ I. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & & -5z & +4u & =\ 7\\ & -y & +6z & -3u & =\ 3\\ -7x & +4y & & & =10\\ -5x & & +6z & & =20. \end{array}$$

Исключая u, которое входитъ только въ первыя два уравненія, получаемъ ур—ніе

$$6x-4y+9z=33,$$

которое вмѣстѣ съ уравненіями

$$\begin{array}{rcl} -y+6z-3u &=& 3 \\ 7x+4y &=& 10 \\ -5x+6z &=& 20 \end{array}$$

составляетъ систему, эквивалентную данной.

Исключая во второй системѣ y изъ перваго и третьяго уравненій, получаемъ систему

$$\begin{array}{rcl} -y+6z-3u &=& 3 \\ -x+9z &=& 43 \\ -7x+4y &=& 10 \\ -5x+6z &=& 20 \end{array}$$

эквивалентную второй, а слѣд. и данной.

Исключая въ ней x изъ втораго и четвертаго уравненій, находимъ эквивалентную данной систему:

$$\begin{array}{rcl} -y+6z-3u &=& 3 \\ -7x+4y &=& 10 \\ -x+9z &=& 43 \\ 39z &=& 195. \end{array}$$

Изъ послѣдняго уравненія находимъ: $z = 5$. Вставивъ вмѣсто z его величину въ третье уравненіе, найдемъ: $x = 2$; затѣмъ изъ втораго урав. получимъ: $y = 6$; наконецъ, изъ перваго: $u = 7$.

Примѣръ II. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{array}{rcl} x+2y &=& 5. \\ y+3z &=& 11. \\ z+4u &=& 19. \\ u+5t &=& 29 \\ t+6x &=& 11. \end{array}$$

Выражая изъ пятаго уравненія t черезъ x, имѣемъ: $t = 11 - 6x$. Вставляя вмѣсто t его величину въ четвертое ур., получимъ: $u = 29 - 5(11 - 6x) = -26 + 30x$. Вставляя вмѣсто u полученную величину въ третье ур., найдемъ: $z = 123 - 120x$. Подобнымъ же образомъ, изъ второго ур. имѣемъ: $y = -358 + 360x$ Вставивъ вмѣсто y найденное выраженіе въ 1-е ур., найдемъ изъ него: $x = 1$. Всѣ остальныя неизвѣстныя выражены черезъ x, а потому ихъ легко теперь вычислить. Найдемъ: $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$ и $t = 5$.

Примѣръ III. Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z+u &=& a \\ y+z+u+t &=& b \\ z+u+t+x &=& c \\ u+t+x+y &=& d \\ t+x+y+z &=& e. \end{array}$$

Въ этой системѣ неизвѣстныя входятъ симметрично — каждое одинаковое число разъ; это обстоятельство позволяетъ найти сумму всѣхъ неизвѣстныхъ: для этого стоитъ только сложить всѣ уравненія и результатъ раздѣлить на 4. Такимъ образомъ получимъ

$$x + y + z + t + u = \frac{a + b + c + d + e}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Такъ какъ въ каждое уравненіе не входитъ по одному только неизвѣстному, то, вычитая изъ уравненія (1) послѣдовательно каждое изъ данныхъ, опредѣлимъ всѣ неизвѣстныя. Получимъ:

$$t = \frac{b + c + d + e - 3a}{4},$$

$$x = \frac{a + c + d + e - 3b}{4},$$

$$y = \frac{a + b + d + e - 3c}{4},$$

$$z = \frac{a + b + c + e - 3d}{4},$$

$$u = \frac{a + b + c + d - 3e}{4}.$$

Здѣсь сумма всѣхъ неизвѣстныхъ, съ опредѣленія которой мы начали, представляла *вспомогательное неизвѣстное*, позволившее скорѣе опредѣлить каждое неизвѣстное въ отдѣльности. Вотъ еще примѣры употребленія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.

Примѣръ IV. Рѣшить систему уравненій

$$\frac{a}{x + y} + \frac{b}{x - y} = c$$

$$\frac{d}{x + y} + \frac{e}{x - y} = f.$$

Освобождая уравненія отъ дробей, мы нашли бы уравненія, въ которыхъ нѣкоторые члены содержали бы вторыя степени неизвѣстныхъ; но легко избѣжать полученія уравненій второй степени, введя вспомогательныя неизвѣстныя, а именно полагая:

$$\frac{1}{x + y} = u, \quad \frac{1}{x - y} = v.$$

Данныя уравненія примутъ видъ:

$$au + bv = c, \qquad du + ev = f.$$

Рѣшая ихъ, найдемъ:

$$u = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad \text{и} \quad v = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Подставивъ вмѣсто u и v ихъ выраженія черезъ x и y, найдемъ

$$\frac{1}{x+y}=\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x-y}=\frac{af-cd}{ae-bd},$$

откуда

$$x+y=\frac{ae-bd}{ce-bf} \quad \text{и} \quad x-y=\frac{ae-bd}{af-cd}.$$

Сначала складывая, а потомъ вычитая эти ур-нія, найдемъ:

$$x=\frac{1}{2}\left\{\frac{ae-bd}{ce-bf}+\frac{ae-bd}{af-cd}\right\} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2}\left\{\frac{ae-bd}{ce-bf}-\frac{ae-bd}{af-cd}\right\}.$$

Примѣръ V. Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} ax+m(y+z+u)&=\alpha\\ by+m(z+u+x)&=\beta\\ cz+m(u+x+y)&=\gamma\\ du+m(x+y+z)&=\delta. \end{aligned}$$

Введемъ вспомогательное неизвѣстное, положивъ: $x+y+z+u=S$; данныя уравненія примутъ видъ:

$$\begin{aligned} ax+m(S-x)&=\alpha\\ by+m(S-y)&=\beta\\ cz+m(S-z)&=\gamma\\ du+m(S-u)&=\delta. \end{aligned}$$

Выводя изъ перваго ур-нія x, изъ второго y и т. д., найдемъ:

$$x=\frac{\alpha-mS}{a-m},\quad y=\frac{\beta-mS}{b-m},\quad z=\frac{\gamma-mS}{c-m},\quad u=\frac{\delta-mS}{d-m}, \quad \ldots (1).$$

Складывая почленно эти уравненія и замѣчая, что въ первой части получается $x+y+z+u$ или S, найдемъ:

$$S=\frac{\alpha-mS}{a-m}+\frac{\beta-mS}{b-m}+\frac{\gamma-mS}{c-m}+\frac{\delta-mS}{d-m}.$$

Изъ этого уравненія, первой степени относительно S, найдемъ это вспомогательное неизвѣстное; зная его, изъ уравненій (1) найдемъ x, y, z и u.

Приведемъ еще примѣры искусственныхъ пріемовъ, облегчающихъ рѣшеніе уравненій.

Примѣръ VI. Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c};\quad \frac{xz}{az+cx}=\frac{1}{b};\quad \frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}.$$

Обращая дроби, найдемъ:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c;\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=b,\quad \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=a.$$

Складывая эти уравненія и обозначая, для краткости, сумму $a+b+c$ черезъ 2S, находимъ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=S.$$

Вычитая отсюда поочередно каждое изъ предыдущихъ уравненій, находимъ:

$$\frac{c}{z}=S-c;\quad \frac{b}{y}=S-b;\quad \frac{a}{x}=S-a;$$

откуда

$$x=\frac{a}{S-a},\quad y=\frac{b}{S-b},\quad z=\frac{c}{S-c}.$$

Примѣръ VII. Рѣшить систему уравненій:

$$z+ay+a^2x+a^3=0,$$
$$z+by+b^2x+b^3=0,$$
$$z+cy+c^2x+c^3=0.$$

Можно было бы рѣшить эти уравненія способомъ исключенія черезъ сложеніе и вычитаніе, но проще употребить слѣдующій искусственный пріемъ, предложенный *Lamé* (1795—1870). Данныя уравненія выражаютъ, что полиномъ

$$X^3+xX^2+yX+z$$

обращается въ нуль, если подставимъ вмѣсто X количества a, b и c; слѣд. онъ дѣлится на произведеніе $(X-a)(X-b)(X-c)$, причемъ частное равно 1, такъ какъ первый членъ дѣлителя есть X^3. Итакъ, имѣемъ тождество:

$$X^3+xX^2+yX+z=(X-a)(X-b)(X-c),$$

или, по раскрытіи произведенія:

$$X^3+xX^2+yX+z=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc,$$

откуда, приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ X, находимъ:

$$x=-(a+b+c);\quad y=ab+ac+bc;\quad z=-abc.$$

295. О системахъ уравненій, въ которыхъ число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій. Когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, то система имѣетъ, вообще, одно опредѣленное рѣшеніе. Разсмотримъ теперь случаи, когда число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій.

296. Теорема. *Система уравненій, которыхъ число меньше числа неизвѣстныхъ, неопредѣленна.*

Пусть имѣемъ m уравненій, содержащихъ $m+p$ неизвѣстныхъ. Можно дать произвольныя значенія p неизвѣстнымъ; тогда получится система m уравненій, изъ которой опредѣлятся остальныя m неизвѣстныхъ. Слѣд., система имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, что выражаютъ однимъ словомъ, говоря, что система *неопредѣленна*.

297. Теорема. *Система уравненій, число которыхъ больше числа неизвѣстныхъ, вообще невозможна.*

Пусть число уравненій превышаетъ число неизвѣстныхъ; пусть, напр., имѣемъ $m+p$ уравненій съ m неизвѣстными. Взявъ m изъ числа данныхъ уравненій, въ которыя входили бы m неизвѣстныхъ, и рѣшивъ ихъ, опредѣлимъ эти m неизвѣстныхъ. Если окажется, что найденныя величины удовлетворяютъ и остальнымъ p уравненіямъ, то заключаемъ, что система имѣетъ одно опредѣленное рѣшеніе. Если же окажется, что значенія, найденныя для m неизвѣстныхъ, не удовлетворяютъ остальнымъ p уравненіямъ, это будетъ значить, что система не имѣетъ рѣшеній; въ такомъ случаѣ говорятъ, что она *невозможна,* или что уравненія *несовмѣстны.*

Примѣръ I. Рѣшить систему трехъ уравненій съ двумя неизвѣстными:

$$3x+2y-5=0$$
$$7x-3y+2=0$$
$$-x+7y-12=0.$$

Рѣшаемъ послѣднія два уравненія и находимъ, что имъ удовлетворяютъ: $x = \frac{11}{23}$ и $y = \frac{41}{23}$. Вставивъ эти величины въ первое уравненіе, замѣчаемъ, что оно обращается въ тождество. Слѣд. система возможна и имѣетъ рѣшеніе: $x = \frac{11}{23}$, $y = \frac{41}{23}$.

Примѣръ II. Рѣшить систему

$$6x+7y=46$$
$$5x+3y=27$$
$$x+2y=14.$$

Первыя два уравненія имѣютъ рѣшеніе: $x=3$, $y=4$. Но эти значенія не удовлетворяютъ третьему уравненію, слѣд. предложенная система несовмѣстна.

Когда число уравненій превышаетъ число неизвѣстныхъ, и ур—нія имѣютъ буквенные коэффиціенты, то можно предложить себѣ вопросъ: при какой зависимости между коэффиціентами найденныя для m неизвѣстныхъ величины будутъ удовлетворять и остальнымъ p уравненіямъ? Эти p условій обыкновенно называютъ ***условными уравненіями.***

Примѣры: I. $6x+7y=46$, $5x+3y=27$, $ax+2y=14$.

Первыя два уравненія удовлетворяются при $x=3$ и $y=4$.

Для того чтобы всѣ три уравненія были совмѣстны, необходимо, чтобы тѣ же значенія x и y удовлетворяли и третьему уравненію, т.-е. чтобы существовало тождество

$$3a+8=14, \quad \text{откуда} \quad a=2.$$

Итакъ, система совмѣстна при $a=2$.

II. $ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$; $a''x+b''y+c'=0$.

Рѣшая первыя два уравненія, найдемъ:

$$x = \frac{bc - cb'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Для того чтобы система была совмѣстна, необходимо, чтобы тѣ же рѣшенія обращали въ тождество и третье уравненіе, т.-е. чтобы (по освобожденіи отъ знаменателя)

$$a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba') = 0,$$

или

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0.$$

Легко видѣть, что первая часть этого условія есть ничто иное какъ знаменатель значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ тремъ уравненіямъ съ 3 неизвѣстными въ общемъ видѣ.

III. Пусть даны шесть уравненій съ 3 неизвѣстными:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ 3x - y + 2z &= 10 \\ 2x + 7y - 3z &= 8 \\ ax - by + cz &= 20 \\ ax + by + cz &= 44 \\ 10ax + 3by - cz &= 26 \end{aligned}$$

и требуется опредѣлить, при какихъ значеніяхъ коэффиціентовъ a, b и c эти шесть уравненій будутъ удовлетворены одними и тѣми же значеніями неизвѣстныхъ.

Рѣшивъ первыя три уравненія, не содержащія a, b и c, найдемъ: $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. Эти величины должны удовлетворять тремъ послѣднимъ уравненіямъ, т.-е. должны существовать равенства

$$\begin{aligned} a - 3b + 5c &= 20 \\ a + 3b + 5c &= 44 \\ 10a + 9b - 5c &= 26. \end{aligned}$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно a, b и c, находимъ, что они удовлетворяются при $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$; при этихъ значеніяхъ коэффиціентовъ шесть предложенныхъ уравненій совмѣстны.

ГЛАВА XXII.

Составленіе уравненій со многими неизвѣстными.

298 Когда задача требуетъ нахожденія нѣсколькихъ неизвѣстныхъ, то для рѣшенія ея нужно имѣть столько различныхъ условій, сколько есть неизвѣстныхъ. Обозначая каждое неизвѣстное особою буквою, и выражая каждое изъ условій особымъ уравненіемъ, мы получимъ систему опредѣленныхъ уравненій, рѣшивъ которую и найдемъ искомыя неизвѣстныя.

Когда въ подобныхъ задачахъ встрѣчается нѣсколько неизвѣстныхъ, то при составленіи уравненій можно поступать двоякимъ образомъ: или можно привести задачу къ составленію одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, выражая всѣ неизвѣстныя черезъ одно, или къ нѣсколькимъ уравненіямъ, если каждое неизвѣстное обозначить особою буквою. Выражая всѣ неизвѣстныя черезъ одно, мы въ сущности дѣлаемъ въ умѣ исключеніе нѣсколькихъ неизвѣстныхъ; но этотъ пріемъ, сокращая вычисленія, усложняетъ и затрудняетъ составленіе уравненія. Въ виду этого, за исключеніемъ самыхъ простыхъ вопросовъ, слѣдуетъ каждое изъ неизвѣстныхъ обозначать особою буквою и каждое условіе выражать отдѣльнымъ уравненіемъ. Приводимъ примѣры.

Примѣръ I. *Изъ трехъ слитковъ, сплавленныхъ изъ золота, серебра и мѣди:*

первый содержитъ 50 гр. золота, 60 гр. серебра и 80 гр. мѣди;
второй » 30 » » 50 » » 70 » »
третій » 35 » » 65 » » 90 » »

По сколько нужно взять отъ каждаго слитка, чтобы составить четвертый, который содержалъ бы 79 гр. золота, 118 гр. серебра и 162 гр. мѣди?

Пусть отъ перваго слитка нужно взять x гр., отъ второго y, а отъ третьяго z.

Первый слитокъ, согласно первому условію, содержитъ всего 50 + 60 + 80 или 190 гр. На эти 190 граммовъ приходится 50 гр. золота, слѣд. на 1 гр. сплава приходится $\frac{50}{190}$ или $\frac{5}{19}$ грамма золота, а стало быть въ x граммахъ, взятыхъ отъ перваго слитка, содержится $\frac{5}{19}x$ гр. золота. На тѣ же 190 гр. слитка приходится 60 гр. серебра, слѣдов. на 1 гр. слитка приходится $\frac{60}{190}$ или $\frac{6}{19}$ грамма серебра, а въ x граммахъ этого слитка содержится $\frac{6}{19}x$ гр. серебра. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что въ x гр., взятыхъ отъ перваго слитка, мѣди содержится $\frac{8}{19}x$ граммовъ.

По второму условію, второй слитокъ содержитъ 150 граммовъ, въ томъ числѣ 30 гр. золота, 50 гр. серебра и 70 мѣди. Разсужденія, подобныя вышеприведеннымъ, покажутъ, что въ y граммахъ, взятыхъ отъ этого слитка, содержится

$$\frac{3}{15}y \text{ гр. золота, } \frac{5}{15}y \text{ гр. серебра и } \frac{7}{15}y \text{ гр. мѣди.}$$

Наконецъ, согласно третьему условію, третій слитокъ содержитъ 190 гр., изъ которыхъ: 35 гр. золота, 65 гр. серебра и 90—мѣди; слѣд., въ z граммахъ, взятыхъ отъ этого слитка, содержится

$$\frac{35}{190}z \text{ гр. золота, } \frac{65}{190}z \text{ гр. серебра, } \frac{90}{190}z \text{ гр. мѣди.}$$

Все количество золота, входящаго въ составъ четвертаго слитка, выражается формулою

$$\frac{5}{19}x+\frac{3}{15}y+\frac{35}{190}z \text{ гр.};$$

полное количество серебра—формулою

$$\frac{6}{19}x + \frac{5}{15}y + \frac{65}{190}z \text{ гр.};$$

а количество мѣди равно

$$\frac{8}{19}x + \frac{7}{15}y + \frac{9}{19}z \text{ гр.}$$

Но по условію, четвертый слитокъ долженъ содержать 79 гр. золота, 118 — серебра и 162 мѣди; такимъ образомъ имѣемъ три уравненія:

$$\frac{5}{19}x + \frac{3}{15}y + \frac{35}{190}z = 79,$$

$$\frac{6}{19}x + \frac{5}{15}y + \frac{65}{190}z = 118,$$

$$\frac{8}{19}x + \frac{7}{15}y + \frac{9}{19}z = 162.$$

или, по освобожденіи отъ дробей:

$$50x + 38y + 35z = 15010,$$
$$36x + 38y + 39z = 13452,$$
$$120x + 133y + 135z = 46170.$$

Исключивъ изъ первыхъ двухъ уравненій y, получимъ ур.:

$$7x - 2z = 779,$$

а исключивъ y изъ второго и третьяго:

$$4x + z = 608.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ

$$x = 133, \quad z = 76 \text{ гр.}$$

Подставивъ эти величины въ первое уравненіе, получимъ:

$$y = 150 \text{ гр.}$$

Примѣръ II. *Въ бассейнъ проведены три трубы:*

1-я и 2-я, будучи открыты вмѣстѣ, наполняютъ бассейнъ въ 12 час.;
2-я и 3-я, » » » » » *20* »
3-я и 1-я, » » » » » *15* »

Во сколько часовъ всѣ три трубы, открытыя одновременно, наполнятъ бассейнъ?

Пусть первая труба, будучи открыта одна, наполняетъ бассейнъ въ x часовъ; вторая, дѣйствуя также отдѣльно, наполняетъ бассейнъ въ y час., а третья въ z часовъ. Въ такомъ случаѣ

1-я труба въ 1 ч. наполнитъ $\frac{1}{x}$ часть бассейна;

2-я » » » $\frac{1}{y}$ » »

3-я » » » $\frac{1}{z}$ » »

слѣдовательно, всѣ три трубы, дѣйствуя вмѣстѣ, наполнятъ въ 1 часъ часть бассейна, равную

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z};$$

а потому весь бассейнъ наполнится во столько часовъ, сколько разъ дробь $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ заключается въ объемѣ цѣлаго бассейна, т.-е. въ 1. Итакъ, время, необходимое для наполненія бассейна тремя трубами, выражается формулою:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}};$$

это и есть искомое задачи.

Для его опредѣленія мы изъ условій задачи имѣемъ три уравненія

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}.$$

Складывая ихъ, находимъ:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15}$$

откуда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$$

а потому

$$1:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=10.$$

Для наполненія бассейна нужно 10 часовъ, что нетрудно провѣрить.

Примѣръ III. *Опредѣлить время изобрѣтенія Гуттенбергомъ книгопечатанія на основаніи слѣдующихъ данныхъ: 1) цифра десятковъ года, въ который совершилось это событіе, вдвое меньше цифры единицъ; 2) цифра тысячъ равна разности между цифрою сотенъ и циф-*

рою десятковъ; 3) сумма всѣхъ четырехъ цифръ искомаго числа равна 14; 4) если увеличить искомое число на 4905, то получится число обращенное.

Обозначимъ, по порядку, цифры единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ буквами x, y, z, t. Первыя три условія прямо даютъ слѣдующія уравненія:

$$2y = x\ .\ .\ .\ (1)$$

$$t = z - y\ .\ .\ .\ (2)$$

$$x + y + z + t = 14\ .\ .\ .\ (3)$$

Искомое число изображается формулою: $x + 10y + 100z + 1000t$; обращенное число — формулою $1000x + 100y + 10z + t$. Четвертое условіе выражается уравненіемъ

$$x + 10y + 100z + 1000t + 4905 = 1000x + 100y + 10z + t,$$

или, короче:

$$111x + 10y - 10z - 111t = 545\ .\ .\ .\ (4).$$

Вычтя (2) изъ (3), находимъ

$$x + y + z = 14 - z + y,$$

откуда

$$x = 14 - 2z.$$

Въ такомъ случаѣ ур. (1) дастъ

$$2y = x = 14 - 2z,$$

откуда

$$y = 7 - z;$$

а слѣдов.

$$t = z - y = 2z - 7.$$

Подставивъ въ ур. (4) вмѣсто x, y и t ихъ выраженія черезъ z, находимъ:

$$111(14 - 2z) + 10(7 - z) - 10z - 111(2z - 7) = 545,$$

откуда

$$z = 4;$$

а потому: $x = 6$, $y = 3$, $t = 1$. Итакъ, книгопечатаніе изобрѣтено было въ **1436** году.

Примѣръ IV. *Два свѣчныхъ завода конкуррирують другъ съ другомъ. Второй открытъ 40 днями позже перваго, и на немъ работаетъ 70 человѣкъ по 12 часовъ въ день, между тѣмъ какъ на первомъ только 60 рабочихъ, занятыхъ по 10 часовъ въ день. Черезъ сколько дней оба завода приготовятъ одинаковое число свѣчей, полагая, что каждый рабочій на той и другой фабрикѣ изготовляетъ одинаковое число свѣчей въ часъ?*

Пусть искомое число дней, считая со времени открытія перваго завода, будетъ x; пусть, кромѣ того, каждый рабочій изготовляетъ въ часъ y свѣчей. 60 рабочихъ перваго завода, работая по 10 часовъ въ день, изготовятъ въ x дней $y.10.x.60$ свѣчей; 70 рабочихъ второго завода, работая по 12 часовъ въ день, изготовятъ въ $x - 40$ дней $y.12.(x - 40).70$ свѣчей. По условію, оба числа свѣчей равны, слѣд. получается уравненіе съ двумя неизвѣстными:

$$y.10.x.60 = y.12.(x - 40).70.$$

Обѣ части уравненія дѣлятся на произведеніе $y.10.12$; это дѣленіе позволительно, такъ какъ y, по смыслу задачи, отлично отъ нуля. Сокративъ, найдемъ

$$5x = 7(x - 40),$$

откуда

$$x = 140.$$

Примѣчаніе. Для составленія уравненія пришлось ввести *вспомогательное неизвѣстное* y, котораго величина остается неопредѣленною.

Приводимъ еще одну задачу, въ которой составленіе уравненій требуетъ введенія двухъ *вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*; это — исторически извѣстная задача Ньютона.

Примѣръ V. **Задача Ньютона.** *Площади трехъ луговъ равны соотвѣтственно: $3\frac{1}{3}$ десятинамъ, 10 и 24 десятинамъ; причемъ на всѣхъ трехъ лугахъ трава имѣетъ одинаковую высоту и растетъ равномѣрно съ одинаковою быстротою. Первый лугъ прокормилъ 12 быковъ въ продолженіе четырехъ недѣль, второй — 21 быка въ теченіе 9 недѣль. Сколько быковъ можетъ прокормить третій лугъ въ теченіе 18 недѣль?*

Пусть искомое число быковъ равно x. Для облегченія составленія уравненій нужно ввести *два вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*, именно: высоту травы на каждомъ лугу, которую обозначимъ буквою y, и скорость, съ которою трава растетъ, т.-е. количество, на которое увеличивается ея высота въ недѣлю; пусть это неизвѣстное будетъ z.

На первомъ лугу количество травы вначалѣ было $y \times 3\frac{1}{3}$ или $\frac{10}{3}y$, а приростъ ея въ 4 недѣли равенъ $z \times 3\frac{1}{3} \times 4$, или $\frac{40}{3}z$. Полное количество травы, съѣденной 12-ю быками въ 4 недѣли, равно

$$\frac{10}{3}y + \frac{40}{3}z, \quad \text{или} \quad \frac{10(y + 4z)}{3};$$

слѣд. одинъ быкъ въ 1 недѣлю съѣдалъ

$$\frac{10(y + 4z)}{3 \times 4 \times 12}, \quad \text{или} \quad \frac{5(y + 4z)}{72}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что количество травы, съѣденной однимъ быкомъ въ одну недѣлю на второмъ лугу, равно

$$\frac{10(y + 9z)}{9 \times 21}, \quad \text{или} \quad \frac{10(y + 9z)}{189};$$

а на третьемъ, оно равно

$$\frac{24(y+18z)}{18 \times x}, \quad \text{или} \quad \frac{4(y+18z)}{3x}.$$

Выражая, что количество травы, поѣдаемое на каждомъ лугу однимъ быкомъ въ одну недѣлю, одно и то же, получимъ уравненія:

$$\frac{5(y+4z)}{72} = \frac{10(y+9z)}{189},$$

$$\frac{5(y+4z)}{72} = \frac{4(y+18z)}{3x}.$$

Такимъ образомъ получили два уравненія съ тремя неизвѣстными, сл. имѣемъ случай неопредѣленности; но здѣсь неопредѣленны только y и z, между тѣмъ какъ главное неизвѣстное x имѣетъ величину вполнѣ опредѣленную. Въ самомъ дѣлѣ, два полученныя уравненія даютъ возможность опредѣлить отношеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ $\frac{y}{z}$ и главное неизвѣстное x. Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части каждаго уравненія на z и положивъ $\frac{y}{z} = u$, найдемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными x и u:

$$\frac{5(u+4)}{72} = \frac{10(u+9)}{189}$$

$$\frac{5(u+4)}{72} = \frac{4(u+18)}{3x},$$

изъ которыхъ и можно опредѣлить эти неизвѣстныя. Изъ перваго ур. найдемъ: $u = 12$; вставивъ вмѣсто u его значеніе во второе, найдемъ: $x = 36$.

Слѣд., третій лугъ могъ прокормить 36 быковъ въ теченіе 18 недѣль.

ГЛАВА XXIII.

Теорія пропорцій.

Пропорція ариѳметическая. — Пропорція геометрическая; производныя и сложныя пропорціи, свойства ряда равныхъ отношеній. — О пропорціональности величинъ. — Гармоническая пропорція. — Приложенія.

299. Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ особаго вида равенствъ, называемыхъ *пропорціями*: изученіе свойствъ этихъ равенствъ важно въ виду многочисленныхъ и разнообразныхъ ихъ примѣненій.

Пропорція ариѳметическая.

300. Разность двухъ количествъ a и b называется *разностнымъ* или *ариѳметическимъ* ихъ *отношеніемъ*; письменно оно выражается такъ: $a - b$. Количества a и b называются *членами* отношенія: a — *предыдущимъ*, b — *послѣдующимъ*; числовая величина $a - b$ наз. *разностью* отношенія.

Если два ариѳметическія отношенія $a - b$ и $c - d$ равны, то соединяя ихъ знакомъ равенства, получимъ равенство

$$a - b = c - d,$$

называемое *разностною* или *ариѳметическою пропорціею.*

Пропорція читается такъ: a относится къ b, какъ c къ d. Количества a, b, c и d называются членами пропорціи: a первымъ, b — вторымъ, c — третьимъ, d — четвертымъ; кромѣ того, a и d называются *крайними*, b и c — *средними*.

301. Главное свойство ариѳметической пропорціи. Если въ равенствѣ

$$a - b = c - d$$

перенесемъ d въ первую, а b во вторую часть, то получимъ

$$a + d = b + c,$$

т.-е. *во всякой ариѳметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ.*

Обратно: взявъ равенство

$$a + d = b + c$$

и перенеся b въ первую, а d во вторую часть, найдемъ

$$a - b = c - d,$$

т.-е. *если сумма двухъ количествъ равна суммѣ двухъ другихъ, то эти четыре количества ариѳметически пропорціональны.*

302. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ. Перенеся въ пропорціи

$$a - b = c - d$$

членъ b во вторую часть, найдемъ:

$$a = (b + c) - d \;.\;.\;.\;(1).$$

Опредѣляя изъ той же пропорціи b, находимъ

$$b = (a + d) - c \;.\;.\;.\;(2).$$

Равенство (1) показываетъ, что *крайній членъ ариѳм. пропорціи равенъ суммѣ среднихъ безъ другого крайняго:* а равенство (2), что *средній членъ равенъ суммѣ крайнихъ безъ другого средняго.*

303. Непрерывная пропорція. Ариѳметическая средина. Если въ ариѳметической пропорціи равны оба крайніе, или оба средніе члена, то пропорція называется *непрерывною.* Таковы напр. пропорціи: $5 - 3 = 7 - 5$; $2 - 10 = 10 - 18$; вообще

$$a - b = b - c \quad \text{и} \quad p - q = r - p$$

суть пропорціи непрерывныя. Въ первой b, а во второй p называются *ариѳметическими срединами* двухъ другихъ членовъ.

Примѣняя главное свойство къ одной изъ этихъ пропорцій, напр. къ первой, находимъ:

$$2b = a + c, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{a+c}{2};$$

т.-е. *ариѳметическая средина между двумя количествами равна ихъ полусуммѣ.*

Обобщая этотъ выводъ, *называютъ ариѳметическою срединою нѣсколькихъ количествъ — сумму ихъ, дѣленную на число ихъ*

Такимъ образомъ, если имѣемъ n количествъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

то ариѳметическая средина ихъ будетъ

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Опредѣленіе ариѳметическихъ срединъ весьма важно для наблюдательныхъ наукъ. Пусть, напр., опредѣляя угломѣрнымъ приборомъ нѣкоторый уголъ въ нѣсколько пріемовъ, нашли: при первомъ измѣреніи 28°52'36", при двухъ слѣдующихъ 28°51'52" и при четвертомъ измѣреніи 28°51'24". Какова величина угла? Такъ какъ всѣ четыре измѣренія не согласуются между собою, то остается одно средство—взять *среднюю величину.*

$$x = \frac{28^\circ 52' 36'' + 28^\circ 51' 52'' \times 2 + 28^\circ 51' 24''}{4} = 28^\circ 51' 56''.$$

Пропорція геометрическая.

304. Частное отъ раздѣленія двухъ количествъ $\frac{a}{b}$ наз. *кратнымъ* или *геометрическимъ отношеніемъ* a къ b; численная величина отношенія наз. ***знаменателемъ*** отношенія.

Равенство двухъ геометрическихъ отношеній называется кратною или геометрическою пропорціею, напр.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdots (1).$$

305. Главное свойство геометрической пропорціи. *Во всякой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, приведя въ вышенаписанной пропорціи дроби къ общему знаменателю и откинувъ его, найдемъ

$$ad = bc \;.\;.\;.\; (2).$$

Наоборотъ, *если произведеніе двухъ количествъ равно произведенію двухъ другихъ количествъ, то такія четыре количества пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ обѣ части равенства $ad = bc$ на bd, найдемъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

306. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ. Если обѣ части равенства (2), вытекающаго изъ пропорціи (1), раздѣлимъ на d, то найдемъ:

$$a = \frac{bc}{d} \cdots (3).$$

Раздѣливъ же обѣ части (2) на c, находимъ

$$b = \frac{ad}{c} \cdots (4).$$

Равенство (3) показываетъ, что *во всякой геометрической пропорціи крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній;* а равенство (4), что *неизвѣстный средній равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.*

Опредѣленіе неизвѣстнаго члена, когда остальные три члена извѣстны, называется *рѣшеніемъ* пропорціи.

307. Непрерывная пропорція. Геометрическая средина. Когда равны оба крайніе, или оба средніе члена, пропорція называется *непрерывною:* напр. $12 : 6 = 24 : 12$, или $2 : 4 = 4 : 8$.

Каждый изъ равныхъ членовъ непрерывной пропорціи наз. *среднимъ геометрическимъ* между двумя другими. Приравнявъ въ непрерывной пропорціи $a : b = b : d$ произведеніе среднихъ произведенію крайнихъ, получимъ $b^2 = ad$, откуда

$$b = \sqrt{ad};$$

слѣд. *геометрическая средина двухъ количествъ равна квадратному корню изъ ихъ произведенія.*

По аналогіи съ этимъ выводомъ, среднимъ геометрическимъ нѣсколькихъ количествъ называютъ корень порядка, равнаго ихъ числу, изъ ихъ произведенія. Потому, геометрическая средина n количествъ: a_1, a_2, a_3, ... , a_n будетъ

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \ . \ . \ . \ a_n}.$$

308. Производныя пропорціи. Если пропорція получается изъ другой пропорціи посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, то первая называется *производною* отъ второй. Ознакомимся съ различными видами производныхъ пропорцій.

I. Взявъ пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdots (1),$$

приравняемъ въ ней произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, и раздѣлимъ полученное равенство $ad = bc$ послѣдовательно на: cd, ab и ac; по сокращеніи найдемъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \cdots (2) \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \cdots (3) \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \cdots (4).$$

Переставивъ въ каждой изъ этихъ четырехъ пропорцій самыя отношенія, найдемъ еще четыре пропорціи:

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdots(5)\quad \frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdots(6)\quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}\cdots(7)\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\cdots(8).$$

Такимъ образомъ *въ каждой пропорціи можно перемѣнять мѣста: среднихъ членовъ, крайнихъ, и тѣхъ и другихъ вмѣстѣ.* Чрезъ это всякую пропорцію можно представить въ восьми различныхъ видахъ.

II. Придавъ къ обѣимъ частямъ равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ldots(1)$ по 1, а потомъ вычтя по 1, получимъ по приведеніи каждой части къ общему знаменателю:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\cdots(2)\quad\text{и}\quad\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\cdots(3).$$

Пропорціи (2) и (3) показываютъ, что: *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему такъ, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія къ своему послѣдующему.*

Раздѣливъ почленно каждую изъ пропорцій (2) и (3) на (1), найдемъ:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\cdots(4)\quad\text{и}\quad\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}\cdots(5)$$

т. е. *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему этого отношенія такъ, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія къ предыдущему того же отношенія.*

Перемѣнивъ въ пропорціяхъ (2), (3), (4) и (5) мѣста среднихъ членовъ, найдемъ:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}\cdots(6),\quad\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}\cdots(7),\quad\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}\cdots(8)\quad\text{и}\quad\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}\cdots(9)$$

т. е. *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ суммѣ или разности членовъ втораго отношенія такъ, какъ предыдущій къ предыдущему или послѣдующій къ послѣдующему.*

Раздѣливъ пропорцію (2) на (3), найдемъ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\cdots(10)$$

т. е. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ ихъ разности.*

Перемѣнивъ въ пропорціи (1) мѣста среднихъ членовъ и примѣнивъ къ новой пропорціи $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ преобразованія, указываемыя равенствами (2), (3) и т. д., найдемъ:

$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}(11),\quad\frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}(12),\quad\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}(13),\quad\frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}(14),$$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}(15),\quad\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}(16),\quad\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}(17),\quad\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}(18).$$

Изъ сравненія же (15) съ (16) имѣемъ

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d} \quad \text{откуда} \quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

Результаты, выражаемые этими равенствами, нетрудно выразить словесно.

309. Сложныя пропорціи Пропорція, выводимая изъ нѣсколькихъ другихъ пропорцій, называется *сложною*.

I. Посмотримъ, при какихъ условіяхъ возможно почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій Пусть данныя пропорціи будутъ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'};$$

изслѣдуемъ, при какихъ условіяхъ возможна пропорція

$$\frac{a\pm a'}{b\pm b'}=\frac{c\pm c'}{d\pm d'} \; . \, . \, . \, (1)$$

гдѣ знакъ (+) относится къ почленному сложенію, а (—) къ почленному вычитанію. Преобразуемъ испытуемое равенство, приравнявъ произведеніе крайнихъ членовъ произведенію среднихъ; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$(a\pm a')(d\pm d')=(b\pm b')(c\pm c').$$

Выполняя умноженіе и замѣчая, что верхніе знаки надо брать съ верхними, а нижніе съ нижними, находимъ:

$$ad\pm a'd\pm ad+a'd'=bc\pm b'c\pm bc'+b'c'.$$

Но изъ данныхъ пропорцій имѣемъ: $ad=bc$ и $a'd'=b'c'$; отнявъ по-ровну изъ обѣихъ частей, найдемъ

$$\pm a'd\pm ad'=\pm b'c\pm bc'.$$

Здѣсь совокупно написаны два равенства: въ одномъ членамъ предшествуетъ знакъ +, въ другомъ — всѣмъ членамъ предшествуетъ (—); помноживъ обѣ части втораго на (—1), увидимъ, что оно ничѣмъ не отличается отъ перваго, такъ что оба равенства приводятся къ одному

$$a'd+ad'=b'c+bc',$$

а это значитъ, что почленное сложеніе и почленное вычитаніе двухъ пропорцій возможны при однихъ и тѣхъ же условіяхъ. Затѣмъ, пользуясь данными пропорціями, исключимъ изъ послѣдняго равенства d и d', чтобы уменьшить этимъ число входящихъ въ него буквъ и такимъ образомъ упростить его. Съ этою цѣлью опредѣлимъ изъ данныхъ пропорцій d и d' и ихъ выраженія подставимъ въ предыдущее равенство; такимъ образомъ найдемъ:

$$\frac{a'bc}{a}+\frac{ab'c'}{a}=b'c+bc',$$

или, освободивъ отъ дробей,

$$a'^2bc + a^2b'c' = aa'b'c + aa'bc'.$$

Перенеся всѣ члены въ первую часть и вынося за скобки въ 1-мъ и 3-мъ членахъ $a'c$, а во 2-мъ и 4-мъ ac', найдемъ

$$a'c(a'b - ab') - ac'(a'b - ab') = 0, \text{ или } (a'b - ab')(a'c - ac') = 0 \;.\;.\;(2).$$

Это равенство замѣняетъ собою испытуемое, а потому при какихъ условіяхъ возможно (2), при такихъ же условіяхъ возможно и (1).

Но равенство (2) требуетъ, чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю; а это возможно только тогда, когда одинъ изъ нихъ равенъ нулю, поэтому слѣдуетъ положить

$$\text{или } a'b - ab' = 0, \quad \text{или } a'c - ac' = 0.$$

Обративъ ихъ въ пропорціи, имѣемъ

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$

[illegible] сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій возможно только [illegible] или первое, или второе изъ этихъ равенствъ. [illegible] знаменатели отношеній данныхъ пропорцій, заключаемъ, *что почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій возможно,* [illegible] *равны.* Замѣчая, что $\frac{a'}{c'}$ и $\frac{a}{c}$ суть зна[illegible], выведенныхъ изъ данныхъ перемѣщеніемъ среднихъ [illegible], что *искомое преобразованіе возможно еще тогда,* [illegible] *отношеніи равны въ пропорціяхъ, выведенныхъ изъ* [illegible] *перемѣщеніемъ среднихъ членовъ.*

[illegible] знаменатели отношеній данныхъ пропорцій равны, то, назвавъ общую ихъ величину буквою q, имѣемъ

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b'} = q, \quad \text{откуда:} \quad a = bq \quad \text{и} \quad a' = b'q.$$

Складывая или вычитая эти равенства, находимъ.

$$a \pm a' = (b \pm b')q, \quad \text{откуда} \quad \frac{a \pm a'}{b \pm b'} = q = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

Отсюда слѣдуетъ, что, какъ $\frac{a \pm a'}{b \pm b'}$ есть зн. отн. сложной пропорціи, *знаменатель отношенія сложной пропорціи, полученной чрезъ почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій, имѣющихъ равныхъ знаменателей отношеній, равенъ знаменателю отн. дан. пропорцій*

Примѣръ I. Такъ изъ пропорцій $\frac{10}{4} = \frac{30}{12}$ и $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ получаемъ чрезъ почленное сложеніе: $\frac{15}{6} = \frac{45}{18}$, а чрезъ почленное вычитаніе: $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ — пропорціи, имѣющія такого же знаменателя отношенія какъ и данныя.

Примѣръ II. Изъ пропорцій $\frac{10}{4}=\frac{30}{12}$ и $\frac{7}{2}=\frac{21}{6}$, получаемъ чрезъ почленное сложеніе и вычитаніе вѣрныя пропорціи: $\frac{17}{6}=\frac{51}{18}$ и $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$.

II. *Можно перемножать почленно какія-угодно пропорціи; знаменатель отношенія полученной сложной пропорціи будетъ равенъ произведенію знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.*

Пусть даны пропорціи

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, которой знаменатель отношенія равенъ q,

$\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$ » » » » q'

$\frac{a'}{b''}=\frac{c''}{d''}$ » » » » q''

Перемножая почленно эти равенства по правилу умноженія дробей, найдемъ

$$\frac{a.a'.a''}{b.b'.b''}=\frac{c.c'.c''}{d.d'.d''}.$$

Знаменатель отношенія этой пропорціи равенъ $\frac{aa'a''}{bb'b''} \quad \frac{a}{b} \quad \frac{a'}{b} \cdot \frac{a'}{b} \qquad q.q'q''$, т.-е. произведенію знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.

III. *Можно пропорцію раздѣлить почленно на другую; знаменатель отношенія сложной пропорціи будетъ равенъ частному отъ раздѣленія знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.*

Раздѣливъ пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ на $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, по правилу дѣленія дробей найдемъ:

$$\frac{ab}{a'b} \quad \frac{cd}{c'd'}$$

Раздѣливъ оба члена первой части на $a'b'$, а оба члена второй на $c'd'$, получимъ

$$\frac{a:a'}{b:b}=\frac{c:c}{d.d'}.$$

Знаменатель отношенія полученной пропорціи равенъ

$$\frac{a:a'}{b:b'} \quad \frac{ab}{a'b} \quad \frac{a}{b}\times\frac{b'}{a'} \quad \frac{a}{b}:\frac{a}{b'} \quad q:q,$$

если знаменатели отношеній данныхъ пропорцій обозначить соотвѣтственно буквами q и q'.

IV. *Если въ двухъ пропорціяхъ предыдущіе члены равны, то изъ послѣдующихъ можно составить пропорцію; если же послѣдующіе равны, то предыдущіе пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если въ пропорціяхъ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ и } \frac{a}{b'}=\frac{c}{d'}$$

перемѣнимъ мѣста среднихъ, то найдемъ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ и } \frac{a}{c}=\frac{b}{d'},$$

откуда

$$\frac{b}{d}=\frac{b'}{d'} \text{ или } \frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}.$$

Такимъ же образомъ, взявъ двѣ пропорціи съ равными послѣдующими членами

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ и } \frac{a'}{b}=\frac{c'}{d}$$

и перемѣстивъ въ нихъ средніе члены, найдемъ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ и } \frac{a'}{c'}=\frac{b}{d},$$

откуда

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'} \text{ или } \frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}.$$

Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ любой изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему.

Пусть даны равныя отношенія

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ .\ .\ .\ =\frac{a_n}{b_n};$$

если назовемъ общаго знаменателя этихъ отношеній буквою q, то:

$$\frac{a_1}{b_1}=q;\quad \frac{a_2}{b_2}=q;\quad \frac{a_3}{b_3}=q;\ .\ .\ .\ \frac{a_n}{b_n}=q.$$

Выражая дѣлимое чрезъ дѣлителя и частное, имѣемъ:

$$a_1=b_1q;\ a_2=b_2q;\ a_3=b_3q;\quad .\ .\ .\ a_n=b_nq\ .\ .\ .\ (1).$$

Сложивъ почленно эти равенства и во второй части вынеся за скобки q, найдемъ:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)q.$$

Раздѣливъ обѣ части на $b_1+b_2+\cdots+b_n$ и сокративъ вторую часть на это выраженіе, получимъ во второй части q, или $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и т. д.:

$$\frac{a_1+a_2+a_3\ .\ .\ .\ +a_n}{b_1+b_2+b_3\ .\ .\ .\ +b_n}=q=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ .\ .$$

что и требовалось доказать.

VI. *Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ, умноженныхъ на какія-угодно количества, такъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на тѣ же самыя количества, какъ любой изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.*

Умноживъ равенства (1) пункта V соотвѣтственно на $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$, а затѣмъ поступая по предыдущему, найдемъ.

$$\frac{a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3+\dots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+\dots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots$$

VII. Возвысивъ равныя отношенія $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$ въ m-ую степень, найдемъ

$$\frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}=\frac{a_3^m}{b_3^m}=\dots=\frac{a_n^m}{b_n^m},$$

откуда (на осн. V), получаемъ

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\dots+a_n^m}{b_1^m+b_2^m+b_3^m+\dots+b_n^m}=\frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}=\dots$$

а по извлеченіи корня m-го порядка:

$$\frac{\sqrt[m]{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\dots+a_n^m}}{\sqrt[m]{b_1^m+b_2^m+b_3^m+\dots+b_n^m}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots$$

О пропорціональности величинъ.

310 Опредѣленія. I. Когда двѣ величины A и B зависятъ одна отъ другой такъ, что отношеніе двухъ какихъ угодно значеній первой равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній второй, то такія величины называются прямо пропорціональными или просто пропорціональными.

Согласно этому опредѣленію, если изобразимъ буквами $a, a', a'', a''', \dots$ послѣдовательныя значенія величины A, а буквами $b, b', b'', b''', \dots$ соотвѣтствующія значенія величины B, то A и B—прямо пропорціональны, если

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},\quad \frac{a}{a''}=\frac{b}{b''},\quad \frac{a}{a'''}=\frac{b}{b'''},\ \dots \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\dots$$

Примѣры. Цѣна провизіи пропорціональна ея вѣсу; жалованье рабочаго пропорціонально времени его работы; окружность круга пропорціональна его діаметру; вѣсъ однороднаго тѣла пропорціоналенъ его объему; пространство, проходимое равномѣрно движущимся тѣломъ, пропорціонально времени движенія; и т. п.

II. Когда двѣ величины A и B находятся въ такой зависимости одна отъ другой, что отношеніе двухъ какихъ-либо значеній первой равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ значеній второй,— такія величины называются обратно пропорціональными.

Согласно этому опредѣленію, если буквами a, a', a'', a''', ... назовемъ нѣкоторыя значенія величины A, а буквами b, b', b'', b''', ... соотвѣтствующія значенія величины B, то A и B обратно пропорціональны, если

$$\frac{a}{a'}=\frac{b'}{b},\quad \frac{a}{a''}=\frac{b'}{b},\quad \frac{a}{a'''}=\frac{b''}{b},\ \dots \text{ или } a\,.\,b=a'.\,b'=a''.\,b''=a'''.\,b'''=\cdots$$

Примѣры. Время, необходимое для окончанія нѣкоторой работы, вообще обратно пропорціонально числу рабочихъ; скорость равномѣрнаго движенія обратно пропорціональна времени, необходимому для прохожденія опредѣленнаго разстоянія; объемъ газа, при постоянной температурѣ, обратно пропорціоналенъ давленію, подъ которымъ газъ находится; и т. п.

311. Какимъ образомъ доказывается пропорціональность величинъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пропорціональность величинъ очевидна, или принимается [illegible] таковою, напр. пропорціональность капитала и прибыли, платы рабочаго и [illegible] въ теченіе котораго онъ работалъ. Затѣмъ, пропорціональность нѣкоторыхъ величинъ строго доказывается въ тѣхъ наукахъ, къ которымъ величины [illegible] принадлежатъ, такъ въ геометріи доказывается пропорціональность [illegible] подобныхъ треугольниковъ, пропорціональность окружно[illegible] и т. п.; въ физикѣ доказывается пропорціональность плотности газа и давленія, и т. п.

[illegible] величинъ не подлежитъ спеціально ни [illegible] (прямой или обратной) убѣждаются [illegible] образомъ.

[illegible] какъ величина A принимаетъ значенія [illegible] три, четыре, [illegible] разъ большія или меньшія, другая величина B, [illegible]ственно этому, принимаетъ значенія также въ два, три, четыре, ... [illegible]ся или меньшія, то величины A и B прямо пропорціональны.

[illegible] самомъ дѣлѣ, пусть соотвѣтственно значеніямъ A, равнымъ a, $2a$, $3a$, [illegible] $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, ... величина B принимаетъ значеніе b, $2b$, $3b$, ... [illegible] ... ; требуется доказать, что если A приметъ значеніе равное [illegible] соотвѣтствующее значеніе B будетъ $\frac{5}{7}b$. Для доказательства можно при[illegible] что A получаетъ значеніе равное $\frac{5}{7}a$ въ два пріема, т.-е. что сперва изъ [illegible]щается въ $\frac{1}{7}a$, а затѣмъ изъ $\frac{1}{7}a$ превращается въ $\frac{5}{7}a$. Но, по условію, [illegible] A получаетъ значеніе $\frac{1}{7}a$, въ 7 разъ меньшее a, то B получаетъ зна[illegible] $\frac{1}{7}b$, въ 7 разъ меньшее b. Затѣмъ, опять по условію, когда A изъ $\frac{1}{7}a$ [illegible]ращается въ $\frac{5}{7}a$, увеличиваясь въ 5 разъ, то B увеличивается во столько же разъ, и слѣд. изъ $\frac{1}{7}b$ обращается въ $\frac{5}{7}b$. Такимъ образомъ теорема дока[illegible] для всѣхъ случаевъ, когда одна изъ величинъ измѣняется въ *соизмѣримое* [illegible] разъ. Но если величина A изъ a обращается въ $a\sqrt{2}$, измѣняясь въ не[illegible]ѣримое число разъ, то легко доказать, что соотвѣтственно этому и B изъ b [illegible]тится въ $b\sqrt{2}$; въ самомъ дѣлѣ, замѣняя $\sqrt{2}$ приближенными *соизмѣримыми* дробями (1, 4; 1, 41; 1, 414 и т. д.) неограниченно приближающимися къ предѣлу $\sqrt{2}$, каждый разъ разъ будемъ находить, что во сколько разъ измѣняется А, во столько же разъ и В; это заключеніе вѣрно, слѣд., и въ предѣлѣ.

II. Если окажется, что соотвѣтственно значеніямъ А, равнымъ a, $2a$, $3a$, … $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, …, величина В принимаетъ значенія, во столько же разъ меньшія или большія, т.-е. b, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{3}b$, … $2b$, $3b$, …, то величины А и В обратно пропорціональны.

Требуется доказать, что если А приметъ значеніе $\frac{5}{7}a$, то соотвѣтствующее значеніе В будетъ $\frac{7}{5}b$. Въ самомъ дѣлѣ, когда А, вначалѣ имѣвшее величину a, обращается въ $\frac{1}{7}a$, т.-е. уменьшается въ 7 разъ, то В, по условію, во столько же разъ увеличивается, и слѣд. изъ b превращается въ $7b$; затѣмъ, когда А изъ $\frac{1}{7}a$ обращается въ $\frac{5}{7}a$, увеличиваясь въ 5 разъ, то В, соотвѣтственно этому, уменьшается въ 5 разъ, и потому изъ $7b$ превращается $\frac{7}{5}b$. Теорема такимъ образомъ доказана для всѣхъ случаевъ, когда отношеніе соизмѣримо, а отсюда, по способу предѣловъ, легко заключить, что она распространяется и на случай отношенія несоизмѣримыхъ

Примѣры: 1. Если принять, что для исполненія работы въ два, три, четыре и т. д. разъ большей или меньшей нужно рабочихъ въ два, три, четыре и т. д. разъ больше или меньше, то заключаемъ, что и во всѣхъ случаяхъ количество исполненной работы пропорціонально числу рабочихъ.

2. Въ физикѣ доказывается, что когда давленіе, подъ которымъ газъ находится, увеличивается или уменьшается въ два, три и т. д. разъ, объемъ газа уменьшается или увеличивается во столько же разъ; заключаемъ, что во всѣхъ случаяхъ объемъ газа обратно пропорціоналенъ давленію.

312. Пусть будутъ X и Y двѣ прямо-пропорціональныя величины, напр., вѣсъ товара и цѣна его. Пусть будутъ, затѣмъ, x' и x'' два частныя значенія первой, а y' и y'' два частныя значенія второй величины, соотвѣтствующія x' и x''. По опредѣленію прямо пропорціональныхъ величинъ, отношеніе двухъ какихъ-либо значеній первой величины равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній второй, слѣд.

$$\frac{x'}{x''}=\frac{y'}{y''};$$

перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ, имѣемъ

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x''}{y''}.$$

Такъ какъ разсматриваемыя значенія совершенно произвольны, то можно сказать, что *отношеніе* двухъ какихъ угодно соотвѣтственныхъ значеній пропорціональныхъ величинъ *постоянно*. Обозначивъ эту постоянную величину буквою K, имѣемъ

$$\frac{X}{Y}=K, \quad \text{откуда} \quad X=K.Y,$$

т. е. *изъ двухъ прямо-пропорціональныхъ величинъ одна равняется другой, умноженной на постоянное количество, называемое коэффиціентомъ пропорціональности.*

Опредѣливъ изъ опыта или наблюденія два соотвѣтственныя частныя значенія разсматриваемыхъ величинъ, и взявъ ихъ отношеніе, найдемъ коэффиціентъ пропорціональности, т. е. числовую величину отношенія, связывающаго двѣ величины.

Если X и Y — величины обратно-пропорціональныя, то, по опредѣленію, имѣемъ

$$\frac{x'}{x''}=\frac{y''}{y'}.$$

или, приравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ:

$$x' \,.\, y' = x'' \,.\, y'.$$

Такъ какъ взятыя значенія произвольны, то можно сказать, что *произведеніе* двухъ какихъ угодно соотвѣтственныхъ значеній двухъ обратно-пропорціональныхъ величинъ - *постоянно.* Обозначивъ это постоянное буквою K, имѣемъ

$$X \,.\, Y = K, \quad \text{откуда} \quad X=\frac{K}{Y}.$$

т. е. *изъ двухъ обратно-пропорціональныхъ величинъ одна равна постоянному коэффиціенту, дѣленному на другую.*

Коэффиціентъ опредѣляется опытомъ или наблюденіемъ.

Разсмотримъ теперь нѣсколько величинъ. Когда измѣненіе величины зависитъ отъ измѣненія нѣсколькихъ другихъ величинъ, то, говоря, что разсматриваемая величина прямо или обратно пропорціональна другой, разумѣютъ при этомъ, что всѣ другія величины въ моментъ сравненія двухъ взятыхъ величинъ остаются постоянными.

Примѣръ I. Говоря, что *простыя процентныя деньги прямо-пропорціональны капиталу и времени обращенія*, разумѣютъ подъ этимъ, что процентныя деньги, приносимыя въ опредѣленное время, измѣняются въ томъ же отношеніи, какъ и капиталъ, и что процентныя деньги, приносимыя однимъ и тѣмъ же капиталомъ, измѣняются въ томъ же отношеніи какъ продолжительность обращенія его.

Примѣръ II. Говоря, что *объемъ газа прямо пропорціоналенъ его вѣсу и биному расширенія и обратно пропорціоналенъ давленію*, разумѣютъ подъ этимъ, что: при данныхъ—температурѣ и давленіи объемъ газа измѣняется въ томъ же отношеніи какъ его вѣсъ; при данныхъ — температурѣ и вѣсѣ объемъ газа находится въ обратномъ отношеніи къ давленію; наконецъ, при данныхъ давленіи и данномъ вѣсѣ, объемъ газа прямо пропорціоналенъ биному расширенія.

Обозначимъ разсматриваемыя величины буквами x, A, B, P и Q, и пусть x прямо пропорціоналенъ A и B и обратно пропорціоналенъ P и Q. Пусть два ряда соотвѣтственныхъ частныхъ значеній этихъ величинъ будутъ

$$x',\ a',\ b',\ p',\ q'$$

$$x'',\ a'',\ b'',\ p'',\ q''.$$

Опредѣлимъ x' черезъ остальныя величины.

Разсматривая величины x и A, полагаемъ, что остальныя величины остаются безъ перемѣны, т.-е. въ то время какъ x и A измѣняются, тѣ величины сохраняютъ неизмѣнныя значенія b', p' и q'. Въ то время какъ A изъ a' переходитъ въ a'', величина x переходитъ изъ x' въ такую величину X, которая удовлетворяетъ равенству

$$\frac{X}{x} = \frac{a''}{a'}, \quad \text{откуда} \quad X = \frac{a''}{a'} \cdot x' \quad . \; . \; (1)$$

ибо x и A прямо пропорціональны.

При измѣненіи x и B другія величины сохраняютъ значенія a'', p' и q': при переходѣ B изъ b' въ b'', x переходитъ изъ X, соотвѣтствующаго количеству b', въ такое значеніе X', которое удовлетворяетъ пропорціи

$$\frac{X'}{X} = \frac{b''}{b'}, \quad \text{откуда} \quad X' = \frac{b''}{b'} \cdot X \; . \; . \; . \; (2),$$

такъ такъ x и B прямо пропорціональны.

Разсмотримъ x и P. Другія величины сохраняютъ значенія a'', b'', q': при переходѣ P изъ p' въ p'', x перейдетъ изъ X', соотвѣтствующаго p', въ X''— удовлетворяющее пропорціи

$$\frac{X''}{X'} = \frac{p'}{p''}, \quad \text{откуда} \quad X'' = \frac{p'}{p''} \cdot X' \; . \; . \; . \; (3),$$

ибо x и P обратно пропорціональны.

Наконецъ, разсмотримъ x и Q, при чемъ остальныя величины сохраняютъ значенія a'', b'', p''. При переходѣ Q изъ q' въ q'', x переходитъ изъ X'' въ такую величину x'', которая соотвѣтствуетъ ряду a'', b'', p'', q''. Эта величина x'' удовлетворяетъ пропорціи

$$\frac{x}{X''} = \frac{q'}{q''}, \quad \text{откуда} \quad x'' = \frac{q'}{q''} \cdot X'' \; . \; . \; . \; (4),$$

ибо x и Q величины обратно пропорціональныя.

Для исключенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ X, X', X'', перемножимъ почленно равенства (1), (2), (3) и (4): найдемъ

$$X \, . \, X' \, . \, X'' \, . \, x'' = X \, . \, X' \, . \, X'' x' \, . \, \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b'}{b'} \cdot \frac{p'}{p''} \cdot \frac{q'}{q''}.$$

Сокративъ на X . X' . X'', получимъ

$$x'' = x' \, \frac{a''}{a'} \cdot \frac{b'}{b'} \cdot \frac{p'}{p} \cdot \frac{q'}{q''}.$$

Положивъ

$$\frac{x' \cdot p' \, q'}{a' \cdot b'} = K,$$

гдѣ x', a', b', p' и q' представляютъ рядъ соотвѣтственныхъ частныхъ значеній разсматриваемыхъ величинъ, найдемъ

$$x'' = K \, . \, \frac{a''b''}{p' \, q''}.$$

Такъ какъ это равенство относится къ ряду какихъ угодно соотвѣтственныхъ значеній взятыхъ величинъ, можно замѣнить эти частныя значенія общими символами, и написать

$$x = K \cdot \frac{AB}{PQ}.$$

Опредѣливъ изъ опыта или наблюденія рядъ частныхъ соотвѣтственныхъ значеній данныхъ величинъ, найдемъ численную величину *коэффиціента* K, связывающаго данныя величины.

Если бы разсматриваемыя величины были только x, A и B, то имѣли бы

$$x = K \cdot AB,$$

т.-е. если величина прямо пропорціональна нѣсколькимъ другимъ, то она равна ихъ произведенію, умноженному на постоянный коэффиціентъ.

Если бы взяты были только величины x, P и Q, то имѣли бы

$$x = \frac{K}{PQ},$$

т.-е. величина, обратно пропорціональная нѣсколькимъ другимъ, равна постоянному коэффиціенту, дѣленному на произведеніе этихъ величинъ.

Наконецъ, изъ формулы

$$x = K \cdot \frac{AB}{PQ}$$

слѣдуетъ, что величина, прямо-пропорціональная ряду нѣкоторыхъ величинъ, и обратно-пропорціональная ряду другихъ величинъ, равна постоянному коэффиціенту, умноженному на произведеніе ряда первыхъ величинъ, и дѣленному на произведеніе ряда другихъ величинъ.

Гармоническая пропорція.

313 Если три количества a, b и c удовлетворяютъ пропорціи

$$a : c = (a - b) : (b - c),$$

т.-е. если первое такъ относится къ третьему, какъ разность между первымъ и вторымъ къ разности между вторымъ и третьимъ, то они называются *гармонически-пропорціональными;* при этомъ b называется гармоническою срединою между a и c.

Приравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, найдемъ $ab - ac = ac - bc$; а раздѣливъ обѣ части этого равенства на abc, найдемъ

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

откуда

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если b есть гармоническая средина между a и c, то $\frac{1}{b}$ есть ариѳметическая средина между $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$.

314. Теорема. *Ариѳметическая, геометрическая и гармоническая средины двухъ какихъ-нибудь чиселъ составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію.*

Пусть x, y и z будутъ: гармоническая, геометрическая и ариѳметическая средины чиселъ a и b; т.-е.

$$a:b=(a-x):(x-b);\quad y^2=ab;\quad z=\frac{a+b}{2}.$$

Приравнявъ въ первой произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, находимъ

$$ax-ab=ab-bx;$$

прибавивъ къ обѣимъ частямъ по bx и ab, находимъ

$$ax+bx=2ab;\quad \text{или}\quad 2zx=2y^2;\quad \text{или}\quad zx=y^2,$$

откуда

$$x:y=y:z.$$

Примѣчаніе. Поводомъ къ названію разсматриваемой пропорціи гармоническою послужило замѣчаніе, что числа 1, $\frac{4}{5}$ и $\frac{2}{3}$, представляющія длины струнъ, дающихъ совершенный аккордъ (*ut*, *mi*, *sol*), удовлетворяютъ этой пропорціи.

Приложенія.

315. I. Раздѣлить число A на части пропорціональныя даннымъ числамъ a, b, c?

Это значитъ найти три такія числа, которыхъ сумма равнялась бы A, и которыя удовлетворяли бы равенствамъ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

По свойству равныхъ отношеній имѣемъ:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c},$$

но $x+y+z=A$, слѣд. для опредѣленія x, y и z имѣемъ три равенства

$$\frac{x}{a}=\frac{A}{a+b+c};\quad \frac{y}{b}=\frac{A}{a+b+c};\quad \frac{z}{c}=\frac{A}{a+b+c},$$

откуда

$$x=\frac{Aa}{a+b+c};\quad y=\frac{Ab}{a+b+c};\quad z=\frac{Ac}{a+b+c}.$$

II. Три купца внесли для общей торговли капиталы: A, A′ и A″, находившіеся въ оборотѣ: первый — t лѣтъ, второй — t', третій — t'' лѣтъ. Сколько каждый купецъ долженъ получить изъ общей прибыли B?

части каждаго должны быть прямо пропорціональны капиталамъ и временамъ ихъ обращенія; а слѣд. эти части должны быть пропорціональны произведеніямъ капиталовъ на соотвѣтствующія времена; итакъ, имѣемъ

$$x+y+z=\mathrm{B} \quad \text{и} \quad \frac{x}{\mathrm{A}t}=\frac{y}{\mathrm{A}'t'}=\frac{z}{\mathrm{A}''t''},$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ

$$x=\frac{\mathrm{B}.\mathrm{A}t}{\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t'+\mathrm{A}''t''};\quad y=\frac{\mathrm{B}.\mathrm{A}'t'}{\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t'+\mathrm{A}''t''};\quad z=\frac{\mathrm{B}.\mathrm{A}''t''}{\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t'+\mathrm{A}''t''}.$$

III. Рѣшить уравненія

$$ax+by+cz=d,\quad \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

Умноживъ оба члена перваго отношенія на a, втораго на b, третьяго на c, получимъ

$$\frac{ax}{am}=\frac{by}{bn}=\frac{cz}{cp}.$$

Отсюда, по свойству равныхъ отношеній, выводимъ:

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{ax+by+cz}{am+bn+cp}=\frac{d}{am+bn+cp},$$

а отсюда:

$$x=\frac{dm}{am+bn+cp};\quad y=\frac{dn}{am+bn+cp};\quad z=\frac{dp}{am+bn+cp}.$$

IV. Рѣшить систему уравненій

$$ax=by=cz=du\ .\ .\ .\ (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{m}\ .\ .\ .\ (2).$$

Уравненія (1) можно представить въ видѣ

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{y}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{d}{\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Но въ ряду равныхъ отношеній сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему, такимъ образомъ, замѣчая, что въ силу ур-нія (2), сумма послѣдующихъ членовъ равна $\frac{1}{m}$, получимъ:

$$\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{m}}=\frac{a}{\frac{1}{x}}=\frac{b}{\frac{1}{y}}=\frac{c}{\frac{1}{z}}=\frac{d}{\frac{1}{u}},$$

откуда

$$x = (a + b + c + d)\frac{m}{a},$$

$$y = (a + b + c + d)\frac{m}{b},$$

$$z = (a + b + c + d)\frac{m}{c},$$

$$u = (a + b + c + d)\frac{m}{d}.$$

V. Рѣшить уравненіе

$$\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}} = \frac{b}{c}.$$

Во всякой пропорціи сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности такъ, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ ихъ разности; слѣдовательно

$$\frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}} = \frac{b + c}{b - c}.$$

Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, для освобожденія неизвѣстнаго изъ-подъ радикала, получаемъ

$$\frac{a + x}{a - x} = \frac{(b + c)^2}{(b - c)^2}.$$

Примѣнивъ снова то же самое свойство пропорцій, найдемъ

$$\frac{a}{x} = \frac{(b + c)^2 + (b - c)^2}{(b + c)^2 - (b - c)^2} = \frac{b^2 + c^2}{2bc},$$

откуда

$$x = \frac{2abc}{b^2 + c^2}.$$

ГЛАВА XXIV.

Неравенства первой степени.

Опредѣленія. — Общія начала. — Начала, относящіяся къ совмѣстнымъ неравенствамъ. — Провѣрка неравенствъ. — Доказательство нѣкоторыхъ замѣчательныхъ неравенствъ. — Рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ и со многими неизвѣстными.

Опредѣленія.

316. Если разность двухъ количествъ a и b равна положительному числу p, то изъ равенства $a - b = p$ находимъ: $a = b + p$, откуда видно, что количество a превышаетъ b на p единицъ.

Если же разность между a и b равна отрицательному числу $-p$, то изъ условія $a - b = -p$ находимъ: $a = b - p$, откуда видно, что a меньше b на p единицъ.

Отсюда вытекаетъ *опредѣленіе: количество a считается большимъ b, каковы бы ни были ихъ знаки, если разность $a - b$ положительна*, наоборотъ, *a считается меньшимъ b, если разность $a - b$ отрицательна.*

Обратно: если a больше b, то это значитъ, что a равно b, сложенному съ положительнымъ числомъ p: $a = b + p$, откуда $a - b = +p$; если a меньше b, то это значитъ, что a равно b безъ нѣкотораго положительнаго числа p, т.-е. $a = b - p$, откуда $a - b = -p$.

Итакъ: *каковы бы ни были знаки количествъ a и b, если a больше b, разность $a - b$ положительна, если же a меньше b, эта разность отрицательна.*

Слѣдствія. Изъ данныхъ опредѣленій можно вывести всѣ свойства относительно сравнительной величины положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.

1. Изъ двухъ положительныхъ чиселъ то больше, котораго абсолютная вечина больше.

Такъ, $+10$ больше $+6$, потому что разность $+10 - (+6)$ равна положительному числу $+4$.

2. Всякое положительное число больше нуля.

Такъ, $+5 > 0$, потому что разность $+5 - 0$ равна положительному числу $+5$.

3. Всякое положительное число больше всякаго отрицательнаго.

Такъ, $-2 > -7$, ибо разность $-2 - (-7)$ положительна и равна $+9$.

4. Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, котораго абсолютная величина меньше.

Напр. -3 больше -8, ибо разность $-3 - (-8)$ равна положительному числу $+5$.

5. Нуль больше всякаго отрицательнаго числа.

Такъ, $0 > -4$, ибо разность $0 - (-4)$ равна $+4$, числу положительному.

Отсюда вытекаетъ, что если написать рядъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, такъ чтобы ихъ абсолютныя величины шли возрастая въ обѣ стороны отъ нуля:

$$-\infty, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots +\infty,$$

то любое число, взятое въ этомъ ряду, больше каждаго числа, находящагося влѣво отъ него, и меньше каждаго числа, стоящаго справа отъ него.

Если подразумѣвать въ этомъ ряду между цѣлыми числами и дроби и несоизмѣримыя числа, то получимъ *скалу всевозможныхъ дѣйствительныхъ чиселъ*.

Такъ какъ всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное меньше нуля, то желая выразить, что число a положительно, пишутъ, что оно больше нуля:

$$a > 0;$$

а желая выразить, что число b отрицательно, пишутъ, что оно меньше нуля:

$$b < 0.$$

317. Соединеніе двухъ неравныхъ величинъ знакомъ неравенства называется *неравенствомъ;* такъ

$$7>5, \qquad a<b$$

суть неравенства. Выраженія, находящіяся по ту и по другую сторону знака неравенства, называются *частями* неравенства: находящееся слѣва отъ этого знака, называется *первою частью* неравенства, а стоящее справа — *второю частью* его.

Подобно равенствамъ, неравенства бываютъ двоякаго рода: одни, какъ напр. $a^2+b^2>2ab$, имѣютъ мѣсто при всякихъ частныхъ значеніяхъ буквъ, въ нихъ входящихъ; другія, каково напримѣръ $2ax^2+bx+c>0$, имѣютъ мѣсто только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ этихъ буквъ.

Такимъ образомъ, по отношенію къ неравенствамъ подлежатъ рѣшенію два вопроса: 1) провѣрка такихъ неравенствъ, которыя справедливы при всѣхъ значеніяхъ буквъ; и 2) опредѣленіе тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ неравенству, имѣющему мѣсто при частныхъ значеніяхъ буквъ.

Рѣшеніе этихъ вопросовъ основано на слѣдующихъ началахъ.

Общія начала.

318. Опредѣленіе. Два неравенства называются *эквивалентными* одно другому, если второе есть слѣдствіе перваго, и обратно — первое есть слѣдствіе второго.

319. Начало I. *Неравенства*

$$A>B\ .\ .\ .\ (1) \qquad \text{и} \qquad A-B>0\ .\ .\ .\ (2)$$

эквивалентны, каковы бы ни были знаки количествъ A *и* B.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) если A больше B, то разность A — B положительна, т.-е. больше нуля; слѣд. неравенство (2) вытекаетъ изъ (1); 2) обратно, если разность A — B больше нуля, т.-е. положительна, то количество A больше B: значитъ, неравенство (1) есть слѣдствіе неравенства (2). Эквивалентность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что *неравенства*

$$a<b \qquad \text{и} \qquad a-b<0$$

эквивалентны, каковы бы ни были знаки количествъ a *и* b.

320. Начало II. *Придавая къ обѣимъ частямъ неравенства одно и то же количество, положительное или отрицательное, и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, эквивалентное данному.*

То-есть, если данное неравенство есть

$$A>B\ .\ .\ .\ (1)$$

и M произвольное количество, положительное или отрицательное, то требуется доказать, что неравенство

$$A+M>B+M\ .\ .\ .\ (2)$$

эквивалентно (1). Въ самомъ дѣлѣ;

1) Если дано, что

$$A > B,$$

то это значитъ, по опредѣленію, что разность $A - B$ положительна, и слѣдов., изъ (1) вытекаетъ неравенство

$$A - B > 0;$$

прибавивъ къ первой части M и вычтя изъ нея M, мы не измѣнимъ разности $A - B$, а потому и

$$(A + M) - (B + M) > 0,$$

откуда, по опредѣленію, имѣемъ

$$A + M > B + M.$$

Итакъ, неравенство (2) есть слѣдствіе перваго.

2) Если дано, что

$$A + M > B + M,$$

то разность между первою и второю суммою положительна, т.-е.

$$(A + M) - (B + M) > 0,$$

или

$$A - B > 0,$$

откуда, по опредѣленію,

$$A > B.$$

Итакъ, неравенство (1) есть слѣдствіе второго.

Итакъ, эквивалентность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Подобнымъ же образомъ доказали бы, что вычтя изъ обѣихъ частей одно и то же количество, получимъ неравенство эквивалентное данному.

Слѣдствіе 1. *Можно переносить члены изъ одной части неравенства въ другую, перемѣняя у переносимыхъ членовъ знаки.*

Такъ, имѣя неравенство

$$ax - b > cx + d \ . \ . \ . (1)$$

и придавъ къ обѣимъ частямъ его по $-cx + b$, найдемъ

$$ax - b - cx + b > cx + d - cx + b,$$

или, по приведеніи подобныхъ членовъ,

$$ax - cx > d + b \ . \ . \ . (2).$$

По доказанному, неравенство (2) эквивалентно (1) и слѣд. можетъ его замѣнять. Сравнивая ихъ, замѣчаемъ, что членъ $-b$ перешелъ изъ первой части во вторую со знакомъ +, а членъ cx изъ второй части въ первую со знакомъ −. Такимъ образомъ, правило перенесенія членовъ изъ одной части неравенства въ другую ничѣмъ не отличается отъ правила перенесенія членовъ изъ одной части уравненія въ другую.

Слѣдствіе II. *Всякое неравенство можно привести къ виду*

$$A > 0,$$

т.-е. къ неравенству, вторая часть котораго есть нуль.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно для этого всѣ члены собрать въ первую часть. Такъ, неравенство

$$5x^2 - 7x + 1 > 2x^2 + 3x + 4$$

эквивалентно неравенству

$$3x^2 - 10x - 3 > 0.$$

321. Начало III. *Помножая обѣ части неравенства на одно и то же количество*—**существенно-положительное**, *и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, эквивалентное данному.*

Требуется доказать, что неравенство

$$A > B \ . \ . \ . \ (1)$$

эквивалентно неравенству

$$AM > BM \ . \ . \ . \ (2)$$

при условіи: $M > 0$.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) неравенство $A > B$ эквивалентно неравенству

$$A - B > 0;$$

помноживъ положительное количество $A - B$ на положительное количество M, получимъ и произведеніе положительное, слѣд.

$$(A - B)M > 0, \quad \text{или} \quad AM - BM > 0,$$

откуда

$$AM > BM.$$

Итакъ, доказано, что изъ неравенства (1) слѣдуетъ (2).

2) Обратно: перенеся въ неравенствѣ $AM > BM$ вторую часть въ первую, найдемъ

$$AM - BM > 0, \quad \text{или} \quad (A - B)M > 0;$$

но множитель M положительнаго произведенія $(A - B)M$ положителенъ, слѣд. и другой множитель долженъ быть положителенъ, т.-е.

$$A - B > 0, \quad \text{откуда} \quad A > B;$$

т.-е. изъ неравенства (2) вытекаетъ (1).

Эквивалентность неравенствъ (1) и (2) такимъ образомъ доказана.

Слѣдствіе I. *Помножая обѣ части неравенства на одно и то же* **существенно-отрицательное** *количество и перемѣнивъ знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, эквивалентное данному.*

Т.-е. неравенство

$$A > B \ . \ . \ . \ (1)$$

эквивалентно неравенству

$$AM < BM\ .\ .\ .\ (2)$$

при условіи: $M < 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если M отрицательно, то $-M$ положительно, а потому, на основаніи начала III, помноживъ обѣ части неравенства (1) на $-M$ и сохранивъ тотъ же знакъ, получимъ неравенство

$$-AM > -BM\ .\ .\ .\ (3)$$

эквивалентное (1-му). Перенеся въ (3) члены изъ одной части въ другую, дадимъ ему видъ

$$BM > AM, \quad \text{или} \quad AM < BM.$$

Заключаемъ, что неравенство (1) эквивалентно (2-му).

Слѣдствіе II. *Умножая обѣ части неравенства на такого множителя, которого* **знакъ неизвѣстенъ**, *получимъ неравенство, котораго смыслъ неизвѣстенъ, т.-е. неизвѣстно — больше ли его первая часть второй, или меньше.*

Это очевидно, потому что знакъ неравенства сохраняется, когда множитель положителенъ, и измѣняется въ противный, когда множитель отрицателенъ.

Итакъ: *нельзя умножать обѣ части неравенства на такого множителя, котораго знакъ неизвѣстенъ.*

Слѣдствіе III. *Раздѣливъ обѣ части неравенства на одно и то же количество* M, *и не перемѣнивъ знакъ неравенства при* $M > 0$, *и перемѣнивши его знакъ при* $M < 0$, *найдемъ неравенство, эквивалентное данному.*

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на M — все равно что помножить на $\frac{1}{M}$, а для случая умноженія теорема доказана.

322 *Приложеніе.* Начало III съ вытекающими изъ него слѣдствіями имѣетъ важныя приложенія при вычисленіяхъ надъ неравенствами, а именно при *сокращеніи* неравенствъ и при *освобожденіи* ихъ *отъ дробей*.

Пусть, напр., требуется освободить отъ дробей неравенство

$$\frac{P}{Q} > \frac{R}{S}\ .\ .\ .\ (1)$$

Собравъ его члены въ первую часть, найдемъ эквивалентное ему неравенство

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{PS - QR}{QS} > 0\ .\ .\ .\ (2).$$

Умножить обѣ его части на QS нельзя, когда знаки количествъ Q и S неизвѣстны, потому что въ такомъ случаѣ неизвѣстенъ и знакъ произведенія QS. Каковы бы ни были знаки Q и S, квадратъ произведенія QS всегда будетъ положителенъ, а потому умноживъ обѣ части неравенства (2) на Q^2S^2 и сохранивъ знакъ неравенства, найдемъ

$$\frac{Q^2S^2(PS - QR)}{QS} > 0, \quad \text{или} \quad QS(PS - QR) > 0,$$

неравенство — эквивалентное (1)-му и представленное въ цѣломъ видѣ.

Пользуясь слѣдствіемъ III, можно сокращать неравенство, дѣля обѣ части его на общаго множителя; но эта операція возможна, когда извѣстенъ знакъ того множителя, на который сокращаемъ. Такъ напр. если въ неравенствѣ замѣчаемъ множителя, имѣющаго видъ квадрата или суммы квадратовъ, таковыхъ множителей можно сократить, не измѣняя знака неравенства: въ самомъ дѣлѣ, квадратъ всякаго количества и положительнаго и отрицательнаго всегда положителенъ, а слѣд. и сумма квадратовъ такова же. Такъ, имѣя неравенство

$$8(x^2-2x+2)(x^2+2x+1)(x-5)>0.$$

Замѣчаемъ, что множитель x^2+2x+1 есть ничто иное какъ $(x+1)^2$, и потому существенно-положителенъ; затѣмъ, множитель x^2-2x+2 равенъ $(x^2-2x+1)+1$, или $(x-1)^2+1$, т.-е. представляетъ сумму двухъ квадратовъ, а потому, при всякомъ x, существенно-положителенъ. Заключаемъ, что и произведеніе $8(x^2-2x+2)(x^2+2x+1)$, при всякихъ значеніяхъ x, существенно-положительно; сокративъ на него данное неравенство, замѣнимъ его простѣйшимъ неравенствомъ

$$x-5>0.$$

Имѣя неравенство

$$-5a^2(x-2)<0,$$

и замѣчая, что a^2, какъ квадратъ, всегда положителенъ (каковъ бы знакъ ни имѣло количество a), заключаемъ, что $-5a^2$ — существенно-отрицательно; а потому, раздѣливъ неравенство на $-5a^2$ и перемѣнивъ знакъ $<$ на $>$, найдемъ неравенство

$$x-2>0,$$

эквивалентное данному, но имѣющее простѣйшій видъ.

323. Начало IV. *Если обѣ части неравенства положительны, то возвышая ихъ въ одинаковую цѣлую положительную степень и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ неравенство эквивалентное данному.*

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай возвышенія въ квадратъ. Если дано неравенство

$$A>B, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ $A>0$ и $B>0$, то доказать, что неравенство

$$A^2>B^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

эквивалентно данному.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) Изъ неравенства (1) выводимъ:

$$A-B>0;$$

но какъ A и B положительны, то и

$$A+B>0.$$

Перемноживъ два положительныя количества, найдемъ и произведеніе положительное, слѣд.

$$(A-B)(A+B)>0, \quad \text{или} \quad A^2-B^2>0,$$

откуда

$$A^2 > B^2.$$

2) Обратно, если $A^2 > B^2$, то

$$A^2 - B^2 > 0, \quad \text{или} \quad (A + B)(A - B) > 0;$$

слѣдовательно, оба множителя: $A + B$ и $A - B$ должны быть одного знака; но какъ $A + B$ положительно (ибо $A > 0$ и $B > 0$), то и $A - B > 0$, откуда

$$A > B.$$

Эквивалентность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Слѣдствіе I. *Если обѣ части неравенства отрицательны, то возвысивъ ихъ въ квадратъ и измѣнивъ знакъ неравенства, получимъ неравенство, эквивалентное данному.*

То-есть, если дано неравенство

$$A > B, \ . \ . \ . (1)$$

причемъ $A < 0$ и $B < 0$, то доказать, что неравенство

$$A^2 < B^2 \ . \ . \ . (2)$$

эквивалентно данному.

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части (1) на -1, найдемъ ему эквивалентное неравенство

$$-A < -B,$$

гдѣ уже $-A$ и $-B$ положительны, а потому, по доказанному, возвысивъ въ квадратъ и не измѣнивъ знака неравенства, получимъ

$$A^2 < B^2,$$

эквивалентное неравенству $-A < -B$, а слѣд. и нер—ву $A > B$.

Слѣдствіе II. *Если обѣ части неравенства имѣютъ противоположные знаки, то нельзя ихъ возвышать въ квадратъ, не зная ихъ численной величины.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ неравенство

$$A > B,$$

[illegible] $A > 0$ и $B < 0$, и требуется доказать, что результатъ возвышенія въ квадратъ можетъ быть или $A^2 > B^2$, или $A^2 = B^2$, или $A^2 < B^2$.

Слѣдовательно:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B);$$

[illegible] $A > 0$ и $B < 0$ будетъ $A - B$ положительно; но мы не знаемъ знака суммы $A + B$, а потому неизвѣстенъ и знакъ разности $A^2 - B^2$; поэтому не можемъ сказать, будетъ ли $A^2 > B^2$, или $A^2 - B^2$, или $A^2 < B^2$.

Напримѣръ:

неравенство $+3 > -2$ приводитъ къ $+9 > +4$;
» $3 > -5$ » $+9 < 25$;
» $+3 > -3$ » » $+9 = +9$.

Слѣдствіе III. **Нельзя возвышать въ квадратъ такое неравенство, въ которомъ знаки частей неизвѣстны.**

Это непосредственно очевидно изъ предыдущаго.

324. Обобщеніе. *Если обѣ части неравенства положительны, то возвышая ихъ въ одинаковую цѣлую положительную степень и неизмѣняя при этомъ знакъ неравенства, получимъ неравенство эквивалентное данному.*

Требуется доказать, что если $A > 0$ и $B > 0$, а m — цѣлое положительное число, то неравенства

$$A > B \ldots (1) \quad \text{и} \quad A^m > B^m \ldots (2)$$

эквивалентны.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $B > 0$, то раздѣливъ обѣ части на B, найдемъ

$$\frac{A}{B} > 1,$$

что означаетъ, что $\frac{A}{B}$ есть неправильная дробь; но m-ая степень неправильной дроби есть также дробь неправильная, слѣд.

$$\frac{A^m}{B^m} > 1,$$

откуда, множа обѣ части на положительное количество B^m, находимъ

$$A^m > B^m.$$

Обратно, изъ неравенства (2) можно вывести (1). Въ самомъ дѣлѣ:

$$A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \ldots + B^{m-1}).$$

Въ силу неравенства (2) это произведеніе > 0; но второй множитель, какъ сумма положительныхъ членовъ, положителенъ, слѣд. и $A - B > 0$, откуда

$$A > B.$$

Слѣдствія. I. *Если количества* A *и* B *оба отрицательны, то возвышая обѣ части неравенства* $A > B$ *въ цѣлую положительную степень* m, *и не измѣняя знакъ неравенства при* m *нечетномъ, и напротивъ измѣняя его при* m *четномъ, получимъ неравенство, эквивалентное данному.*

Дано неравенство

$$A > B, \ldots (1)$$

въ которомъ $A < 0$ и $B < 0$. Положивъ $A = -A'$ и $B = -B'$, гдѣ уже A' и B' положительны, помножимъ обѣ части неравенства (1) на -1; найдемъ

$$-A < -B, \text{ или } A' < B'.$$

Такъ какъ A' и B' положительны, то по предыдущей теоремѣ имѣемъ

$$A'^m < B'^m.$$

Изъ равенствъ $A = -A'$ и $B = -B'$ имѣемъ: $A' = (-1).A$ и $B' = (-1).B$, откуда, по возвышеніи въ *m*-ю степень, находимъ: $A'^m = (-1)^m A^m$ и $B'^m = (-1)^m B^m$. Подставляя въ послѣднее неравенство, получимъ

$$(-1)^m . A^m < (-1)^m . B^m.$$

Если *m* — четное, то $(-1)^m$ есть число положительное; а потому, раздѣливъ на него послѣднее неравенство, не должны перемѣнять знакъ неравенства; напротивъ, при *m* нечетномъ, $(-1)^m < 0$ и дѣленіе неравенства на это число поведетъ за собою перемѣну знака неравенства. Такимъ образомъ, неравенство (1), въ которомъ $A < 0$ и $B < 0$, эквивалентно нер—ву

$$A^m < B^m$$

при *m*—четномъ; и нер—ву

$$A^m > B^m$$

при *m*—нечетномъ.

II. Когда части неравенства имѣютъ различные знаки, то слѣдуетъ различать два случая:

1) когда возвышаемъ неравенство въ *нечетную* степень, то степени сохранятъ тѣ знаки, какіе имѣли части неравенства, а потому и знакъ неравенства сохранится. Напр.

изъ $+2 > -7$ слѣдуетъ $(+2)^3 > (-7)^3$, или $+8 > -343$.

2) Когда возвышаемъ неравенство въ *четную* степень, то нельзя дать никакого правила: знакъ неравенства можетъ измѣниться или же сохраниться, или даже неравенство можетъ перейти въ равенство. Такъ:

$3 > -2$ приводитъ къ $(+3)^4 > (-2)^4$, или $+81 > +16$;
$2 > -5$ » » $(+2)^4 < (-5)^4$, или $+16 < +625$;
$+2 > -2$ » » $(+2)^4 = (-2)^4$, или $+16 = +16$.

III. *Если обѣ части неравенства положительны, то возводя ихъ въ одну отрицательную степень и перемѣняя знакъ неравенства, получимъ неравенство эквивалентное данному.*

Требуется доказать, что если

$$A > B . . . (1)$$

гдѣ $A > 0$ и $B > 0$, то неравенство

$$A^{-m} < B^{-m} . . . (2)$$

эквивалентно (1)-му.

Такъ какъ n — число положительное, то неравенство

$$A^n > B^n \; . \; . \; . \; (3)$$

эквивалентно (1). Раздѣливъ обѣ части на положительное количество $A^n . B^n$, найдемъ неравенство

$$\frac{1}{B^n} > \frac{1}{A^n}, \quad \text{или} \quad B^{-n} > A^{-n}, \quad \text{или, наконецъ,}$$

$$A^{-n} < B^{-n}.$$

эквивалентное (3), а потому и (1)-му.

325. Начало V. 1. *Каковы бы ни были знаки обѣихъ частей неравенства, извлекая корень нечетнаго порядка, должно сохранять знакъ неравенства.*

Это есть прямое слѣдствіе правила знаковъ при извлеченіи корня.
Такъ:

Изъ неравенства $+27 > +8$ имѣемъ: $\sqrt[3]{+27} > \sqrt[3]{+8}$, или $+3 > +2$;
» » $+27 > -8$ » $\sqrt[3]{+27} > \sqrt[3]{-8}$, или $+3 > -2$;
» » $-8 < 27$ » $\sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{27}$, или $-2 < 3$.

2. Если же показатель корня — четный, то, во-первыхъ, необходимо, чтобы обѣ части неравенства были положительны (въ противномъ случаѣ корни были бы мнимые, и не могло бы быть рѣчи о ихъ сравненіи); въ такомъ случаѣ каждый корень имѣетъ два значенія, равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку; и неравенство сохраняетъ знакъ, или измѣняетъ его, смотря по тому, беремъ ли положительныя, или отрицательныя значенія корней. Такъ:

неравенство $+49 > +25$

даетъ $\begin{cases} \sqrt{+49} > \sqrt{+25}, & \text{или} \quad +7 > +5; \\ -\sqrt{+49} < -\sqrt{+25}, & \text{или} \quad -7 < -5. \end{cases}$

Но если взять корни съ различными знаками, то очевидно, что отрицательный корень всегда будетъ меньше. Такъ

неравенство $+49 > +25$

даетъ $\begin{cases} \sqrt{49} > -\sqrt{25}, & \text{или} \quad +7 > -5; \\ -\sqrt{49} < +\sqrt{25}, & \text{или} \quad -7 < +5. \end{cases}$

Начала, относящіяся къ совмѣстнымъ неравенствамъ.

326. Если въ двухъ или нѣсколькихъ неравенствахъ первыя части больше вторыхъ, или первыя части меньше вторыхъ, то они называются неравенствами *одинаковаго смысла*. Такъ, неравенства

$$3 > -2 \quad \text{и} \quad a > b$$

суть два неравенства одинаковаго смысла.

Если же въ одномъ неравенствѣ первая часть больше второй, а въ другомъ первая меньше второй части, то ихъ называютъ неравенствами *противоположнаго смысла*. Таковы

$$a > b \quad \text{и} \quad c < d.$$

327 Начало VI. *Складывая почленно два или нѣсколько неравенствъ одинаковаго смысла, получимъ неравенство того же смысла; но оно не можетъ замѣнить одною изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства будутъ

$$A > B \quad \text{и} \quad A' > B'.$$

Изъ нихъ слѣдуетъ, что разности $A - B$ и $A' - B'$ положительны, а потому и сумма ихъ положительна; слѣд.

$$A - B + A' - B' > 0,$$

откуда, перенося $-B$ и $-B'$ во вторую часть, найдемъ

$$A + A' > B + B'.$$

Но это неравенство не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ, иначе говоря, система:

$$\left.\begin{array}{r} A > B \\ A + A' > B + B' \end{array}\right\}$$

не имѣетъ *необходимымъ* слѣдствіемъ:

$$A' > B'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства

$$A + A' > B + B',$$

перенесеніемъ членовъ въ первую часть выводимъ:

$$(A - B) + (A' - B') > 0;$$

и хотя изъ условія $A > B$ мы и знаемъ, что $A - B > 0$, однако отсюда нельзя заключить, чтобы и

$$A' - B' > 0$$

Слѣдствіе. *Нельзя почленно складывать два неравенства различнаго смысла*, ибо нельзя предвидѣть, которая сумма будетъ больше. Дѣйствіе въ этомъ случаѣ возможно только въ численныхъ примѣрахъ. Такъ

$$1)\ \begin{array}{r} 5 > 3 \\ 2 < 3 \\ \hline 7 > 6 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 5 > 3 \\ 1 < 7 \\ \hline 6 < 10 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 5 > 3 \\ 3 < 5 \\ \hline 8 = 8 \end{array}$$

328. Начало VII. *Можно сдѣлать почленное вычитаніе двухъ неравенствъ различнаго смысла; полученное неравенство будетъ одинаковаго смысла съ первымъ; но оно не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства суть:

$$A > A' \quad \text{и} \quad B < B'.$$

Мы заключаемъ изъ нихъ, что разности: $A - A'$ и $B' - B$ обѣ положительны, а потому и сумма ихъ положительна; слѣд.

$$A - A' + B' - B > 0,$$

или

$$A - B > A' - B'.$$

Но система

$$\left.\begin{array}{r} A > A' \\ A - B > A' - B' \end{array}\right\}$$

не имѣетъ необходимымъ слѣдствіемъ $B < B'$ и потому не необходимо эквивалентна данной.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $A - B > A' - B'$ имѣемъ

$$(A - A') - (B - B') > 0,$$

и хотя знаемъ, что $A - A' > 0$, но отсюда нельзя заключить, чтобы необходимо было и $B' - B > 0$.

Слѣдствіе. *Нельзя дѣлать почленнаго вычитанія двухъ неравенствъ одинаковаго смысла*, ибо нельзя напередъ знать относительную величину разностей; такъ

$$1)\ \begin{array}{r} 7 > 5 \\ 3 > 2 \\ \hline 4 > 3 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 7 > 5 \\ 3 > 1 \\ \hline 4 = 4 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 7 > 5 \\ 3 > -6 \\ \hline 4 < 11 \end{array}$$

329. Начало VIII. *Перемножая почленно два или нѣсколько неравенствъ одинаковаго смысла, части которыхъ положительны, получимъ неравенство того же смысла; но оно не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства суть:

$$A > B \quad \text{и} \quad A' > B',$$

причемъ: A, A', B, B' — положительны. Изъ данныхъ неравенствъ имѣемъ

$$A - B > 0 \quad \text{и} \quad A' - B' > 0,$$

а такъ какъ A' и B положительны, то и

$$(A - B)A' > 0 \quad \text{и} \quad (A' - B')B > 0;$$

складывая, находимъ

$$(A-B)A'+(A'-B')B>0, \quad \text{или} \quad AA'-BB'>0,$$

откуда

$$AA'>BB'.$$

Но изъ того, что

$$\left.\begin{array}{r} A>B \\ \text{и} \qquad AA'>BB' \end{array}\right\}$$

нельзя заключить, что и $A'>B'$, ибо сумма $(A-B)A'+(A'-B')B$ можетъ быть положительна, хотя бы $A'-B'$ и было отрицательно.

Эта теорема справедлива для какого угодно числа неравенствъ.

Пусть, напр., имѣемъ p неравенствъ

$$A_1>B_1, \quad A_2>B_2, \; . \; . \; . \; , \; A_p>B_p.$$

Примѣнимъ новый пріемъ доказательства, который полезенъ намъ будетъ и впослѣдствіи. Пріемъ этотъ основанъ на томъ замѣчаніи, что неравенство $A>B$ всегда можно замѣнить равенствомъ $A=B+x$, гдѣ $x>0$; въ самомъ дѣлѣ, это равенство означаетъ, что A *больше* B на x. Итакъ, данныя неравенства можемъ замѣнить равенствами

$$A_1=B_1+x_1, \quad A_2=B_2+x_2, \; . \; . \; . \; , \; A_p=B_p+x_p.$$

Перемноживъ ихъ, имѣемъ:

$$A_1A_2 \; . \; . \; . \; A_p=(B_1+x_1)(B_2+x_2) \; . \; . \; . \; (B_p+x_p),$$

или, раскрывъ скобки и перенеся членъ $B_1B_2 \; . \; . \; . \; B_p$ въ первую часть, имѣемъ:

$$A_1A_2 \; . \; . \; . \; A_p-B_1B_2 \; . \; . \; . \; B_p=\Sigma x_1(B_2+x_2) \; . \; . \; . \; (B_p+x_p)+ \; . \; . \; .$$

Такъ какъ вторая часть, какъ сумма положительныхъ членовъ, положительна, то и заключаемъ, что

$$A_1A_2 \qquad A_p>B_1B_2 \; . \; . \; . \; B_p.$$

Примѣчаніе. Для другихъ случаевъ нельзя формулировать никакого об-[illegible].

330 Начало IX. *Можно раздѣлить почленно одно на другое два неравенства разнаго смысла, если всѣ четыре части положительны, сохраняя такой знакъ неравенства, какъ въ дѣлимомъ; но новое неравенство не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть даны неравенства

$$A>B \quad \text{и} \quad C<D,$$

гдѣ A, B, C и D — положительны. Помноживъ $A>B$ на $D>C$, по предыдущей теоремѣ найдемъ:

$$AD>BC;$$

откуда, раздѣливъ обѣ части на положительное количество CD, имѣемъ:

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{D}.$$

Другое доказательство. Замѣнивъ первое изъ данныхъ неравенствъ равенствомъ: $A = B + x$, а второе равенствомъ $C = D - y$, гдѣ $x > 0$ и $y > 0$, и раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ:

$$\frac{A}{C} = \frac{B + x}{D - y};$$

вычтя изъ обѣихъ частей по $\frac{B}{D}$, получимъ:

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{B + x}{D - y} - \frac{B}{D},$$

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{Dx + By}{CD}.$$

Вторая часть положительна, слѣд. $\frac{A}{C}$ больше $\frac{B}{D}$.

Примѣчаніе. Для другихъ случаевъ нельзя формулировать общаго правила

Провѣрка заданныхъ неравенствъ.

331. Для провѣрки данныхъ неравенствъ не существуетъ никакого общаго правила; укажемъ методы наиболѣе употребительные.

I. Методъ возвышенія въ степень. Если въ подлежащемъ провѣркѣ неравенствѣ встрѣчается радикалъ, его изолируютъ и затѣмъ возвышаютъ обѣ части неравенства въ степень, изображаемую показателемъ корня. Пусть, напр., требуется доказать, что среднее ариѳметическое двухъ положительныхъ количествъ a и b больше ихъ средняго геометрическаго, т.-е. что

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Такъ какъ обѣ части неравенства положительны, то, возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ знакъ неравенства, замѣнимъ данное неравенство ему эквивалентнымъ

$$\frac{(a + b)^2}{4} > ab;$$

или, умноживъ обѣ части на 4 и собравъ всѣ члены въ первую часть:

$$(a + b)^2 - 4ab > 0, \quad \text{или} \quad (a - b)^2 > 0.$$

Такъ какъ квадратъ всякаго дѣйствительнаго количества положителенъ, то послѣднее неравенство вѣрно; поэтому вѣрно и эквивалентное ему данное неравенство.

332. II. Методъ разложенія на множителей. Переносятъ всѣ члены въ одну часть и разлагаютъ полученный полиномъ на множителей; справедливость провѣряемаго неравенства дѣлается очевидною.

Пусть, напр., требуется доказать, что при всякихъ значеніяхъ a, положительныхъ или отрицательныхъ,

$$3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2.$$

По перенесеніи въ первую часть, по раскрытіи скобокъ и по приведеніи замѣняемъ данное неравенство ему эквивалентнымъ:

$$2a^4-2a^3-2a+2>0,$$

или, по разложеніи на множителей, неравенствомъ:

$$2(a-1)^2(a^2+a+1)>0;$$

или, придавъ къ триному a^2+a+1 и вычтя изъ него $\frac{1}{4}$, найдемъ

$$2(a-1)^2\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}>0.$$

$2(a-1)^2$, очевидно, положительно; биномъ $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, какъ сумма двухъ положительныхъ количествъ, также положителенъ, а отсюда справедливость послѣдняго неравенства, а потому и эквивалентнаго ему перваго, очевидна.

333 III. Методъ превращенія полинома въ сумму квадратовъ. Переносятъ всѣ члены въ одну часть и разлагаютъ полученный полиномъ въ сумму квадратовъ; справедливость неравенства дѣлается очевидною.

Примѣръ I. Доказать справедливость неравенства

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc+1>0.$$

Его можно представить въ видѣ:

$$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2-2ac+a^2)+1>0,$$

или

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2+1>0,$$

что очевидно.

Примѣръ II. Доказать, что если $b^2-4ac<0$, то справедливо неравенство

$$\{bb'-2(ca'+ac')\}^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')>0.$$

Раскрывая и располагая по степенямъ количества b', можемъ этому неравенству дать видъ:

$$acb'^2-b(ca'+ac')b'+(ca'+ac')^2+a'c'(b^2-4ac)>0,$$

или

$$ac\left\{b' - \frac{b(ca' - ac')}{2ac}\right\}^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4ac}(ca' - ac')^2 > 0.$$

Изъ даннаго условія $b^2 - 4ac < 0$ выводимъ, что $4ac > b^2$, а потому $ac > 0$, равно и $4ac - b^2 > 0$; отсюда видно, что первая часть послѣдняго неравенства положительна, и стало быть оно вѣрно; поэтому вѣрно и эквивалентное ему заданное неравенство.

334. IV. Неравенства симметричныя относительно данныхъ буквъ. Когда неравенство симметрично относительно нѣкоторыхъ буквъ a, b, c, то предварительно условливаются въ относительной величинѣ этихъ буквъ; пусть, напр., a есть наименьшее изъ трехъ данныхъ количествъ: въ такомъ случаѣ b и c можно представить въ видѣ: $b = a + x$, $c = a + y$, гдѣ $x > 0$ и $y > 0$.

Пусть, наприм., требуется доказать, что если a, b, и c положительны, то имѣетъ мѣсто неравенство:

$$abc > (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b).$$

Положивъ $b = a + x$ и $c = a + y$, и подставивъ въ испытуемое неравенство, приводимъ задачу къ провѣркѣ неравенства

$$a(a + x)(a + y) > (a + x - y)(a + x + y)(a + y - x),$$

или

$$a\{a^2 + a(x + y) + xy\} - \{a^2 - (x - y)^2\}(a + x + y) > 0,$$

или

$$axy + (a + x + y)(x - y)^2 > 0;$$

справедливость этого неравенства очевидна, такъ какъ оба его члена положительны.

335. V. Иногда справедливость заданнаго неравенства можно доказать, показавъ, что оно есть слѣдствіе равенствъ или неравенствъ уже доказанныхъ или легко доказуемыхъ.

Примѣръ. Доказать, что если a, b и c положительны, то имѣетъ мѣсто неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc.$$

Такъ какъ a, b и c входятъ въ это неравенство симметрично, то мы могли бы примѣнить къ нему предыдущій способъ. Но можно доказать справедливость даннаго неравенства, исходя изъ неравенствъ:

$$a^2 + b^2 > 2ab \ (1), \quad b^2 + c^2 > 2bc \ (2), \quad c^2 + a^2 > 2ac \ (3).$$

Справедливость этихъ неравенствъ легко обнаружить; въ самомъ дѣлѣ, изъ очевиднаго неравенства $(a - b)^2 > 0$ или $a^2 + b^2 - 2ab > 0$ прямо имѣемъ $a^2 + b^2 > 2ab$. Такимъ же образомъ докажемъ (2) и (3).

Сложивъ неравенства (1), (2) и (3), получимъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac;$$

помноживъ обѣ части этого неравенства на положительное количество $a+b+c$, найдемъ, по упрощенія:

$$a^3+b^3+c^3>3abc,$$

что и требовалось доказать.

336 VI. Методъ заключенія отъ n къ $n+1$ и наоборотъ. Пусть требуется доказать, что если a и b положительны, всегда имѣютъ мѣсто неравенства

$$2\ (a^2+b^2)>(a+b)^2,$$
$$2^2.(a^3+b^3)>(a+b)^3,$$
$$2^3.(a^4+b^4)>(a+b)^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и вообще

$$2^{n-1}.(a^n+b^n)>(a+b)^n,$$

гдѣ n—цѣлое положительное число.

Первое неравенство доказать не трудно; въ самомъ дѣлѣ, перенеся $(a+b)^2$ въ первую часть, раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$a^2-2ab+b^2>0\quad\text{или}\quad(a-b)^2>0,$$

что вѣрно.

Второе неравенство приведется къ виду

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3>0,$$

или, замѣтивъ, что

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\quad\text{и}\quad(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2),$$

даемъ неравенству видъ

$$4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)(a^2+2ab+b^2)>0,$$

или

$$3(a+b)(a^2-2ab+b^2)>0,$$

или

$$3(a+b)(a-b)^2>0,$$

что очевидно.

Чтобы доказать общность закона, выражаемаго этими неравенствами, допустимъ, что онъ вѣренъ для показателя n, т.-е. что неравенство

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n\ .\ .\ .\ (1)$$

справедливо, и докажемъ, что въ этомъ предположеніи будетъ вѣрно и неравенство для показателя $n+1$, т.-е.

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1})>(a+b)^{n+1}\ .\ .\ .\ (2).$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части (1) на положительное количество $a+b$, найдемъ

$$2^{n-1}(a^n+b^n)(a+b)>(a+b)^{n+1}.$$

Слѣдовательно, достаточно показать, что

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1})>2^{n-1}(a^n+b^n)(a+b).$$

По сокращеніи на 2^{n-1}, по раскрытіи скобокъ во второй части и по упрощеніи, получимъ

$$a^{n+1}+b^{n+1}>ab^n+ba^n,$$

или

$$a^n(a-b)-b^n(a-b)>0,$$

или

$$(a^n-b^n)(a-b)>0,$$

неравенство очевидное, потому что оба множителя, a^n-b^n и $a-b$, всегда имѣютъ одинаковые знаки.

Итакъ, какъ скоро неравенство (1) провѣрено для нѣкотораго значенія n, мы можемъ заключить, что оно также вѣрно и для величины n, на единицу большей. Но мы доказали, что оно вѣрно для $n=2$, слѣд. оно вѣрно и для $n=3$; будучи же вѣрно для $n=3$, оно вѣрно и для $n=4$ и т. д.

Доказанное неравенство можно написать въ видѣ

$$\frac{a^n+b^n}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^n;$$

въ этой формѣ оно показываетъ, что *ариѳметическая средина n-хъ степеней двухъ чиселъ больше n-ой степени ариѳметической средины этихъ чиселъ.*

Можно распространить эту теорему на какое угодно число p положительныхъ количествъ $a, b, c, d, \ldots k, l$.

Взявъ четыре количества a, b, c, d, имѣемъ тождество:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n=\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^n,$$

и слѣд. по предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n<\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n+\left(\frac{c+d}{2}\right)^n}{2},$$

но мы имѣли:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{c+d}{2}\right)^n<\frac{c^n+d^n}{2};$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n<\frac{a^n+b^n+c^n+d^n}{4}.$$

Такимъ же точно образомъ докажемъ, что предложеніе вѣрно для 8, 16,..., 2^k положительныхъ количествъ. Чтобы доказать справедливость теоремы вообще, употребимъ пріемъ, впервые введенный французскимъ математикомъ *Коши;* пріемъ этотъ разнится отъ пріема Бернулли тѣмъ, что дѣлается заключеніе не отъ p къ $p+1$, а обратно: отъ $p+1$ къ p. Итакъ, допустивъ, что теорема справедлива для $p+1$ чиселъ, докажемъ, что она будетъ вѣрна и для p чиселъ.

Имѣемъ тождество

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)=\frac{\frac{p+1}{p}(a+b+c+\ldots+h)}{p+1}=\frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}}{p+1}$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k=\left(\frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}}{p+1}\right)^k\ldots(3).$$

Но, по допущенію, теорема вѣрна для $p+1$ количествъ; поэтому вторая часть равенства (3) меньше

$$\frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k+\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k}{p+1},$$

а слѣд. и

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k<\frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k+\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k}{p+1},$$

а потому и

$$\left(\frac{a+b+\ldots+h}{p}\right)^k<\frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k}{p}.$$

337. Доказательство нѣкоторыхъ замѣчательныхъ неравенствъ. Приведемъ доказательство нѣкоторыхъ теоремъ, имѣющихъ примѣненіе къ элементарной математикѣ, или же представляющихъ интересъ въ самомъ способѣ ихъ доказательства.

338. I. *Полусумма двухъ чиселъ, каковы бы ни были ихъ знаки, всегда заключается между этими числами.*

Пусть данныя числа будутъ a и b, и пусть

$$a<b\ldots(1).$$

Придавая къ обѣимъ частямъ по a, найдемъ:

$$2a<a+b,$$

откуда

$$a<\frac{a+b}{2}.$$

Придавая къ обѣимъ частямъ (1) по b, получимъ

$$a+b<2b,$$

откуда

$$\frac{a+b}{2}<b.$$

Слѣд.

$$a<\frac{a+b}{2}<b,$$

и теорема доказана. Эта теорема имѣетъ обширныя приложенія въ изслѣдованіи вопросовъ 2-й степени.

II. *Если дано нѣсколько дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, у которыхъ всѣ знаменатели имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, то дробь, которой числитель — суммѣ всѣхъ числителей, а знаменатель — суммѣ всѣхъ знаменателей, содержится между наименьшею и наибольшею изъ нихъ.*

Пусть наименьшая изъ данныхъ дробей будетъ m, а наибольшая М, тогда, по условію, имѣемъ

$$m \leqslant \frac{a_1}{b_1} \leqslant M, \quad m \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant M, \quad m < \frac{a_3}{b^3} \leqslant M, \quad \ldots \quad m < \frac{a^n}{b^n} \leqslant M \; \ldots (1).$$

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — всѣ > 0; въ такомъ случаѣ умноженіе на $b_1, b_2, \ldots$ не измѣнитъ смысла неравенствъ и мы получимъ

$$b_1 m \leqslant a_1 < b_1 M, \quad b_2 m \leqslant a_2 < b_2 M, \; \ldots \; b_n m < a_n < b_n M,$$

а складывая почленно эти неравенства, найдемъ

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant M(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Дѣленіе на положит. колич. $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ не измѣнитъ смысла неравенствъ, и мы найдемъ

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < M \; \ldots (2).$$

Пусть теперь $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — всѣ < 0; въ такомъ случаѣ умноженіе неравенствъ (1) на эти количества измѣнитъ смыслъ всѣхъ неравенствъ, и получится

$$b_1 m \geqslant a_1 \geqslant b_1 M, \quad b_2 m \geqslant a_2 \geqslant b_2 M, \cdots, \quad b_n m \geqslant a_n \geqslant b_n M,$$

откуда почленное сложеніе дастъ:

$$m(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)M.$$

Такъ какъ теперь $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 0$, то дѣленіе на эту сумму измѣнитъ смыслъ неравенствъ, и получится

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < M.$$

Такимъ образомъ снова получилось соотношеніе (2), и теорема доказана.

Напр., если даны дроби $\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{25}$, то

$$\frac{-5}{6} < \frac{-1 + 1 - 5 + 3 - 4}{2 + 3 + 6 + 4 + 25} < \frac{3}{4}.$$

Также, если даны дроби $\frac{1}{-3}, \frac{-3}{-7}, \frac{4}{-5}, \frac{-6}{-15}, \frac{-1}{-8}$, то

$$\frac{4}{-5} < \frac{1 - 3 + 4 - 6 - 1}{-3 - 7 - 5 - 15 - 8} < \frac{3}{-7}.$$

339. III. Теорема Коши. *Среднее ариѳметическое n положительныхъ количествъ a_1, a_2, a_3, . . . a_n, которыя не всѣ равны между собою, больше ихъ средняго геометрическаго.*

Для двухъ количествъ теорема уже доказана выше; слѣд.

$$\sqrt{a_1a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}.$$

Затѣмъ, имѣемъ тождество

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}$$

слѣдовательно

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} < \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} < \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2};$$

итакъ:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} < \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Такимъ же образомъ, замѣчая, что

$$\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = \sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\cdot\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}},$$

докажемъ, что теорема вѣрна для 8 количествъ; и вообще, что она справедлива для 2^k чиселъ.

Чтобы доказать, что теорема справедлива для какого угодно числа данныхъ количествъ, Коши доказываетъ, что если теорема вѣрна для $p+1$ количествъ, то она вѣрна и для p количествъ.

Имѣемъ тождество:

$$\sqrt[p]{a_1a_2a_3\ldots a_p} = \sqrt[p+1]{a_1a_2a_3\ldots a_p\,.\sqrt[p]{a_1a_2a_3\ldots a_p}};$$

но, по условію, теорема вѣрна для $p+1$ количества

$$a_1, a_2, \ldots a_p, \sqrt[p]{a_1\ldots a_p},$$

слѣдовательно

$$\sqrt[p+1]{a_1a_2a_3\ldots a_p\sqrt[p]{a_1a_2\ldots a_p}} < \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots a_p+\sqrt[p]{a_1a_2\ldots a_p}}{p+1}.$$

Замѣчая, что первая часть $= \sqrt[p]{a_1a_2a_3\ldots a_p}$, находимъ:

$$p\sqrt[p]{a_1a_2a_3\ldots a_p} < a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p,$$

откуда

$$\sqrt[p]{a_1a_2a_3\ldots a_p} < \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_p}{p},$$

что и слѣдовало доказать.

Впрочемъ, обобщеніе теоремы для случая, когда число n данныхъ количествъ не есть степень двухъ, можетъ быть сдѣлано инымъ пріемомъ. Пусть q будетъ цѣлое число, которое надо прибавить къ n, чтобы получить степень двухъ.

Обозначимъ ариѳметич. средину $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ данныхъ n чиселъ буквою b. Присоединивъ къ этимъ числамъ q чиселъ, изъ которыхъ каждое равнялось бы b, получимъ $n+q$ чиселъ:

$$\underbrace{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n}_{n},\quad \underbrace{b, b, b, \ldots b}_{q}.$$

Такъ какъ число $n+q$ есть степень двухъ, то по доказанному

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+q.b}{n+q} > \sqrt[n+q]{a_1a_2a_3\ \ldots\ a_n.b^q}.$$

Но $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n.b$; подставивъ въ послѣднее неравенство, найдемъ:

$$\frac{nb+qb}{n+q} > \sqrt[n+q]{a_1a_2\ \ldots\ a_n.b^q},\quad \text{или}\quad b > \sqrt[n+q]{a_1a_2\ \ldots\ a_n.b^q},$$

откуда

$$b^{n+q} > a_1a_2a_3\ \ldots\ a_n.b^q,$$

а по сокращеніи на b^q, по замѣнѣ b его величиною и по извлеченіи изъ обѣихъ частей n-го корня, находимъ:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ \ldots\ a_n}.$$

340. IV. Формула дѣленія при цѣломъ положительномъ m:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

позволяетъ вывести слѣдующія неравенства. Если $a>b>0$, то, подставивъ во вторую часть вмѣсто b количество a, мы этимъ вторую часть увеличимъ; слѣд.

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}<ma^{m-1}\ \ldots\ (1).$$

Напротивъ, подставивъ во второй части b вмѣсто a, мы ее уменьшимъ, и получимъ

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}>m.b^{m-1}\ \ldots\ (2).$$

Помноживъ неравенство (1) на положительное количество $a-b$ и вынеся за скобки a^{m-1}, найдемъ:

$$[a-m(a-b)]a^{m-1}<b^m\ \ldots\ (3).$$

Подобнымъ же образомъ изъ неравенства (2) найдемъ:

$$a^m>[b+m(a-b)]b^{m-1}\ \ldots\ (4).$$

Если $a - m(a-b)$ будетъ количество положительное, то, раздѣливъ неравенство (3) на $a - m(a-b)$, найдемъ:

$$a^{m-1} < \frac{b^m}{a - m(a-b)};$$

слѣдовательно это неравенство возможно при условіи

$$a > m(a-b), \quad \text{или} \quad b > \frac{m-1}{m} \cdot a.$$

Положивъ $m = n + 1$, получимъ:

$$a^n < \frac{b^{n+1}}{a - (n+1)(a-b)} \quad . \quad . \quad . (5).$$

гдѣ $a > b > \frac{n}{n+1} \cdot a$

Воспользуемся неравенствомъ (3), въ которомъ $a > b$, для вывода слѣдующаго неравенства:

$$\frac{z^k}{1.2.3.4 \ldots k} < \left(\frac{z}{\sqrt{k}}\right)^k$$

гдѣ z произвольное, а k—цѣлое положительное число.

Положивъ въ (3): $a = m + 1$ и $b = m$, найдемъ:

$$(m+1)^{m-1} < m^m, \quad \text{откуда} \quad \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m} < (m+1)^2.$$

Подставляя сюда вмѣсто m послѣдовательно 2, 3, 4 . . . $k-1$, имѣемъ:

$$2^2 = 2^2$$

$$\frac{3^3}{2^2} < 3^2$$

$$\frac{4^4}{3^3} < 4^2$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} < k^2.$$

Перемножая эти неравенства, получимъ

$$k^k < 2^2 . 3^2 . 4^2 \ldots k^2,$$

откуда, по извлеченіи квадратнаго корня, находимъ:

$$\sqrt{k^k} < 1 . 2 . 3 . 4 \ldots k$$

или

$$(\sqrt{k})^k < 1 . 2 . 3 . 4 \ldots k.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{s^k}{1.2.3\,.\,.\,.\,k} < \frac{s^k}{(\sqrt{k})^k}, \quad \text{или} \quad \frac{s^k}{1.2.3\,.\,.\,.\,k} < \left(\frac{s}{\sqrt{k}}\right)^k.$$

Рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

341. Нерѣдко случается, что неизвѣстное вопроса, по свойству самой задачи, должно заключаться между извѣстными предѣлами, и слѣд. должно удовлетворять нѣкоторымъ неравенствамъ. Отсюда задача о рѣшеніи неравенствъ.

Рѣшить неравенство значитъ найти предѣлы, между которыми должны заключаться значенія неизвѣстнаго, для того чтобы неравенство было удовлетворено.

342. Рѣшеніе одного неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Всякое неравенство первой степени съ 1 неизвѣстнымъ, по уничтоженіи дробей, по перенесеніи извѣстныхъ членовъ въ одну часть, а неизвѣстныхъ въ другую и по приведеніи, можетъ быть представлено въ видѣ

$$ax > b\;.\;.\;.\;(1).$$

Чтобы найти отсюда предѣлъ значеній x, нужно обѣ части раздѣлить на a, а при этомъ нужно знать знакъ коэффиціента a. Отсюда два случая:

I. Если $a > 0$, то раздѣливъ обѣ части на a, слѣдуетъ сохранить знакъ неравенства; такимъ образомъ найдемъ

$$x > \frac{b}{a}.$$

Заключаемъ, что въ этомъ случаѣ неравенству (1) удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія $\frac{b}{a}$, а потому $\frac{b}{a}$ называется *низшимъ предѣломъ* неизвѣстнаго x.

II. Если $a < 0$, то раздѣливъ обѣ части неравенства (1) на отрицательное количество a, должны перемѣнить смыслъ неравенства; найдемъ

$$x < \frac{b}{a},$$

т.-е. что неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, меньшія $\frac{b}{a}$; въ этомъ случаѣ $\frac{b}{a}$ будетъ *высшимъ предѣломъ* неизвѣстнаго.

Приводимъ примѣры:

Примѣръ I. Какъ нужно взять x, чтобы удовлетворить неравенству:

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{4} + 3 < 5x - \frac{x}{24} - 19.$$

Для освобожденія неравенства отъ дробей множимъ обѣ части на положительное число 24: знакъ неравенства отъ этого не измѣнится и мы получимъ

$$32x - 6 + 72 < 120x - x - 456,$$

или

$$32x + 66 < 119x - 456.$$

По перенесеніи членовъ и по приведеніи, найдемъ:

$$522 < 87x,$$

откуда, раздѣливъ обѣ части на положительное число 87, имѣемъ

$$x > 6.$$

Итакъ, всѣ числа большія 6 удовлетворяютъ данному неравенству.

Примѣръ II. Рѣшить неравенство

$$\frac{x}{a+b} - \frac{a}{a-b} > \frac{x}{a-b} - \frac{b}{a+b}.$$

Для уничтоженія дробей нужно бы было умножить обѣ части неравенства на $(a+b)(a-b)$ или $a^2 - b^2$; но какъ мы не знаемъ знака этого количества, то умножимъ обѣ части на $(a^2 - b^2)^2$, т.-е. на положительное количество; при этомъ знакъ неравенства не перемѣнится, и мы получимъ:

$$(a^2-b^2)(a-b)x - a(a^2-b^2)(a+b) > (a^2-b^2)(a+b)x - b(a^2-b^2)(a-b).$$

Перенеся неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую и сдѣлавъ надлежащія упрощенія, найдемъ:

$$-2b(a^2-b^2)x > (a^2-b^2)(a^2+b^2).$$

Далѣе приходится дѣлить обѣ части на коэффиціентъ при x, а при этомъ надо знать знакъ количества $b(a^2 - b^2)$; отсюда два случая:

1) Если $b(a^2-b^2) < 0$, то $-2b(a^2-b^2)$ будетъ количество положительное, и слѣдов. дѣля на него обѣ части неравенства, слѣдуетъ сохранить знакъ неравенства; такимъ образомъ получимъ

$$x > \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{-2b(a^2-b^2)},$$

или, по сокращеніи дроби на $a^2 - b^2$:

$$x > -\frac{a^2+b^2}{2b}.$$

2) Если $b(a^2-b^2) > 0$, то раздѣляя обѣ части неравенства на отрицательное количество $-2b(a^2-b^2)$, нужно измѣнить смыслъ неравенства, такъ что въ этомъ случаѣ, по сокращеніи, найдемъ:

$$x < -\frac{a^2+b^2}{2b}.$$

Провѣримъ найденные для x предѣлы на самомъ неравенствѣ.

Мы нашли, что при условіи: $b(a^2 - b^2) < 0$ неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія $-\frac{a^2 + b^2}{2b}$; слѣд. для повѣрки должны положить

$$x = -\frac{a^2 + b^2}{2b} + h,$$

гдѣ $h > 0$, и это значеніе x подставить въ данное неравенство. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{-\frac{a^2 + b^2}{2b} + h}{a + b} - \frac{a}{a - b} > \frac{-\frac{a^2 + b^2}{2b} + h}{a - b} - \frac{b}{a + b}, \quad . \ . \ . \ (1)$$

или:

$$\frac{-(a^2 + b^2) + 2bh}{2b(a + b)} - \frac{a}{a - b} > \frac{-(a^2 + b^2) + 2bh}{2b(a - b)} - \frac{b}{a + b};$$

помноживъ обѣ части на количество $2b(a + b)(a - b)$, по условію, меньшее нуля, найдемъ по упрощеніи

$$-2b^2h < +2b^2h \quad . \ . \ . \ (2).$$

Но h и b^2 положительны, слѣд. $-2b^2h$ отрицательно, а $+2b^2h$ положительно, и потому неравенство (2), а слѣд. и эквивалентное ему (1) вѣрно.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что при условіи $b(a^2 - b^2) > 0$ данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, меньшія $-\frac{a^2 + b^2}{2b}$.

343. Рѣшеніе нѣсколькихъ неравенствъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Пусть, наприм., имѣемъ два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$ax > b \quad \text{и} \quad a'x > b'.$$

1. Пусть мы нашли: изъ перваго: $x > m$, а изъ второго: $x > p$.

Если, при этомъ, $p > m$, то очевидно, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія p; такимъ образомъ p есть низшій предѣлъ x.

2. Если, рѣшая неравенства, найдемъ

$$x < m \quad \text{и} \quad x < p,$$

и если $p < m$, то очевидно, что всѣ значенія x, меньшія p, удовлетворяютъ даннымъ неравенствамъ, ибо такія значенія будутъ меньше и m. Въ этомъ случаѣ p есть высшій предѣлъ неизвѣстнаго.

3. Если найдемъ

$$x > m \quad \text{и} \quad x < p,$$

то когда $p > m$, очевидно, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x, заключающіяся между m и p: m есть низшій, а p высшій предѣлъ для x.

4. Если же, найдя

$$x > m \text{ и } x < p,$$

окажется, что $m > p$, то предѣлы будутъ противорѣчащіе; а это значитъ, что не существуетъ такихъ значеній x, которыя удовлетворяли бы совмѣстно даннымъ неравенствамъ. Самыя неравенства въ такомъ случаѣ называются *несовмѣстными*.

344. Нетрудно обобщить этотъ способъ. Пусть дана система n неравенствъ 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ x:

$$a_1x > b_1,\quad a_2x > b_2,\quad a_3x > b_3 \dots\dots a_nx > b_n.$$

Рѣшить ихъ — значитъ найти всѣ значенія x, удовлетворяющія всѣмъ заданнымъ неравенствамъ совмѣстно. Для этого рѣшимъ каждое неравенство отдѣльно, т.-е. найдемъ изъ него предѣлъ для x. При этомъ могутъ имѣть мѣсто 3 случая.

1) Можетъ случиться, что, рѣшая неравенства, мы найдемъ, что x долженъ *превышать* извѣстные предѣлы: напр.

$$x > h_1,\quad x > h_2,\quad x > h_3, \dots\dots, \quad x > h_n.$$

Если наибольшее изъ n чиселъ $h_1, h_2, \dots h_n$ будетъ h, то очевидно, что всѣ неравенства будутъ удовлетворены, если мы возьмемъ

$$x > h:$$

въ этомъ случаѣ существуетъ, слѣдов., *низшій предѣлъ* для неизвѣстнаго x.

2) Можетъ случиться, наоборотъ, что, рѣшая каждое изъ данныхъ неравенствъ, мы найдемъ, что x должно быть меньше нѣкоторыхъ предѣловъ; напр., что

$$x < k_1,\quad x < k_2, \dots\dots, \quad x < k_n.$$

Въ такомъ случаѣ, очевидно, мы удовлетворимъ даннымъ неравенствамъ, взявъ $x < k$, гдѣ k—наименьшее изъ чиселъ $k_1, k_2, \dots, k_n$. Это k дастъ *высшій предѣлъ* неизвѣстнаго.

3) Наконецъ, можетъ случиться, что, рѣшивъ заданныя неравенства, мы найдемъ, что q неравенствъ покажутъ, что x должно быть больше q чиселъ:

$$x > h_1,\quad x > h_2,\quad x > h_3, \dots\dots, \quad x > h_q;$$

а остальныя $n - q$ неравенствъ дадутъ для x высшіе предѣлы, напр.

$$x < k_1,\quad x < k_2,\quad x < k_3 \dots\dots x < k_{n-q}.$$

Если наибольшее въ ряду чиселъ $h_1, h_2, h_3, \dots$ будетъ h, а наименьшее въ ряду $k_1, k_2, k_3, \dots$ будетъ k, то очевидно, что мы должны взять:

$$h < x < k,$$

т.-е. даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ числа, большія h, но въ то же время меньшія k. При этомъ:

a) если $h < k$, то такія числа существуютъ, и слѣд., данныя неравенства совмѣстны;

b) если $h \geqslant k$, то, очевидно, нѣтъ чиселъ, удовлетворяющихъ данной системѣ неравенствъ, которыя, поэтому, несовмѣстны.

Рѣшеніе совмѣстныхъ неравенствъ первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

345. Когда имѣемъ нѣсколько неравенствъ первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными, то не всегда можно найти предѣлы для каждаго неизвѣстнаго.

Для нахожденія этихъ предѣловъ употребляютъ или *методъ сравниванія величинъ неизвѣстныхъ,* или *методъ уравниванія коэффиціентовъ* при одномъ и томъ же неизвѣстномъ.

346. Методъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ. Пусть требуется рѣшить два неравенства съ двумя неизвѣстными:

$$5x - 3y > 4,$$
$$8x + 2y > 25.$$

Выводя предѣлы для x, находимъ: изъ перваго неравенства

$$x > \frac{4 + 3y}{5},$$

и изъ второго

$$x > \frac{25 - 2y}{8}.$$

Такъ какъ получились два низшіе предѣла для неизвѣстнаго, то нельзя сказать, который изъ нихъ больше, и нельзя такимъ образомъ исключить x. Если же рѣшимъ неравенства относительно y, то найдемъ:

$$y < \frac{5x - 4}{3} \;\cdots (1) \quad \text{и} \quad y > \frac{25 - 8x}{2} \;\cdots (2)$$

и исключеніе y возможно. Въ самомъ дѣлѣ, первая дробь, какъ большая количества y, очевидно, больше второй дроби, какъ меньшей того же самаго y; слѣдов.

$$\frac{5x - 4}{3} > \frac{25 - 8x}{2}.$$

Рѣшивъ это неравенство, находимъ

$$x > \frac{83}{34}, \quad \text{или} \quad x > 2\frac{15}{34}.$$

Давая x какое угодно значеніе, большее $2\frac{15}{34}$, найдемъ, что каждому изъ нихъ соотвѣтствуютъ два предѣла для y, изъ неравенствъ (1) и (2). Такъ, взявъ $x = 3$, найдемъ, что

$$y < 3\frac{2}{3}, \quad \text{но} \quad y > \frac{1}{2}.$$

Взявъ $x=4$, найдемъ

$$y<5\frac{1}{3}, \quad \text{но} \quad y>-3\frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ, данныя неравенства могутъ быть удовлетворены безчисленнымъ множествомъ значенiй x и y.

Пусть требуется рѣшить три неравенства съ 3-мя неизвѣстными:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z+1>0, \\ x+2y-z-2<0, \\ 3x+2y-z-1>0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Рѣшивъ ихъ относительно x, находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} x>\frac{y-z-1}{2}, \\ x<z+2-2y \\ x>\frac{z-2y+1}{3}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Очевидно, что $z+2-2y$, какъ выраженiе большее x, больше каждой изъ дробей, меньшихъ x; слѣд. y и z удовлетворяютъ двумъ неравенствамъ:

$$\left.\begin{array}{l} z+2-2y>\frac{y-z-1}{2}, \\ z+2-2y>\frac{z-2y+1}{3}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Рѣшая эти два неравенства относительно y, найдемъ:

$$y<\frac{3z+5}{5}, \quad \text{и} \quad y<\frac{2z+5}{4} \dots (4)$$

Давая z произвольное значенiе, напр. $z=0$, изъ послѣднихъ неравенствъ находимъ:

$$y<1 \quad \text{и} \quad y<\frac{5}{4};$$

взявъ теперь какое угодно значенiе, меньшее 1, для y, положивъ, напримѣръ, $y=-1$, мы удовлетворимъ неравенствамъ (4).

Вносяя въ систему (2) $y=-1$ и $z=0$, найдемъ

$$x>-1, \quad x<4, \quad x>1.$$

Слѣдов., взявъ $1<x<4$, мы удовлетворимъ этимъ тремъ неравенствамъ. Такъ, напр.

$x=2$, $y=-1$, $z=0$; $x=2\frac{1}{2}$, $y=-1$, $z=0$; $x=3$, $y=-1$, $z=0$;

и т. п. удовлетворяютъ даннымъ неравенствамъ.

347. Методъ уравниванія коэффиціентовъ. Пусть требуется рѣшить неравенства:

$$5x - 3y > 4,$$
$$8x + 2y > 25.$$

Желая исключить x, мы должны умножить первое неравенство на 8, а второе на 5, послѣ чего получимъ

$$40x - 24y > 32 \quad \text{и} \quad 40x + 10y > 125.$$

Затѣмъ слѣдовало бы вычесть одно неравенство изъ другого; но такъ какъ мы не имѣемъ права вычитать неравенства одинаковаго смысла, то и нельзя этимъ пріемомъ исключить x. Но можно исключить y, помноживъ первое неравенство на 2, а второе на 3, и сложивъ ихъ, что позволительно; такимъ образомъ найдемъ:

$$34x > 83, \quad \text{откуда} \quad x > 2\frac{15}{34}.$$

Затѣмъ, продолжаемъ такъ, какъ указано въ § 346.

Когда предложенныя неравенства противоположнаго смысла, можно методомъ уравниванія коэффиціентовъ исключить неизвѣстное, имѣющее въ обоихъ неравенствахъ одинаковый знакъ. Такъ, имѣя неравенства

$$2x + 3y > 23,$$
$$3x + 2y < 22.$$

можно исключить x, умноживъ первое на 3, второе на 2 и вычтя второе изъ перваго. Такимъ путемъ найдемъ

$$y > 5.$$

Давая y какое угодно значеніе, большее 5, напр. 7, найдемъ два предѣла для x:

$$x > 1, \quad x < 2\frac{2}{3}.$$

Подобнымъ образомъ можно бы было исключить и y; вычитая утроенное второе изъ удвоеннаго перваго неравенства, нашли бы

$$x < 4.$$

Затѣмъ, для $x < 4$, можно изъ данныхъ неравенствъ найти предѣлы для y.

Примѣчаніе. Не всякую систему неравенствъ можно рѣшить.

Пусть, напр., даны неравенства

$$3x + 5y > 7, \quad 4x + 5y > 9.$$

Замѣчаемъ, во-первыхъ, что нельзя исключить y, такъ какъ непозволительно дѣлать почленное вычитаніе неравенствъ одинаковаго смысла. Также непримѣнимъ въ данномъ случаѣ и способъ подстановки, потому что рѣшивъ, напр., первое неравенство относительно y, найдемъ низшій предѣлъ для y, а замѣнивъ y этимъ предѣломъ въ выраженіи $4x - 5y$, мы послѣднее уменьшимъ, а слѣд. останется неизвѣстнымъ, будетъ ли оно необходимо больше 9. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что нельзя исключить и x.

Вообще, можетъ случиться, что нельзя найти предѣловъ ни для одного неизвѣстнаго; или же можно найти предѣлъ для одного неизвѣстнаго, или, наконецъ, и для обоихъ.

ГЛАВА XXV.

Изслѣдованіе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Рѣшенія: положительныя, отрицательныя, нулевыя, безконечныя, неопредѣленныя. — Примѣры изслѣдованія буквенныхъ вопросовъ.

348. Выразивъ условія задачи уравненіемъ и рѣшивъ это уравненіе, найденное рѣшеніе изслѣдуютъ. При этомъ надо различать два случая.

1. Когда задача дана въ числахъ, т.-е. въ формѣ частной задачи, то полученное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, не всегда представляетъ вмѣстѣ съ этимъ и отвѣтъ на вопросъ, алгебраическимъ выраженіемъ котораго служитъ уравненіе. Такъ, напр., если въ задачѣ требуется опредѣлить число людей, и мы, составивъ уравненіе и рѣшивъ его, найдемъ, что искомое число равно $\frac{3}{4}$ или $1\frac{1}{2}$, то подобныя числа, удовлетворяя уравненію, никоимъ образомъ не могутъ служить отвѣтомъ на предложенную задачу, ибо число людей можетъ выражаться только цѣлыми числами. Другой примѣръ. Если въ задачѣ требуется опредѣлить сторону треугольника, и рѣшивъ уравненіе, вытекающее изъ условій задачи, мы найдемъ, что длина стороны треугольника равна (— 3 ф.), то подобное рѣшеніе, удовлетворяя ур—нію, очевидно, не можетъ выражать длину стороны треугольника. Подобныя рѣшенія, не соотвѣтствующія смыслу задачи, указываютъ на ея невозможность. Розысканіе—гдѣ кроются причины невозможности вопроса, составляетъ задачу *изслѣдованія*.

Затѣмъ, иногда искомыя рѣшенія являются въ особыхъ формахъ — нуля, безконечности или неопредѣленности. Изслѣдованіе значенія подобныхъ формъ по отношенію къ задачѣ также составляетъ предметъ *изслѣдованія*.

2. Когда данныя вопроса выражены буквами, т.-е. задача предложена въ общемъ видѣ, то значенія неизвѣстныхъ выразятся формулами, составленными изъ этихъ буквъ. Опредѣленіе условій, которымъ должны удовлетворять данныя, для того чтобы задача была возможна, а также изученіе всѣхъ замѣчательныхъ обстоятельствъ, какія можетъ представить разсматриваемая формула при всевозможныхъ предположеніяхъ относительно данныхъ, составляетъ также предметъ *изслѣдованія*.

349. Если задача приводитъ къ уравненію первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, то это ур., по освобожденіи отъ дробей, по перенесеніи членовъ и по приведеніи, всегда можетъ быть приведено къ виду

$$ax = b \;.\;.\;.\; (1).$$

Для рѣшенія его, мы должны обѣ части раздѣлить на коэффиціентъ a при x.

Если a есть количество *конечное* и *отличное отъ нуля*, то сказанное дѣленіе позволительно, и мы получимъ ур.

$$x = \frac{b}{a} \;.\;.\;.\; (2)$$

эквивалентное (1). Такъ какъ ур. (2) удовлетворяется *только при* $x = \frac{b}{\text{[illegible]}}$, то заключаемъ, что и эквивалентное ему (1) имѣетъ въ данномъ случаѣ *одно единственное рѣшеніе*, равное $\frac{b}{a}$, которое можетъ быть или положительное, или отрицательное, смотря по тому, будутъ ли a и b имѣть знаки одинаковые или разные. При $b = 0$ это рѣшеніе обращается въ 0.

Но *если положить* $a = 0$, то мы уже не имѣемъ права множить обѣ части ур—нія (1) на дробь $\frac{1}{a}$, которая въ этомъ случаѣ равна ∞, ибо мы не можемъ утверждать, что новое уравненіе будетъ въ данномъ случаѣ необходимо эквивалентно данному. Цѣль изслѣдованія — розыскать, каково будетъ рѣшеніе уравненія (1) въ частномъ случаѣ $a = 0$, причемъ b можетъ быть или отлично отъ нуля, или также равно нулю.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что намъ предстоитъ разсмотрѣть слѣдующіе случаи:

1) a и b конечны и имѣютъ одинаковые знаки;
2) a и b конечны и имѣютъ противоположные знаки;
3) a — конечно; $b = 0$;
4) $a = 0$, b — конечно;
5) $a = 0$ и $b = 0$.

350. I. Положительныя рѣшенія. Когда a и b конечны и имѣютъ одинаковые знаки, то $x = \frac{b}{a}$, какъ частное отъ раздѣленія двухъ конечныхъ количествъ одинаковаго знака, означаетъ конечное *положительное* число. Это же самое непосредственно видно и изъ ур. (1); въ самомъ дѣлѣ, будутъ ли a и b оба положительны или оба отрицательны, выраженія ax и b могутъ быть уравнены только выборомъ опредѣленнаго *положительнаго* значенія для x.

По отношенію къ задачѣ положительныя значенія, получаемыя для неизвѣстнаго, *въ большинствѣ случаевъ* представляютъ вполнѣ опредѣленный и ясный отвѣтъ на нее, и этимъ самымъ показываютъ возможность задачи. Подтвержденіемъ этому служатъ всѣ задачи, рѣшенныя нами въ §§ 265—272.

Но есть случаи, когда положительныя рѣшенія, удовлетворяя уравненію, не представляютъ, однако, удовлетворительнаго отвѣта на задачу и этимъ обнаруживаютъ ея невозможность. Это бываетъ именно тогда, когда неизвѣстное вопроса, по самому смыслу задачи, должно удовлетворять такимъ условіямъ, которыя не могутъ быть выражены уравненіемъ, напр., когда неизвѣстное должно быть цѣлымъ числомъ, или не должно выходить изъ опредѣленныхъ предѣловъ. Въ такихъ случаяхъ положительное рѣшеніе, не удовлетворяющее этимъ особымъ условіямъ, укажетъ намъ, что задача невозможна.

Въ поясненіе приводимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I. *Партія рабочихъ, состоящая изъ мужчинъ и женщинъ, въ числѣ 50 человѣкъ, заработала въ 6 дней 170 руб., при чемъ каждый мужчина получалъ въ день по 1 рублю, а каждая женщина по 50 копѣекъ. Сколько было мужчинъ и женщинъ?*

Пусть мужчинъ было x; слѣд. число женщинъ равнялось $50 - x$; каждый мужчина получалъ въ день 1 р., слѣд. x мужчинъ въ 6 дней заработали $6x$ р.; $50 - x$ женщинъ, получая въ день по $\frac{1}{2}$ р. каждая, въ 6 дней получили $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (50 - x)$ или $3(50 - x)$ руб. По условію задачи:

$$6x + 3(50 - x) = 170.$$

Рѣшая ур., найдемъ, что число мужчинъ

$$x = 6\frac{2}{3};$$

а число женщинъ

$$50 - x = 43\frac{1}{3}.$$

Изслѣдованіе. Эти дробныя рѣшенія суть единственныя рѣшенія, удовлетворяющія уравненію; но уравненіе представляетъ точное и полное выраженіе условія задачи. Слѣд. другихъ рѣшеній задача не можетъ имѣть. Но по смыслу задачи рѣшенія должны быть числами цѣлыми; а какъ уравненіе дало дробныя рѣшенія, то заключаемъ, что задача невозможна.

О невозможности задачи можно судить по самымъ условіямъ; въ самомъ дѣлѣ, суммы, заработанныя мужчинами и женщинами, суть числа кратныя 3, слѣд. и полная сумма должна выражаться числомъ кратнымъ 3, между тѣмъ 170 не имѣетъ этого свойства. Въ этомъ и состоитъ несообразность условій, выразившаяся полученіемъ дробныхъ рѣшеній.

Примѣръ II. *Опредѣлить двузначное число, въ которомъ сумма цифръ равна 14, если извѣстно, что придавъ къ числу 72, найдемъ число обращенное?*

Пусть цифра единицъ равна u, тогда цифра десятковъ выразится формулою $14 - u$, самое же число формулою $(14 - u) . 10 + u$, обращенное будетъ $10u + (14 - u)$. По условію:

$$(14 - u) . 10 + u + 72 = 10u + 14 - u.$$

Рѣшая уравненіе, найдемъ. $u = 11$, $d = 3$.

Изслѣдованіе. Это цѣлое положительное рѣшеніе есть единственное рѣшеніе, удовлетворяющее уравненію; слѣд. задача не можетъ имѣть другого рѣшенія. Но [illegible] требуетъ, чтобы искомыя числа не превышали 9, а такъ какъ одно изъ нихъ превышаетъ этотъ предѣлъ, то заключаемъ, что задача невозможна.

О невозможности задачи можно судить по самымъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, двузначное число, у котораго сумма цифръ равна 14, можетъ быть или 59, или 68, или 77, или 86, или 95. Къ какому бы изъ этихъ чиселъ ни придали 72, никогда не получимъ обращеннаго числа, такъ какъ каждый разъ будутъ получаться числа трехзначныя.

351. II. Отрицательныя рѣшенія. Когда a и b конечны и имѣютъ противоположные знаки, то формула $x = \frac{b}{a}$ даетъ для неизвѣстнаго конечное *отрицательное* число. Это непосредственно видно и изъ уравненія $ax = b$; въ самомъ дѣлѣ, пусть напр. $a > 0$, а $b < 0$; очевидно, что ур. не можетъ быть удовлетворено никакимъ положительнымъ значеніемъ x, ибо произведеніе положительныхъ чиселъ a и x не можетъ дать отрицательнаго числа, но обѣ части могутъ быть уравнены выборомъ отрицательнаго значенія для x, ибо произведеніе положительнаго a на отрицательное x дастъ отрицательное количество b, при опредѣленномъ числовомъ значеніи x.

По отношенію къ отрицательнымъ рѣшеніямъ докажемъ слѣдующую теорему, примѣненіе которой тотчасъ же найдетъ себѣ мѣсто.

352. Теорема. *Два уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, разнящіяся между собою только знаками членовъ, содержащихъ неизвѣстное, имѣютъ рѣшенія равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два уравненія

$$ax + b = cx + d \ . \ . \ . \ (1) \quad \text{и} \quad -ax + b = -cx + d \ . \ . \ . \ (2).$$

Рѣшая первое, найдемъ

$$x = \frac{d - b}{a - c};$$

рѣшая второе, имѣемъ:

$$x = -\frac{d-b}{a-c}.$$

Сравнивая обѣ формулы для x, замѣчаемъ, что онѣ имѣютъ одинаковую величину, но противоположные знаки, такъ что если рѣшеніе 1-го ур. положительно, то рѣшеніе 2-го отрицательно, и наоборотъ.

Итакъ, если уравненіе 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ отрицательное рѣшеніе, то такое же точно по абсолютной величинѣ рѣшеніе, но взятое съ положительнымъ знакомъ, удовлетворяетъ уравненію, которое получается изъ перваго уравненія перемѣною x на $-x$.

353. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вопроса о томъ, какое значеніе можетъ имѣть отрицательное рѣшеніе по отношенію къ задачѣ, отвѣтомъ на которую оно служитъ. Разборъ нижеслѣдующихъ задачъ покажетъ намъ, что отрицательное рѣшеніе всегда служитъ указаніемъ на одно изъ слѣдующихъ обстоятельствъ: 1) или на нѣкоторую несообразность въ условіяхъ задачи,—несообразность, которую, впрочемъ, можно исправить, 2) или на неправильную постановку вопроса; 3) или на неправильное предположеніе, сдѣланное при составленіи уравненія изъ условій задачи и обусловленное не вполнѣ опредѣленною формою вопроса; или, наконецъ, 4) на абсолютную невозможность задачи.

354. Примѣръ I. *Найти цѣну одного фунта нѣкотораго товара, зная, что цѣна 3 фунтовъ его, уменьшенная 5-ю рублями, равна цѣнѣ 7 фунтовъ, увеличенной двумя рублями?*

Пусть цѣна фунта будетъ x руб. Изъ условія задачи непосредственно получаемъ уравненіе

$$3x - 5 = 7x + 2,$$

рѣшивъ которое, получаемъ

$$x = -\frac{7}{4}.$$

Изслѣдованіе. Получили отрицательное рѣшеніе; но искомая величина—цѣна фунта товара, по существу своему, положительна; заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе должно указывать на несообразность въ самыхъ условіяхъ задачи. Въ данномъ случаѣ эта несообразность прямо бросается въ глаза: въ самомъ дѣлѣ, цѣна 3 фунтовъ, уменьшенная 5-ю рублями, никакъ не можетъ равняться большей цѣнѣ (7-ми ф.), да еще увеличенной 2-мя рублями.

Попытаемся исправить несообразныя условія задачи; и для этого замѣтимъ, что если въ уравненіе, составленное по этимъ условіямъ, вмѣсто x подставимъ $-x$, то новое уравненіе

$$-3x - 5 = -7x + 2, \ldots (1)$$

будетъ имѣть рѣшеніе, по абсолютной величинѣ равное прежнему, а по знаку положительное, т.-е. новому ур—нію удовлетворяетъ

$$x = +\frac{7}{4}.$$

Оно будетъ представлять прямой отвѣтъ на задачу, соотвѣтствующую измѣненному ур—нію (1); поэтому, если окажется возможнымъ слегка измѣнить условія данной задачи, не измѣняя численной величины данныхъ, такъ чтобы новая задача соотвѣтствовала ур—нію (1), то положительное рѣшеніе и будетъ служить прямымъ отвѣтомъ на измѣненную задачу. Помноживъ обѣ части ур—нія (1) на -1, дадимъ ему видъ

$$3x + 5 = 7x - 2, \ldots (2).$$

Такъ какъ здѣсь къ $3x$ *придается* 5, а не вычитается 5, какъ было въ первоначальномъ ур—ніи; затѣмъ изъ $7x$ *вычитается* 2, а не придается, какъ въ первоначальномъ ур—ніи, то очевидно, что ур. (2) есть алгебраическое выраженіе условій слѣдующей задачи:

„найти цѣну фунта нѣкотораго товара, зная, что цѣна 3 фунтовъ его, *увеличенная 5-ю рублями*, равна цѣнѣ 7 фунтовъ, *уменьшенной* 2-мя рублями?“

Отвѣтъ: 1 р. 75 к. удовлетворяетъ этой задачѣ, какъ нетрудно убѣдиться повѣркою.

Возможность исправленія задачи въ данномъ случаѣ обусловливалась тѣмъ, что хотя искомое и есть здѣсь величина положительная, но данныя (5 р. и 2 р.) могутъ быть принимаемы въ двухъ противоположныхъ значеніяхъ — въ смыслѣ придаваемыхъ и вычитаемыхъ величинъ.

Примѣръ II. *Найти лѣта нѣкотораго лица, зная, что если изъ пять разъ взятаго числа его лѣтъ вычесть удвоенный возрастъ, который оно имѣло 20 лѣтъ тому назадъ, то въ остаткѣ получится число лѣтъ, какое оно будетъ имѣть черезъ 12 лѣтъ?*

Пусть будетъ x — требуемый возрастъ. Изъ условій задачи непосредственно получаемъ уравненіе

$$5x - (x - 20) \,.\, 2 = x + 12 \;.\;.\;.\; (1).$$

Рѣшивъ уравненіе, находимъ

$$x = -14.$$

Изслѣдованіе. Искомая величина — число лѣтъ лица, по существу своему, положительна; а потому отрицательное рѣшеніе указываетъ на невозможность задачи. Эту невозможность легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Если изъ упятереннаго числа лѣтъ лица вычесть удвоенное число лѣтъ, которое лицо это имѣло 20 лѣтъ тому назадъ, то получится $5x - (x - 20) \,.\, 2$ или $3x + 40$; при положительномъ x, каково это количество и должно быть по существу своему, $3x + 40$ никоимъ образомъ не можетъ равняться $x + 12$, т.-е. условія задачи невозможны. Попытаемся теперь измѣнить условія задачи, не измѣняя величины данныхъ, такъ, чтобы задача сдѣлалась возможною и имѣла рѣшеніемъ положительное число 14. Съ этою цѣлью измѣнимъ въ уравненіи (1) x въ $-x$, найдемъ:

$$-5x - (-x - 20)2 = -x + 12,$$

или, помноживъ обѣ части на -1:

$$5x - (x + 20)2 = x - 12.$$

По извѣстной теоремѣ, рѣшеніе этого ур—нія есть $x = +14$; оно представляетъ прямой отвѣтъ на задачу, соотвѣтствующую этому ур—нію. Задача эта, очевидно, такова:

„Найти возрастъ лица, зная, что если изъ упятереннаго числа его лѣтъ вычесть удвоенное число лѣтъ, *какое оно будетъ имѣть черезъ 20 лѣтъ* (а не: какое оно имѣло 20 л. тому назадъ, какъ было въ условіи данной задачи,, то въ остаткѣ получится число лѣтъ, какое это лицо имѣло *12 л. тому назадъ* (вмѣсто: будетъ имѣть черезъ 12 л., какъ дано было въ условіи задачи).

Легко провѣрить, что число 14 удовлетворяетъ условіямъ этой измѣненной задачи.

Примѣръ III. *Отцу 40 лѣтъ, а сыну 13; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вчетверо старше сына?*

Положимъ, что черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени отецъ будетъ вчетверо старше сына; слѣд. отцу будетъ $40 + x$, а сыну $13 + x$ лѣтъ; и по условію задачи имѣемъ ур—ніе

$$40 + x = 4(13 + x) \;.\;.\;.\; (1).$$

Рѣшивъ это ур., найдемъ

$$x = -4$$

Изслѣдованіе. Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ должно бы было служить положительное рѣшеніе; отрицательное рѣшеніе указываетъ, что вопросъ невозможенъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ онъ заданъ. Невозможность вопроса можно обнаружить слѣдующимъ образомъ. Отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына въ настоящее время выражается неправильною дробью $\frac{40}{13}$, которой величина *меньше* 4, и требуется узнать, сколько нужно придать къ числителю и знаменателю, чтобы дробь сдѣлалась равна 4, т.-е. чтобы она *увеличилась*. Но легко видѣть, что отъ приданія по-ровну къ членамъ неправильной дроби величина ея не увеличивается, а уменьшается; въ самомъ дѣлѣ, взявъ неправильную дробь $\frac{a}{b}$ (гдѣ, слѣд., $a>b$), и придавъ къ членамъ ея по m, получимъ дробь $\frac{a+m}{b+m}$; приведя обѣ дроби къ общему знаменателю, найдемъ, что первая $=\frac{ab+am}{b(b+m)}$, а вторая $\frac{ab+bm}{b(b+m)}$; сравнивая числителей и замѣчая, что $am>bm$, такъ какъ $a>b$, находимъ, что дробь дѣйствительно уменьшилась. Итакъ, постановка вопроса сдѣлана неправильно, что и обнаружилось въ рѣшеніи полученіемъ отрицательнаго отвѣта.

Это отрицат. рѣшеніе указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ слѣдуетъ правильно поставить вопросъ, именно, что слѣдуетъ спросить: *сколько лѣтъ тому назадъ* отецъ былъ вчетверо старше сына?

Что вопросъ долженъ быть измѣненъ въ этомъ смыслѣ, — это показываетъ и тотъ пріемъ, который служилъ для исправленія несообразныхъ условій въ двухъ предыдущихъ задачахъ. Подставивъ въ ур. (1) $-x$ вмѣсто x, найдемъ ур.

$$40-x=4(13-x),$$

которое, очевидно, служитъ алгебраическимъ выраженіемъ условій вопроса:

„Въ настоящее время отцу 40, а сыну 13 лѣтъ; сколько лѣтъ тому назадъ отецъ былъ вчетверо старше сына?" Положительное рѣшеніе $x=4$ и служитъ прямымъ отвѣтомъ на эту задачу, какъ легко убѣдиться въ этомъ повѣркою.

Примѣръ IV. *Изъ двухъ игроковъ* А *и* В *первый имѣетъ 400 р., а второй 120 р; послѣ нѣсколькихъ игръ у* А *оказалось втрое болѣе, чѣмъ у* В. *Сколько выигралъ А?*

Пусть А выигралъ x рублей; ур—ніе будетъ

$$400+x=3(120-x),$$

откуда

$$x=-10.$$

Изслѣдованіе. Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ служило бы положительное рѣшеніе; отрицательное рѣшеніе показываетъ, что вопросъ невозможенъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ онъ заданъ. Невозможность вопроса легко обнаружить. Лицо А, имѣя до начала игры больше чѣмъ втрое лица В, послѣ выигрыша, очевидно, не можетъ имѣть втрое больше денегъ чѣмъ у В. Поэтому, вопросъ: „сколько выигралъ А" поставленъ неправильно. Отрицательный знакъ рѣшенія указываетъ — какъ должно правильно поставить вопросъ, именно, что нужно спросить: „сколько руб. А проигралъ?" Къ тому же заключенію приведетъ и указанный выше пріемъ истолкованія отрицательныхъ рѣшеній; въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ ур—ніе $-x$ вмѣсто x, найдемъ.

$$400-x=3(120+x);$$

положительное рѣшеніе $x=+10$ этого ур—нія и служитъ прямымъ отвѣтомъ на вопросъ, ему соотвѣтствующій: „изъ двухъ игроковъ А имѣлъ 400 руб., В — 120 руб.; послѣ нѣсколькихъ игръ у А оказалось втрое болѣе чѣмъ у В. Сколько *проигралъ А?*"

Примѣръ V. *Два поѣзда идутъ равномѣрно въ одномъ направленіи къ станціи, отстоящей отъ мѣста выхода перваго поѣзда на 200 верстъ, а отъ мѣста выхода втораго на 90 верстъ. Первый поѣздъ проходитъ 25 верстъ въ часъ, второй 14 верстъ. Опредѣлить разстояніе точки встрѣчи поѣздовъ отъ станціи, полагая, что оба поѣзда выходятъ въ одно время?*

Черт. 18.

Пусть поѣзда выходятъ изъ A и B и ѣдутъ къ станціи C; такъ какъ нельзя заранѣе сказать, встрѣтятся ли поѣзда не доѣзжая станціи C, или проѣхавши ее, то для составленія уравненія необходимо сдѣлать то или другое допущеніе. Итакъ, предположимъ, что точка встрѣчи находится въ разстояніи x верстъ *не доѣзжая* до станціи C, въ нѣкоторой точкѣ R. Первый поѣздъ, выходящій изъ A, проходитъ разстояніе AR, равное $200 - x$ вер., дѣлая по 25 верстъ въ часъ, а потому пройдетъ все разстояніе AR въ $\frac{200 - x}{25}$ часовъ; второй, дѣлая въ часъ по 14 в., пройдетъ разстояніе $BR = 90 - x$ в., въ $\frac{90 - x}{14}$ час. Выходя со станцій A и B въ одно время, они употребляютъ на прохожденіе разстояній AR и BR одинаковое число часовъ, а потому

$$\frac{200 - x}{25} = \frac{90 - x}{14} \; . \; . \; . \; (1)$$

откуда $x = -50$ верстамъ.

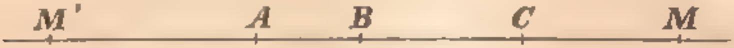
Изслѣдованіе. Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ служило бы положительное рѣшеніе; посмотримъ, какъ объяснить въ данномъ случаѣ происхожденіе отрицательнаго отвѣта? Обращаясь къ условіямъ задачи, не находимъ въ нихъ никакой несообразности: поѣздъ, выходящій со станціи A, двигаясь скорѣе поѣзда, выходящаго изъ B, долженъ догнать его гдѣ-нибудь вправо отъ точки B. Слѣд., не въ условіяхъ задачи должно искать источникъ отрицательнаго отвѣта. Обращаясь затѣмъ къ вопросу, замѣчаемъ, что онъ поставленъ не вполнѣ опредѣленно, такъ какъ въ немъ не указано гдѣ искать точку встрѣчи — не доѣзжая станціи C, или за нею. Въ виду этой неполной ясности требованія, пришлось при составленіи ур—нія сдѣлать одно изъ двухъ предположеній: или что поѣзда встрѣтятся влѣво отъ C, или что встрѣча ихъ произойдетъ вправо отъ C. Мы сдѣлали первое предположеніе, и получили отрицательный отвѣтъ, который и указываетъ, что слѣдовало сдѣлать противное этому предположеніе. Предположивъ, что встрѣча произойдетъ вправо отъ C, въ нѣкоторой точкѣ R', отстоящей отъ C на x верстъ, получимъ ур—ніе

$$\frac{200 + x}{25} = \frac{90 + x}{14} \; . \; . \; . \; (2)$$

котораго положительное рѣшеніе $x = +50$ и служитъ прямымъ отвѣтомъ на вопросъ „въ какомъ разстояніи за станціей C оба поѣзда встрѣтятся?" Замѣтимъ, что здѣсь ур. (2) получается изъ (1) перемѣною x въ $-x$.

Въ данномъ примѣрѣ отрицательное рѣшеніе получилось не отъ несообразности задачи, но отъ ложнаго предположенія, сдѣланнаго при составленіи ур—нія. Абсолютная величина отриц. рѣшенія, взятая съ положительнымъ знакомъ, представляетъ отвѣтъ на задачу, но представляетъ неизвѣстное съ значеніемъ, прямо противоположнымъ тому, какое ему придавали при составленіи уравненія.

Примѣръ VI. *Три точки* A, B *и* C *находятся на одной прямой, причемъ точка* B *лежитъ между двумя другими; разстояніе* AB = 2 *фут.*, AC = 5 *ф. На* *продолженіи прямой, соединяющей точки A и C, найти такую точку M, которой разстояніе отъ точки B было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея разстояніями отъ точекъ A и C?*



Черт. 19.

Точка M можетъ находиться или вправо отъ точки C, или влѣво отъ точки A, и a priori нельзя сказать, какое изъ этихъ двухъ положеній она должна занимать. Допустимъ, что она должна находиться вправо отъ C, и обозначимъ разстояніе ея отъ A буквою x. Уравненіе задачи будетъ

$$(x-2)^2 = x(x-5) \quad . \; . \; (1).$$

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ: $x = -4$.

Изслѣдованіе. Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ было бы положительное рѣшеніе. Затѣмъ, такъ какъ условія задачи не содержатъ никакой несообразности, то заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе обусловливается единственно ложнымъ предположеніемъ, сдѣланнымъ при составленіи уравненія. Поэтому, положимъ, что искомая точка находится влѣво отъ A, и обозначимъ по прежнему разстояніе AM буквою x. Уравненіе задачи будетъ въ этомъ предположеніи такое:

$$(x+2)^2 = x(x+5) \; . \; . \; . \; (2).$$

Но если въ ур. (1) перемѣнимъ x въ $-x$, то найдемъ

$$(-x-2)^2 = -x(-x-5), \quad \text{или} \quad (x+2)^2 = x(x+5),$$

т.-е. ур. (2). Изъ этого прямо заключаемъ, что корень ур—нія (2) отличается отъ корня ур—нія (1) только знакомъ, и потому равенъ $+4$. Итакъ, искомая точка находится влѣво отъ A, въ разстояніи $= 4$ ф. отъ этой точки.

Такимъ образомъ и въ этой задачѣ отрицательное рѣшеніе указывало только на ложное предположеніе, сдѣланное относительно положенія искомой точки при составленіи уравненія.

Примѣръ VII. *Имѣемъ двухъ сортовъ чай: въ 5 руб. и въ 8 руб. фунтъ. Сколько нужно взять каждаго сорта, чтобы составить 6 фунт. цѣною въ 10 р. за фунтъ?*

Если перваго сорта возьмемъ x ф., то втораго нужно взять $6-x$ ф. Цѣна перваго будетъ $5x$ р., цѣна втораго $8(6-x)$ р., цѣна всей смѣси $5x+8(6-x)$; по условію:

$$5x+8(6-x)=60,$$

откуда

$$x=-4.$$

Изслѣдованіе. Искомое данной задачи есть величина существенно положительная, а потому отрицательное рѣшеніе здѣсь не имѣетъ смысла. Измѣнивъ въ ур—ніи x на $-x$, найдемъ ур., котораго рѣшеніе будетъ $+4$, но подобрать задачу, соотвѣтствующую измѣненному ур—нію, и однородную съ данной, въ этомъ случаѣ нельзя. Обстоятельство это указываетъ на то, что задача абсолютно невозможна. И дѣйствительно, изъ двухъ сортовъ чаю — въ 5 и въ 8 р. за фунтъ нельзя составить смѣси, цѣна одного фунта которой превышала бы эти цѣны.

Примѣръ VIII. *За входъ въ музей взимается плата двоякаго рода, а именно: постоянная въ 20 коп., назначаемая на содержаніе богадѣльни, и перемѣнная, пропорціональная числу часовъ, проведенныхъ посѣтителемъ въ музеѣ.*

причемъ за каждый часъ берется по 5 коп.; этотъ сборъ назначается на новыя пріобрѣтенія. Однажды 60 человѣкъ вошли въ музей въ полдень, и вышли всѣ въ одно время. Во сколько часовъ они оставили музей, если весь сборъ былъ равенъ 9 рублямъ?

Пусть x — будетъ число часовъ отъ полудня до момента выхода посѣтителей изъ музея. Сборъ равенъ, съ одной стороны, 900 коп., а съ другой $(20+5x).60$ к. Уравненіе задачи есть

$$(20+5x).60=900,$$

откуда

$$x=-1.$$

Изслѣдованіе. Хотя неизвѣстное въ данной задачѣ есть время, которое можно считать въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ (до полудня и по полудни), но очевидно, что въ предложенной задачѣ рѣчь идетъ объ абсолютномъ количествѣ часовъ, проведенныхъ посѣтителями въ музеѣ. Поэтому задача требуетъ положительнаго рѣшенія. Подставивъ въ ур—ніе $-x$ вмѣсто x, мы конечно получимъ ур—ніе, которое будетъ имѣть положительное рѣшеніе $x=+1$; но измѣнить задачу такъ, чтобы она соотвѣтствовала измѣненному ур—нію, оказывается невозможнымъ. Такимъ образомъ, отрицательное рѣшеніе указываетъ, въ данномъ случаѣ, на абсолютную невозможность задачи. Невозможность задачи состоитъ въ томъ, что полный сборъ (9 руб.) меньше даже суммы, получаемой отъ одного 20-ти копеечнаго сбора со всѣхъ 60 лицъ, составляющей 12 р., а это, очевидно, нелѣпо.

355. Заключеніе. Разобранные примѣры приводятъ къ тому заключенію, что полученіе отрицательныхъ рѣшеній указываетъ: или 1) на несообразность самыхъ условій задачи, какъ въ примѣрахъ I и II; или 2) на неправильную постановку вопроса, какъ въ примѣрахъ III и IV, или 3) на неправильное предположеніе, сдѣланное при составленіи ур—нія, какъ въ примѣрахъ V и VI; или, наконецъ, 4) на абсолютную невозможность задачи (примѣры VII и VIII).

Для *истолкованія смысла отрицательнаго рѣшенія* всегда употребляется одинъ и тотъ же пріемъ: въ уравненіе, вытекающее изъ условій задачи, вмѣсто x подставляютъ $-x$, и получаютъ такимъ образомъ новое ур—ніе, корень котораго имѣетъ прежнюю абсолютную величину, но положительный знакъ. Затѣмъ пытаются, *не измѣняя численнаго значенія данныхъ*, подобрать задачу, которая соотвѣтствовала бы измѣненному уравненію. Если эта попытка будетъ имѣть успѣхъ, то слѣдуетъ заключить, что отрицательное рѣшеніе означало только нѣкоторую неправильность въ условіяхъ, либо въ постановкѣ вопроса, либо въ предположеніи при составленіи ур—нія, и положительное рѣшеніе измѣненнаго ур—нія будетъ служить прямымъ отвѣтомъ на исправленную задачу. Если же сказанная попытка будетъ безуспѣшна, то слѣдуетъ заключить, что задача абсолютно невозможна.

356. III. **Нулевыя рѣшенія.** Когда a конечно, а $b=0$, тогда $x=\frac{0}{a}$; а такъ какъ частное отъ раздѣленія нуля на конечное количество есть нуль, то

$$x=0.$$

Обращаясь къ уравненію, находимъ, что при $b=0$, оно принимаетъ видъ $ax=0$; но чтобы произведеніе двухъ множителей, одинъ изъ которыхъ конеченъ, равнялось 0, необходимо, чтобы другой множитель равнялся 0; итакъ, ур. не можетъ быть удовлетворено никакимъ инымъ значеніемъ неизвѣстнаго, кромѣ нуля. Такое рѣшеніе называется *нулевымъ*.

Если по смыслу задачи неизвѣстное можетъ быть нулемъ, то нулевое рѣшеніе даетъ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ; если же искомое, по смыслу вопроса, означаетъ число не равное нулю, то полученіе нулевого рѣшенія укажетъ на невозможность задачи.

Примѣръ I. *Отцу 57 лѣтъ, а сыну 19, черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ втрое старше сына?*

Означивъ искомое буквою x, будемъ имѣть ур—ніе

$$57 + x = 3(19 + x),$$

или

$$57 + x = 57 + 3x, \quad \text{или} \quad 2x = 0, \quad \text{откуда} \quad x = 0.$$

Отвѣтъ этотъ даетъ удовлетворительное рѣшеніе вопроса, показывая, что уже въ настоящее время отецъ втрое старше сына; дѣйствительно: $57 = 19 \times 3$.

Примѣръ II. *Знаменатель дроби равенъ* $\frac{7}{8}$ *ея числителя; если же къ числителю придать 5, а къ знаменателю 10, то дробь обратится въ* $\frac{1}{2}$. *Найти дробь?*

Означивъ числителя искомой дроби буквою x, имѣемъ ур—ніе

$$\frac{x+5}{\frac{7}{8}x+10} = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad x = 0.$$

Этотъ отвѣтъ обнаруживаетъ, что такой дроби, какъ требуется въ задачѣ, не существуетъ.

357. IV. Безконечныя рѣшенія. Если $a = 0$, $b \gtrless 0$, общая формула принимаетъ видъ

$$x = \frac{b}{0} = \infty;$$

это значитъ, что x безконечно-велико; обращаясь къ уравненію, находимъ, что оно въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ

$$0 \cdot x = b,$$

и требуетъ нахожденія такого числа, которое, будучи умножено на нуль, давало бы конечное произведеніе b. Но мы знаемъ, что нуль, умноженный на конечное количество, даетъ всегда нуль; а между тѣмъ вторая часть ур—нія отлична отъ нуля, и слѣд. *невозможно удовлетворить уравненію никакимъ конечнымъ значеніемъ* x. Итакъ, безконечныя рѣшенія служатъ признакомъ невозможности удовлетворить ур—нію конечнымъ значеніемъ неизвѣстнаго.

Но не всегда такія рѣшенія означаютъ невозможность задачи. Когда, по смыслу задачи, неизвѣстное должно быть конечнымъ количествомъ, то безконечное рѣшеніе укажетъ невозможность задачи.

Примѣръ. *Найти число, котораго половина, сложенная съ его третью, превышала бы на 6 единицъ пять разъ взятый избытокъ четверти этого числа надъ его двѣнадцатою долею.*

Называя искомое число буквою x, получимъ уравненіе

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{12}\right) + 6.$$

Освобождая это ур. отъ дробей, находимъ

$$10x = 10x + 72, \quad \text{или} \quad (10 - 10)x = 72, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{72}{10 - 10} = \frac{72}{0} = \infty.$$

Полученное безконечное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи. О невозможности задачи можно заключить a priori, измѣнивъ нѣсколько форму заданія. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ какого-нибудь числа составляютъ вмѣстѣ $\frac{5}{6}$ его, а избытокъ $\frac{1}{4}$ надъ $\frac{1}{12}$ числа составляетъ $\frac{1}{6}$ этого числа; а потому задача можетъ быть выражена такъ: „найти число, $\frac{5}{6}$ котораго превышаютъ на 6 единицъ $\frac{5}{6}$ того же числа?"

Въ этой формѣ нелѣпость задачи становится очевидною.

Когда неизвѣстное есть величина *вспомогательная*, то случается, и именно въ вопросахъ геометрическихъ, что безконечное значеніе x не указываетъ невозможности задачи. Такъ, когда для опредѣленія положенія прямой, удовлетворяющей различнымъ геометрическимъ условіямъ, принимаютъ за неизвѣстное разстояніе между точкою пересѣченія этой прямой съ данною прямою и точкою, взятою на этой второй прямой, то очевидно, что безконечное значеніе неизвѣстнаго укажетъ на параллельность обѣихъ прямыхъ.

Примѣръ. *Къ двумъ кругамъ, которыхъ радіусы равны* R *и* r, *провести общую внѣшнюю касательную* (черт. 23).

Задача будетъ рѣшена, если мы опредѣлимъ положеніе точки T, въ которой искомая касательная встрѣчаетъ линію центровъ. Примемъ за неизвѣстное разстояніе точки T отъ центра O; изъ подобія треугольниковъ OAT и oaT имѣемъ пропорцію

$$TO : To = OA : oa,$$

или, положивъ: $OA = R$, $oa = r$, $Oo = d$ и $OT = x$:

$$x : (x - d) = R : r, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{dR}{R - r}.$$

Сдѣлавъ $R = r$, найдемъ: $x = \frac{dR}{0} = \infty$. Но это безконечное рѣшеніе отнюдь не означаетъ невозможности задачи: оно показываетъ только, что при данномъ условіи ($R = r$) точка T удалилась въ безконечность, иными словами, что общая касательная приняла особое положеніе относительно линіи центровъ, а именно сдѣлалась параллельна этой линіи. И въ самомъ дѣлѣ, при $R = r$, фигура AOoa обращается въ прямоугольникъ, и слѣдовательно линія Aa дѣлается параллельна Oo.

358. V. Неопредѣленныя рѣшенія. При $a = 0$ и $b = 0$ общая формула принимаетъ видъ

$$x = \frac{0}{0},$$

означающій *неопредѣленность*. Обращаясь къ ур—нію, находимъ, что оно беретъ видъ $0 \cdot x = 0$. Какова бы ни была величина x, первая часть всегда равна нулю, а слѣд. ур—ніе обращается въ тождество при всякомъ x, а потому оно дѣйствительно неопредѣленно.

Неопредѣленныя рѣшенія указываютъ на неопредѣленность задачи, т. е. на то, что условія вопроса не ограничиваютъ произвола неизвѣстнаго.

Примѣръ. *Найти возрастъ лица, зная, что если изъ утроеннаго числа его лѣтъ вычесть удвоенное число лѣтъ, какое лицо это будетъ имѣть черезъ 10 лѣтъ, то въ результатѣ получится то число лѣтъ, какое лицо имѣло 20 лѣтъ тому назадъ.*

Обозначивъ искомое число лѣтъ буквою x, прямо имѣемъ ур—ніе

$$3x - 2(x + 10) = x - 20,$$

или $x - 20 = x - 20$, или $(1 - 1)x = 20 - 20$, откуда $x = \frac{20 - 20}{1 - 1} = \frac{0}{0}$.

Это рѣшеніе указываетъ на полную неопредѣленность задачи; въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что условія данной задачи—только кажущіяся и не ограничиваютъ произвола неизвѣстнаго. Дѣйствительно, такъ какъ $3x = 2(x + 10)$, по упрощеніи, обращается въ $x = 20$, то задачу можно выразить такъ: „найти возрастъ лица, зная, что число лѣтъ, какое это лицо имѣло 20 л. тому назадъ, равно возрасту, какой оно имѣло 20 л. тому назадъ“. Очевидно, что этому условію удовлетворяетъ всякое число, и что задача ничѣмъ не ограничиваетъ величину неизвѣстнаго.

Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ выраженія a и b суть цѣлые полиномы относительно одной и той же буквы y, то можетъ случиться, что при нѣкоторомъ частномъ значеніи y' этой буквы полиномы b и a обращаются въ нули, тогда x представится подъ видомъ неопредѣленности $\frac{0}{0}$. Но отсюда не слѣдуетъ заключать, что въ этомъ частномъ случаѣ задача неопредѣленна. Неопредѣленность эта, какъ мы уже знаемъ, только кажущаяся, и зависитъ отъ того, что въ уравненіе $ax = b$ введенъ множитель, обращающійся въ нуль въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ, вслѣдствіе чего окончательное уравненіе, изъ котораго выведенъ x, *не эквивалентно первоначальному уравненію.* Поэтому нужно вернуться къ первоначальнымъ вычисленіямъ и уничтожить этотъ обращающійся въ нуль множитель, прежде чѣмъ будетъ сдѣлано частное предположеніе.

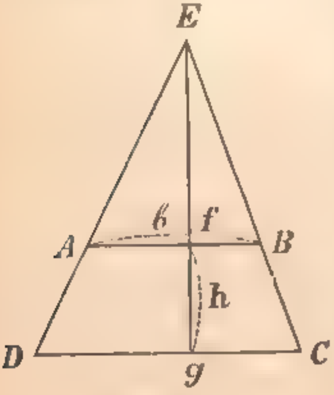
Впрочемъ, можно это сдѣлать и въ самой формулѣ x, т.-е. раскрыть ея неопредѣленность. Мы знаемъ, что если b обращается въ 0 при $y = y'$, то оно дѣлится на $y - y'$, такъ что можно его представить въ видѣ $(y - y') \,.\, b'$, полагая, что b' уже не обращается въ 0 при $y = y'$; точно такимъ же образомъ $a = (y - y') \,.\, a'$, гдѣ уже a' не содержитъ множителя $y - y'$. Такимъ образомъ

$$x = \frac{(y - y')b'}{(y - y')a'} = \frac{b'}{a'}.$$

Положивъ теперь $y = y'$, мы и найдемъ истинное значеніе кажущейся неопредѣленности формулы x.

Если бы оказалось, что b и a содержатъ $y - y'$ въ степени высшей первой, то должны бы были выдѣлить эту степень въ обоихъ членахъ дроби, сдѣлать сокращеніе и потомъ уже положить $y = y'$.

Примѣръ. *Вычислить площадь трапеціи, которой основанія равны соотвѣтственно a и b, а высота $= h$, разсматривая ее какъ разность площадей двухъ треугольниковъ, составляемыхъ основаніями трапеціи и продолженными до пересѣченія непараллельными ея боками.*



Черт. 20.

Обозначивъ искомую площадь буквою S, имѣемъ:

$$S = \frac{a \times EG}{2} - \frac{b \times EF}{2}.$$

Изъ подобія треугольниковъ DEC и AEB находимъ

$$\frac{EG}{EF} = \frac{a}{b}, \text{ или } \frac{EF + h}{EF} = \frac{a}{b}, \text{ откуда } EF = \frac{bh}{a - b};$$

слѣд.

$$EG = EF + h = \frac{bh}{a - b} + h = \frac{ah}{a - b}.$$

Такимъ образомъ:

$$S = \frac{h}{2} \times \frac{a^2 - b^2}{a - b}.$$

Пока a отлично отъ b, эта формула даетъ для площади трапеціи вполнѣ опредѣленную величину. Но если положить $a = b$, формула принимаетъ видъ $S = \frac{0}{0}$, и задача, повидимому, дѣлается неопредѣленною. Но эта неопредѣленность только *кажущаяся*, и зависитъ отъ того, что числитель и знаменатель S содержатъ общаго множителя $a - b$, который въ частномъ предположеніи $a = b$ обращается въ нуль. Сокративъ предварительно дробь $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ на $a - b$, найдемъ $S = \frac{h}{2}(a + b)$; положивъ, затѣмъ, $a = b$, найдемъ $S = ah$ — величину *вполнѣ опредѣленную*. И дѣйствительно, при $a = b$ трапеція превращается въ параллелограммъ, котораго площадь равна ah.

359. Заключеніе. *Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:*

$$ax = b$$

имѣетъ единственное и конечное рѣшеніе, когда a отлично отъ нуля, когда $a = 0$, а $b \gtrless 0$, уравненіе невозможно, въ томъ смыслѣ, что оно не имѣетъ конечныхъ рѣшеній; наконецъ, когда $a = b = 0$, уравненіе неопредѣленно, причемъ неопредѣленность можетъ быть или дѣйствительная, или только кажущаяся.

Методъ изслѣдованія вопросовъ 1-й степени.

360. При изслѣдованіи вопросовъ 1-й степени полезно держаться слѣдующаго порядка:

1) Дѣлаютъ всевозможныя предположенія относительно знака знаменателя: знаменатель положительный, отрицательный, равный нулю.

2) Къ каждому изъ этихъ предположеній относительно знаменателя присоединяемъ всевозможныя предположенія относительно числителя, лишь бы они не противорѣчили взятому предположенію о знаменателѣ.

Так. обр. мы разсмотримъ всевозможные случаи относительно знака неизвѣстнаго или неизвѣстныхъ.

3) Слѣдуетъ дать истолкованіе отрицательныхъ значеній неизвѣстныхъ.

4) Если, какъ въ вопросахъ геометріи, свойство задачи налагаетъ на неизвѣстныя тѣ или другія предѣлы, нужно подвергнуть разсмотрѣнію и это обстоятельство.

5) Наконецъ, нужно построить неизвѣстное, пользуясь его формулою; послѣднее, очевидно, имѣетъ мѣсто въ случаѣ задачъ геометрическихъ.

Первый примѣръ изслѣдованія.

361. *Отцу a, а сыну b лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ n разъ старше сына?*

Пусть это случится черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени, уравненіе задачи, очевидно, будетъ:

$$a + x = n(b + x);$$

откуда

$$x = \frac{a - nb}{n - 1} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Изслѣдованіе. n есть число большее 1; слѣд. знаменатель всегда отличенъ отъ нуля и положителенъ. Относительно числителя возможны три предположенія: $a > nb$; $a = nb$; $a < nb$.

1) $a > nb$. При этомъ условіи и числитель, а слѣд. и x, положителенъ.

Это положительное значеніе x даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, т.-е. что *въ* *будущемъ*, по истеченіи числа лѣтъ, выражаемаго формулою x, отецъ будетъ въ n разъ старше сына. И въ самомъ дѣлѣ, отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына въ настоящее время равно $\frac{a}{b}$ (непр. дроби); требуется чтобы это отношеніе уменьшилось, ибо изъ условія $a > nb$ находимъ $n < \frac{a}{b}$, но отъ приданія поровну къ членамъ неправильной дроби величина ея дѣйствительно уменьшается.

2) $a = nb$. Въ этомъ случаѣ числитель формулы x обращается въ нуль, а вмѣстѣ съ этимъ и $x = 0$. Это рѣшеніе показываетъ, что искомое событіе имѣетъ мѣсто въ настоящее время, что очевидно, такъ какъ изъ даннаго условія имѣемъ $\frac{a}{b} = n$, т.-е. что уже теперь отношеніе лѣтъ отца и сына имѣетъ требуемую величину n.

3) $a < nb$. Числитель x, а слѣд. и x въ этомъ случаѣ отрицателенъ.

Отрицательное рѣшеніе означаетъ, что вопросъ въ прямомъ смыслѣ невозможенъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ настоящее время отношеніе лѣтъ отца и сына равно $\frac{a}{b}$; изъ условія же имѣемъ, что $n > \frac{a}{b}$, т.-е. требуется, чтобы это отношеніе увеличилось; очевидно, что это невозможно въ будущемъ, потому что отъ приданія поровну къ членамъ непр. дроби ея величина не увеличивается, а уменьшается

Абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія удовлетворяетъ уравненію, получаемому изъ первоначальнаго перемѣною x на $-x$, т. е. ур—нію:

$$a - x = n(b - x),$$

а потому служитъ прямымъ отвѣтомъ на задачу: „отцу a, а сыну b лѣтъ; *сколько лѣтъ тому назадъ* отецъ былъ въ n разъ старше сына?"

Въ этой формѣ, при данномъ условіи $n > \frac{a}{b}$, задача возможна, потому что отъ вычитанія поровну изъ членовъ неправ. дроби величина ея дѣйствительно увеличивается.

Заключеніе. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если дать предложенной задачѣ наиболѣе общую форму: „отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына есть $\frac{a}{b}$; опредѣлить эпоху, въ которую это отношеніе имѣетъ величину n?" то формула (1) даетъ для всѣхъ случаевъ рѣшеніе задачи, если найденное число лѣтъ считать: въ *будущемъ*, когда оно *положительно*, и въ *прошедшемъ*, когда оно *отрицательно*.

Второй примѣръ изслѣдованія.

362. *Три точки* A, B *и* C *лежатъ на прямой, при чемъ точка* B *находится между двумя другими; разстояніе* AB = a, AC = b. *Найти на продолженіи прямой* AC *такую точку* M, *которой разстояніе отъ точки* B *было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея разстояніями отъ точекъ* A *и* C? (черт. 19 и 21.)

Обозначимъ разстояніе AM буквою x и положимъ, что искомая точка лежитъ вправо отъ C; въ этомъ предположеніи уравненіе будетъ

$$(x - a)^2 = x(x - b) \;.\;.\;.\; (1).$$

Предполагая же, что точка M находится влѣво отъ A, получимъ ур.

$$(x + a)^2 = x(x + b) \;.\;.\;.\; (2).$$

Ур. (2) выводится изъ (1) перемѣною x въ $-x$; слѣд. можно ограничиться рѣшеніемъ ур—нія (1), помня, что если оно имѣетъ отрицательный корень, то этотъ корень, по перемѣнѣ у него знака, будетъ корнемъ ур—нія (2), и слѣд. даетъ точку, лежащую влѣво отъ А: однимъ словомъ, корень ур—нія (1) всегда представляетъ разстояніе искомой точки отъ А, причемъ это разстояніе нужно брать *вправо отъ* А, если корень *положителенъ*, и *влѣво отъ* А, если онъ ***отрицателенъ***.

Сдѣлавъ эти подготовительныя замѣчанія, рѣшаемъ ур. (1) и находимъ

$$x = \frac{a^2}{2a - b}.$$

Изслѣдованіе. Формула x даетъ мѣсто слѣдующимъ случаямъ.

$$2a - b > 0; \quad 2a - b < 0; \quad 2a - b = 0.$$

1) Если $2a - b > 0$, корень ур—нія положителенъ, а потому искомая точка находится вправо отъ А; но задача требуетъ кромѣ того, чтобы эта точка была вправо и отъ С, т.-е. чтобы величина x была больше b. Итакъ, нужно разсмотрѣть, удовлетворяется ли неравенство

$$\frac{a^2}{2a - b} > b;$$

такъ какъ $2a - b$ положительно, то умножая обѣ части неравенства на $2a - b$ и не перемѣняя знакъ неравенства, замѣняемъ послѣднее ему эквивалентнымъ

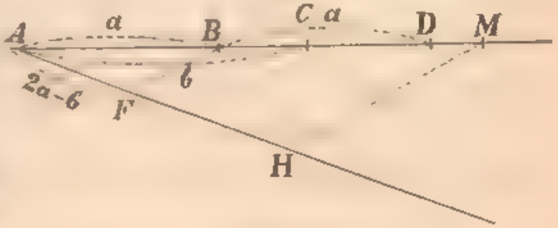
$$a^2 > 2ab - b^2, \quad \text{или} \quad a^2 - 2ab + b^2 > 0, \quad \text{или} \quad (a - b)^2 > 0;$$

послѣднее неравенство всегда удовлетворено, потому что квадратъ всегда положителенъ, слѣд. справедливо и эквивалентное ему первое неравенство. Такимъ образомъ, при условіи $2a - b > 0$, ур—ніе имѣетъ положительный корень больше b, опредѣляющій точку М вправо отъ С, какъ того требуетъ заданіе.

2) Если $2a - b < 0$, корень ур—нія (1) отрицателенъ, и согласно вышесказанному, опредѣляетъ точку, находящуюся на продолженіи линіи АС, влѣво отъ точки А и въ разстояніи отъ нея, равномъ $\frac{a^2}{b - 2a}$.

3) Наконецъ, если $2a - b = 0$, количество x обращается въ ∞. Это значитъ, что x неограниченно возрастаетъ по мѣрѣ того какъ b приближается къ $2a$; точка М удаляется отъ А, и когда b дѣлается равнымъ $2a$, точка М дѣлается безконечно далека отъ А, и задача о нахожденіи такой точки невозможна.

Построеніе. Пусть $2a - b > 0$. Отложивъ отъ точки В линію $\mathrm{BD} = a$, найдемъ, что длина линіи $\mathrm{CD} = 2a - b$. Проведя подъ произвольнымъ угломъ къ прямой АС линію АН, отложимъ на ней $\mathrm{AF} = 2a - b$ и $\mathrm{AH} = a$; соединивъ затѣмъ точки F и В, проводимъ изъ точки Н прямую НМ ∥ FB; точка М будетъ требуемая. Въ самомъ дѣлѣ, подобіе △△ ABF и AMH даетъ:



Черт. 21.

$$\mathrm{AF} : \mathrm{AH} = \mathrm{AB} : \mathrm{AM}, \quad \text{или} \quad (2a - b) : a = a : \mathrm{AM}, \quad \text{откуда}$$

$$\mathrm{AM} = \frac{a^2}{2a - b} = x.$$

Примѣчаніе. Если $2a - b$ уменьшать, приближая къ нулю, линія BF приближается къ совпаденію съ ВА, а линія НМ — къ параллельности съ АВ, вслѣдствіе этого точка M удаляется отъ C, и когда $2a-b$ обратится въ 0, HM сдѣлается параллельна AB, и точка M удалится въ безконечность.

Третій примѣръ изслѣдованія.

363. Задача о фонтанахъ. *Два фонтана наполняютъ бассейнъ: первый, дѣйствуя одинъ, можетъ наполнить бассейнъ въ a часовъ; другой, будучи открытъ одинъ, наполнитъ бассейнъ въ b часовъ. Кранъ, находящійся въ днѣ, можетъ опорожнить бассейнъ въ c часовъ. Во сколько часовъ бассейнъ, вначалѣ пустой, будетъ наполненъ, если оба фонтана и кранъ будутъ открыты одновременно?*

Пусть бассейнъ наполняется въ x часовъ. Первый фонтанъ, наполняя бассейнъ въ a часовъ, въ 1 часъ наполнитъ $\frac{1}{a}$ часть бассейна, а въ x час. $\frac{x}{a}$ частей его.

Другой фонтанъ въ то же самое время наполнитъ $\frac{x}{b}$ частей бассейна. Наконецъ, кранъ выпуститъ въ x час. $\frac{x}{c}$ частей бассейна. Такъ какъ разность между приходомъ воды и ея расходомъ въ x часовъ, по условію, равна емкости бассейна, то имѣемъ уравненіе

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=1,$$

откуда

$$x=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}.$$

Изслѣдованіе. Здѣсь слѣдуетъ разсмотрѣть три случая:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c};\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c};\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

1) Когда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$, величина x конечна и положительна. Это значитъ, что задача возможна, т.-е. что бассейнъ черезъ нѣсколько часовъ дѣйствительно будетъ наполненъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ есть часть бассейна, наполняемая въ 1 часъ обоими фонтанами, а $\frac{1}{c}$ — количество воды, уносимой въ 1 ч. краномъ; такъ какъ первое количество, по условію, больше второго, то очевидно, что по истеченіи нѣсколькихъ часовъ бассейнъ наполнится.

Сверхъ того, если увеличивать c, т. е. уменьшать отверстіе крана, величина x также будетъ уменьшаться, стремясь къ предѣлу $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, котораго она достигаетъ при $c=\infty$, т.-е. когда кранъ будетъ закрытъ.

2) Когда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$, величина x становится отрицательной. Это отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи, т.-е. что бассейнъ не можетъ наполниться. Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$ означаетъ, что количество воды, доставляемое въ 1 часъ обоими фонтанами, меньше количества воды, которое отводящій кранъ можетъ унести въ часъ. Очевидно, слѣд., что бассейнъ не можетъ быть наполненъ: задача невозможна въ томъ смыслѣ, въ какомъ она

предложена. Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія, перемѣняемъ x въ - въ уравненіи задачи, и получаемъ.

$$-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}, \text{ или } \frac{1}{x}=\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \text{ (1), откуда } x=\frac{1}{\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Ур. (1) соотвѣтствуетъ слѣдующей задачѣ: *бассейнъ наполняется краномъ, который, дѣйствуя отдѣльно, наполнилъ бы бассейнъ въ c часовъ; изъ двухъ крановъ, находящихся въ днѣ бассейна, одинъ будучи открытъ, можетъ опорожнить бассейнъ въ a часовъ, а другой, дѣйствуя отдѣльно, въ b часовъ. Во сколько часовъ наполнится бассейнъ, сначала пустой, если будутъ открыты всѣ три крана?* Такимъ образомъ, для исправленія задачи слѣдуетъ предположить, что питательные краны становятся опоражнивающими, и наоборотъ.

3) Если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, то $x=\frac{1}{0}=\infty$ и задача невозможна. Въ самомъ дѣлѣ, равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ означаетъ, что количество воды, приносимой въ часъ обоими фонтанами, равно количеству воды, уносимой въ то же самое время краномъ, слѣд. бассейнъ никогда не можетъ наполниться. задача абсолютно невозможна.

Четвертый примѣръ изслѣдованія.

364. *Какое число нужно прибавить къ четыремъ даннымъ числамъ a, b, c, d, чтобы составить кратную пропорцію?*

Пусть искомое число будетъ x; уравненіе будетъ, очевидно:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x}\ \ldots (1);$$

рѣшая его, находимъ:

$$x=\frac{bc-ad}{(a+d)-(b+c)}\ \ldots (2).$$

Члены искомой пропорціи суть:

$$a+x=\frac{(a-b)(a-c)}{a+d-(b+c)};\ b+x=\frac{(a-b)(b-d)}{a+d-(b+c)},\ c+x=\frac{(a-c)(c-d)}{a+d-(b+c)};\ d+x=\frac{(c-d)(b-d)}{a+d-(b+c)}.$$

Изслѣдованіе. Слѣдуетъ различать два главные случая: знаменатель формулы x отличенъ отъ нуля, или же этотъ знаменатель равенъ нулю; и въ каждомъ изъ этихъ главныхъ случаевъ дѣлать возможныя предположенія относительно числителя.

I. Если $a+d>b+c$ и при этомъ $bc>ad$, или же $a+d<b+c$ и при этомъ $bc<ad$, то для x найдемъ величину положительную, которою вопросъ рѣшается въ прямомъ смыслѣ.

II. Если $a+d>b+c$ и $bc<ad$, или же $a+d<b+c$ и $bc>ad$, то для x получится величина отрицательная, представляющая, очевидно, отвѣтъ на вопросъ: какое число нужно вычесть изъ чиселъ a, b, c и d, чтобы остатки образовали кратную пропорцію?

III. Если $a+d \gtrless b+c$, но $ad=bc$, то $x=0$.

Но условіе $ad=bc$ то же, что пропорція: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; откуда имѣемъ теорему: если четыре числа составляютъ пропорцію, то нѣтъ такого числа, которое, будучи придано къ каждому изъ нихъ, дало бы пропорцію.

IV. Если $a+d=b+c$ и $bc \gtrless ad$, то $x=\frac{m}{0}=\infty$ и задача невозможна, т.-е. не существуетъ конечнаго числа, рѣшающаго вопросъ. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы четыре числа $a+x$, $b+x$, $c+x$, $d+x$ составляли пропорцію, необходимо, чтобы произведеніе крайнихъ равнялось произведенію среднихъ, т.-е. чтобы

$$(a+x)(d+x)=(b+x)(c+x)$$

или

$$ad+(a+d)x=bc+(b+c)x.$$

Но, по условію, ad отлично отъ bc, а $a+d=b+c$, слѣд. ни при какомъ конечномъ значеніи x равенство невозможно.

V. Если, наконецъ, $a+d=b+c$ и $ad=bc$, то $x=\frac{0}{0}$, т.-е. задача неопредѣленна. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы четыре числа $a+x$, $b+x$, $c+x$ и $d+x$ составляли кратную пропорцію, необходимо, чтобы произведеніе крайнихъ равнялось произведенію среднихъ; т. е. какъ выше указано, чтобы

$$ad+(a+d)x=bc+(b+c)x;$$

но какъ $ad=bc$ и $a+d=b+c$, это уравненіе есть тождество, а потому удовлетворяется при всякомъ значеніи x: неопредѣленность полная.

Неопредѣленность задачи при данныхъ условіяхъ можно обнаружить еще слѣдующимъ образомъ.

Изъ условія $a+d=b+c$ имѣемъ $d=b+c-a$; подставляя эту величину d въ другое условіе $ad=bc$ или $ad-bc=0$, имѣемъ: $a(b+c-a)-bc=0$, или

$$a^2-a(b+c)+bc=0, \quad \text{или} \quad (a-b)(a-c)=0.$$

Этому равенству можно удовлетворить двояко: или положивъ $a=b$, или $a=c$. При $a=b$, имѣемъ $d=c$, и искомая пропорція беретъ видъ

$$\frac{a+x}{a+x}=\frac{d+x}{d+x}.$$

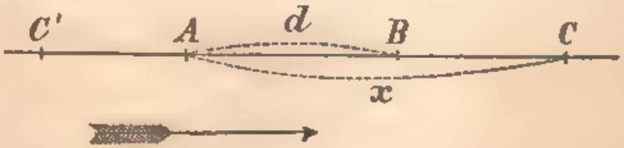
При $a=c$ имѣемъ $d=b$; и искомая пропорція будетъ

$$\frac{a+x}{d+x}=\frac{a+x}{d+x}.$$

И та, и другая пропорція — ничто иное какъ тождества, и стало быть удовлетворяются при всякомъ x.

Пятый примѣръ изслѣдованія.

365. Задача о курьерахъ. *Два курьера выѣхали въ одно время изъ мѣстъ* A *и* B, *разстояніе между которыми равно* d *верстамъ, и ѣдутъ равномѣрно въ направленіи* AB, *при чемъ первый дѣлаетъ* v *верстъ, второй* v' *верстъ въ часъ. Въ какомъ разстояніи отъ точки* A *они встрѣтятся?*



Черт. 22.

Пусть точка встрѣчи находится на разстояніи x верстъ отъ A. Такъ какъ, по условію, курьеры выѣзжаютъ изъ точекъ A и B одновременно, то время, въ которое первый проѣзжаетъ разстояніе AC, равно времени, въ которое второй проѣзжаетъ BC. Первый, дѣлая v верстъ въ часъ, проѣдетъ разстояніе $AC = x$ въ $\frac{x}{v}$ часовъ, второй, проѣзжая по v' верстъ въ часъ, на проѣздъ всего разстоянія $BC = x - d$, употребитъ $\frac{x-d}{v'}$ часовъ. Уравненіе будетъ

$$\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'} \;.\;.\;.\; (1)$$

откуда

$$x = d \times \frac{v}{v-v'} \;.\;.\;.\; (2).$$

Изслѣдованіе. Замѣтивъ, что d, какъ разстояніе между двумя точками, есть величина положительная, могущая въ частномъ случаѣ равняться нулю, заключаемъ, что между данными величинами могутъ быть слѣдующія соотношенія:

$$1)\ d > 0,\ v > v';\quad 2)\ d > 0,\ v < v';\quad 3)\ d = 0,\ v \gtrless v';\quad 4)\ d > 0,\ v = v';$$
$$5)\ d = 0,\ v = v'.$$

I. Когда $d > 0$ и $v > v'$, оба члена дроби $\frac{dv}{v-v'}$ положительны, сл. и x есть величина *положительная;* кромѣ того, $x > d$, потому что d умножается на дробь $\frac{v}{v-v'}$, большую 1, ибо $v > v - v'$. Это положительное и большее d значеніе x означаетъ, что встрѣча курьеровъ произойдетъ вправо отъ точки B, т.-е. оно даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ. И въ самомъ дѣлѣ, оба курьера выѣзжаютъ изъ точекъ A и B одновременно и догоняющій ѣдетъ быстрѣе передняго ($v > v'$), слѣд. первый непремѣнно догонитъ второго.

II. Когда $d > 0$ и $v < v'$, числитель $dv > 0$, а знаменатель $v - v' < 0$, слѣд. величина *x отрицательна.* Это отрицательное рѣшеніе указываетъ на то, что при данныхъ условіяхъ задача невозможна въ томъ смыслѣ, въ какомъ она предложена, т. е. что встрѣча не можетъ произойти въ направленіи AB (вправо отъ B). Дѣйствительно, такъ какъ оба курьера выѣзжаютъ въ одно время и первый ѣдетъ медленнѣе второго, то онъ никогда не догонитъ послѣдняго.

Чтобы исправить задачу, подставимъ въ ур. (1) $-x$ вмѣсто x; найдемъ

$$\frac{-x}{v} = \frac{-x-d}{v},\quad \text{или}\quad \frac{x}{v} = \frac{x+d}{v'} \;.\;.\;.\; (3).$$

Рѣшеніе уравненія (3) по абсолютной величинѣ таково же какъ и (1), но по знаку положительно, и потому даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, соотвѣтствующій уравненію (3). Но послѣднее можетъ служить алгебраическимъ выраженіемъ слѣдующихъ двухъ задачъ.

1. x есть разстояніе, проѣзжаемое курьеромъ A; $x + d$ — курьеромъ B, такъ что второй проѣзжаетъ d верстами больше перваго. Это возможно, если предположить, что оба ѣдутъ не въ направленіи AB, а въ направленіи BA, такъ что курьеръ, выѣзжающій изъ B, догоняетъ курьера, выѣзжающаго изъ A. Обозначивъ точку встрѣчи буквою C' и положивъ $AC' = x$, найдемъ ур. (3), котораго корень и будетъ служить отвѣтомъ на новую задачу.

Дѣйствительно, такъ какъ $v' > v$, то при движеніи въ направленіи BA, курьеръ B и догонитъ курьера A въ нѣкоторой точкѣ C', лежащей влѣво отъ A. Такимъ образомъ, для истолкованія отрицательнаго рѣшенія, мы измѣнили направленіе движенія курьеровъ.

2. Но легко видѣть, что ур. (3) можно также разсматривать какъ выраженіе условій задачи, отличающейся отъ данной не направленіемъ движенія, а допущеніемъ, что движеніе имѣетъ мѣсто неопредѣл. время, и что встрѣча произойдетъ не въ будущемъ, а что она уже имѣла мѣсто раньше того момента, въ который курьеры проѣзжаютъ — одинъ черезъ A, а другой чрезъ B, въ нѣкоторой

точкѣ C′, отстоящей влѣво отъ A на $x = \frac{dv}{v'-v}$ верстъ. Что задача и въ этомъ смыслѣ возможна, прямо слѣдуетъ изъ того, что при $v' > v$, курьеръ B, догнавъ A въ точкѣ C′, обгоняетъ послѣдняго и ѣдетъ впереди его.

III. Когда $d = 0$ и $v \gtrless v'$, то $x = \frac{0 \times v}{v - v'} = 0$.

Такъ какъ $d = 0$, то оба курьера выѣзжаютъ изъ одного мѣста, притомъ одновременно; но они ѣдутъ съ разными скоростями ($v \gtrless v'$), слѣд. одинъ постоянно будетъ впереди другого, такъ что никакая точка пути, кромѣ мѣста выѣзда, не можетъ быть ихъ общимъ мѣстомъ. Это и выражается рѣшеніемъ $x = 0$.

IV. Когда $d > 0$, а $v = v'$, то $x = \frac{dv}{0} = \infty$.

Безконечное рѣшеніе служитъ въ данномъ случаѣ признакомъ полной невозможности задачи, т.-е. невозможности встрѣчи курьеровъ. Дѣйствительно, они выѣзжаютъ одновременно изъ двухъ разныхъ точекъ и ѣдутъ съ одинаковою скоростью, понятно, что разстояніе между ними всегда $= d$, и слѣд. встрѣча ихъ невозможна.

V. При $d = 0$ и $v = v'$

$$x = \frac{0 \times v}{0} = \frac{0}{0}.$$

Это рѣшеніе означаетъ полную неопредѣленность задачи. Дѣйствительно, условія $d = 0$ и $v = v'$ означаютъ, что курьеры выѣзжаютъ изъ одного мѣста (одновременно) и ѣдутъ съ одинаковою скоростью; очевидно, что они всегда будутъ вмѣстѣ: каждая точка пути будетъ служить мѣстомъ встрѣчи.

Примѣчаніе. Если положить, что курьеры ѣдутъ не въ одну сторону, а навстрѣчу другъ другу, то направленія скоростей будутъ противоположны; слѣд. если одну изъ нихъ, напр. v, будемъ считать положительною, то другую слѣдуетъ принять за отрицательную; обозначивъ ее черезъ $-v'$, найдемъ

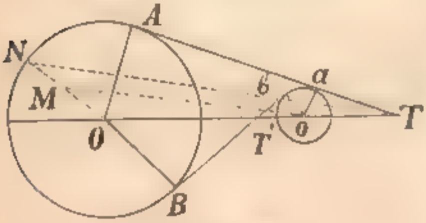
$$x = \frac{dv}{v - (-v')} = \frac{dv}{v + v'}.$$

Не трудно было бы вывести эту формулу и непосредственно. Заключаемъ, что формула (2) прилагается и къ этому случаю, а потому она — вполнѣ общая.

Шестой примѣръ изслѣдованія.

366. *Провести общую касательную къ двумъ кругамъ.*

A. *Проведеніе общей внѣшней касательной.*



Черт. 23.

Пусть разстояніе OT точки встрѣчи общей внѣшней касательной съ линіей центровъ отъ центра O перваго круга будетъ x, радіусъ OA = R; $oa = R'$; $Oo = d$. Изъ подобія треугольниковъ OAT и oaT находимъ пропорцію: OT : oT = OA : oa или $x : (x - d) = R : R'$, откуда

$$x = \frac{d \cdot R}{R - R'} \ldots (1).$$

Изслѣдованіе подраздѣляется на три главные случая, смотря по тому, будетъ ли знаменатель $R - R'$ положителенъ, отрицателенъ или равенъ нулю.

I. $R - R' > 0$, или $R > R'$. Величина x въ этомъ случаѣ положительна, конечна и $> d$, потому что $\frac{R}{R - R'} > 1$, а слѣд. точка T находится на продолжени линіи Oo. Сверхъ того, необходимо, чтобы $x > d + R'$, или $\frac{dR}{R-R'} > d + R'$. Такъ какъ $R - R' > 0$, то, умножая обѣ части на эту разность, мы не измѣнимъ знака неравенства, слѣд. $dR > (d + R')(R - R')$, откуда

$$d > R - R'.$$

Неравенство удовлетворяется, когда: 1) круги расположены одинъ внѣ другого, не имѣя общихъ точекъ, ибо тогда $d >$ даже $R + R'$; 2) круги имѣютъ внѣшнее касаніе; 3) они пересѣкаются. Равенство же удовлетворяется при внутреннемъ касаніи; въ послѣднемъ случаѣ $x = \frac{(R-R')R}{R-R'} = R$, и точка T совпадаетъ съ точкою касанія круговъ.

Когда $R' = 0$, т.-е. малая окружность сводится къ своему центру, условіе возможности приводится къ $d > R$, а $x = d$,—результаты сами собою понятные.

II. $R - R' < 0$, или $R < R'$. Въ этомъ случаѣ x отрицателенъ, слѣдовательно точка T находится влѣво отъ O. Въ этомъ случаѣ безполезно повторять изслѣдованіе, приведенное выше; ибо для опредѣленія различныхъ положеній точки T, очевидно, достаточно перевернуть предыдущій чертежъ, такъ чтобы меньшій кругъ помѣщался влѣво отъ большаго.

III. $R - R' = 0$, или $R = R'$, т.-е. оба круга равны. При этомъ возможны слѣдующіе случаи:

a) Если $d > 0$, $x = \frac{dR}{0} = \infty$, т.-е. точка T удаляется въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ линіи OA и *oa* равны и параллельны, слѣдоват. прямая $Aa \parallel Oo$ и не встрѣчаетъ ее. Безконечное рѣшеніе означаетъ, такимъ образомъ, параллельность общей касательной линіи центровъ. Разсматривая вопросъ съ другой точки зрѣнія, можно замѣтить, что если бы радіусы, будучи сначала неравными, разнились бы незначительно, точка T находилась бы на очень большомъ разстояніи отъ точки O, и что если радіусы будутъ стремиться къ равенству, разстояніе OT будетъ неограниченно возрастать, слѣд. когда радіусы будутъ строго равны, точка T удалится въ безконечность и $x = \infty$.

b) Если, при $R - R' = 0$, и $d = 0$, тогда $x = \frac{0}{0}$, и задача становится дѣйствительно неопредѣленною. Въ самомъ дѣлѣ, оба круга имѣютъ въ этомъ случаѣ общій центръ и равные радіусы, сл. они сливаются; ни линія Aa, ни Oo не имѣютъ въ такомъ случаѣ опредѣленнаго положенія, а потому и точка ихъ встрѣчи абсолютно неопредѣленна.

c) Наконецъ, если $R - R' = 0$, x также принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Неопредѣленность—опять дѣйствительная, и легко объясняется: оба круга приводятся къ своимъ центрамъ, линія Aa сливается съ Oo и точка T можетъ быть взята произвольно на линіи Oo.

Построеніе. Формула (1) даетъ пропорцію: $(R - R') : R = d : x$, изъ которой видно, что x есть четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ $R - R'$, R и d. Проведя произвольный радіусъ ON въ кругѣ центра O, откладываемъ на немъ линію $NM = R$; получимъ $OM = R - R'$. Соединивъ точку M съ *o*, проводимъ линію $NT \parallel Mo$: точка T будетъ требуемая. Проведя изъ нея касательную TA къ кругу O, убѣдимся, что эта линія коснется и круга *o*.

B. *Проведеніе общей внутренней касательной.*

Обозначивъ разстояніе OT' буквою x, изъ подобія треугольниковъ OBT' и *o*bT' имѣемъ: $\frac{x}{R} = \frac{d-x}{R'}$, откуда

$$x = \frac{dR}{R + R'} \; . \; . \; . \; (2).$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ $\frac{R}{R+R'} < 1$, то всегда $x < d$, т.-е. точка T' находится между центрами. Кромѣ того, разстояніе точки T' отъ O не должно быть $< R$, т.-е. должно имѣть $\frac{dR}{R + R'} > R$, откуда $d > R + R'$, т.-е. окружности должны быть одна внѣ другой. Въ крайнемъ случаѣ, т.-е. при внѣшнемъ касаніи, $d = R + R_1$ и $x = R$, т.-е. точка T′ совпадаетъ съ точкою касанія круговъ.

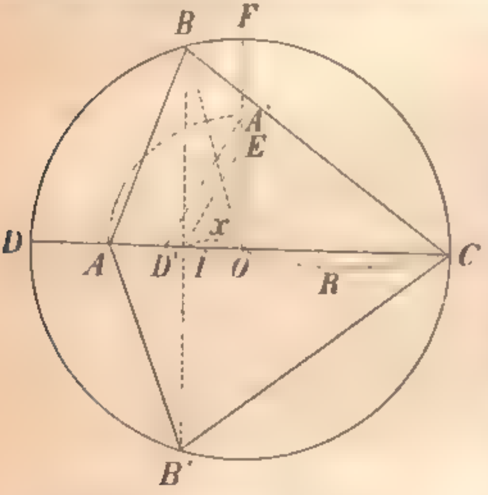
Когда $R' = 0$, $x = d$, т.-е. точка T′ совпадаетъ съ центромъ o, къ которому, въ данномъ случаѣ, приводится второй кругъ.

Наконецъ, если $R = R' = 0$, $x = \frac{0}{0}$, точка T′ неопредѣленна, и въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ прямая Aa совпадаетъ съ линіей центровъ.

Построеніе аналогично предыдущему.

Седьмой примѣръ изслѣдованія.

367. *Въ точкѣ* A, *данной внутри круглаго билліарда, помѣщенъ упругій шарикъ. Въ какомъ направленіи нужно его пустить, чтобы, отразившись три раза отъ бортовъ, онъ возвратился снова въ точку* A?



Черт. 24

По закону отраженія, уголъ паденія равенъ углу отраженія, при чемъ угломъ паденія будетъ уголъ, составленный направленіемъ паденія (напр. AB) съ радіусомъ, проведеннымъ въ точку B, а угломъ отраженія—уголъ, образуемый направленіемъ отраженнаго движенія (BC) съ тѣмъ же радіусомъ. Зная это, и замѣчая, что фигура расположена симметрично относительно діаметра DC, проходящаго черезъ точку A, усматриваемъ, что задача приводится къ слѣдующей: *въ какомъ направленіи надо пустить шарикъ* A, *чтобы, отразившись отъ борта, онъ ударился въ конечную точку* C *діаметра* DC?

Пусть $OC = R$, $OA = a$, B — искомая точка; проведя хорду BB′ перпендикулярно къ діаметру DC, замѣчаемъ, что какъ скоро извѣстно будетъ разстояніе IO этой хорды отъ центра, то будетъ извѣстно и положеніе искомой точки B. Поэтому за неизвѣстное принимаемъ $OI = x$. Углы: паденія ABO, и отраженія—OBC, равны, слѣд. OB есть биссектрисса угла ABC треугольника ABC, по свойству ея, имѣемъ пропорцію:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC},$$

возвысивъ обѣ части въ квадратъ, находимъ:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{a^2}{R^2};$$

затѣмъ, на основаніи теоремъ о квадратѣ стороны треугольника, имѣемъ:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO.OI = a^2 + R^2 - 2a.x;$$

$$BC^2 = OC^2 + OB^2 + 2OC.OI = 2R^2 + 2R.x;$$

подставивъ эти величины въ предыдущую пропорцію, находимъ:

$$\frac{a^2+R^2-2ax}{2R^2-2Rx}=\frac{a^2}{R^2}\ \ldots\ (1)$$

изъ этого ур—нія, по сокращеніи сначала на R, а затѣмъ на $R-a$, имѣемъ:

$$x=\frac{R(R-a)}{2a}.$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ $a<R$ (точка A находится внутри круга O), то предыдущее выраженіе даетъ для x всегда величину положительную; но для возможности задачи этого недостаточно, необходимо еще, чтобы было $x \leqq R$, или

$$\frac{R(R-a)}{2a}\leqq R,\ \text{откуда}\ a\geqq\frac{R}{3}.$$

Итакъ, чтобы задача была возможна, нужно, чтобы a имѣло величины въ предѣлахъ между R и $\frac{R}{3}$; слѣд. задача невозможна, когда шарикъ A находится внутри круга, концентричнаго биллиарду и описаннаго радіусомъ, равнымъ трети радіуса биллиарда.

Когда a измѣняется непрерывно отъ R до $\frac{R}{3}$, x измѣняется непрерывно отъ 0 до R; въ частности:

при $a=R$, $x=0$: шарикъ опишетъ половину контура квадрата;

при $a=\frac{R}{2}$, $x=\frac{R}{2}$: шарикъ опишетъ полупериметръ равносторонняго треугольника;

при $a=\frac{R}{3}$, $x=R$, шарикъ опишетъ діаметръ DC.

Построеніе. Формула x даетъ пропорцію:

$$a:\frac{R}{2}=(R-a):x,$$

такъ что нужно построить четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ: a, $\frac{R}{2}$ и $R-a$. Взявъ на діаметрѣ OF, перпендикулярномъ къ OA, часть $OA'=OA=a$, и $OE=\frac{R}{2}$, затѣмъ на діаметрѣ DC часть $OD'=AD=R-a$, соединимъ точки D' и A' и черезъ точку E проведемъ линію EI параллельную A'D': эта линія и дастъ искомую точку I. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ A'OD' и EOI имѣемъ:

$$OA':OE=OD':OI,\ \text{или}\ a:\frac{R}{2}=(R-a):OI,\ \text{откуда и видно, что}\ OI=x$$

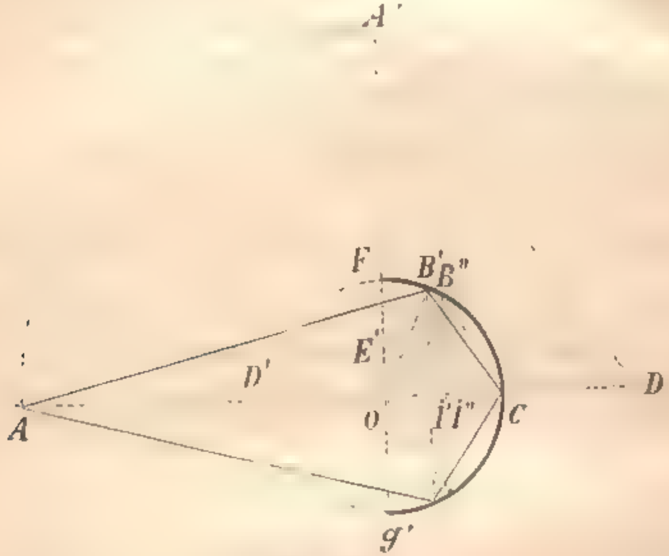
Обобщеніе задачи. Когда шарикъ A находится внѣ круга, напр. въ A' (черт. 25) задача будетъ возможна, если удалить матеріальную полуокружность EFG', обращенную своею выпуклостью къ шарику. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ случаѣ шарикъ A' можетъ удариться въ такую точку B другой половины круга, что по отраженіи попадетъ въ точку C, а слѣдовательно отсюда, по симметріи фигуры относительно линии A'C, возвратится въ A'. Для опредѣленія точки B' положимъ OI' = x'; въ такомъ случаѣ, подобно предыдущему, найдемъ ур.

$$\frac{a^2+R^2+2ax'}{2R^2-2Rx'}=\frac{a^2}{R^2}\ \ldots\ (2)$$

отличающееся отъ (1) только перемѣною x на $-x'$: а потому корень его отличается отъ корня уравненія (1) только знакомъ; итакъ

$$x'=\frac{R}{2}\times\frac{a-R}{a}=\frac{R}{2}\left(1-\frac{R}{a}\right).$$

Чтобы x' было положительно, необходимо, чтобы было $\frac{R}{a}<1$, или $a>R$; слѣд. a можно измѣнить отъ R до ∞. При этомъ x' будетъ измѣняться отъ 0 до $\frac{R}{2}$, т.-е. по мѣрѣ того какъ точка A' удаляется отъ точки D', точка паденія B' приближается къ точкѣ B'' отстоящей на 60° отъ точки C.



Черт. 25.

Итакъ, ур. (1) всегда даетъ рѣшеніе задачи, когда шарикъ находится внѣ круга, а знакъ —, предшествующій корню, указываетъ ту область, которая заключаетъ точку паденія.

Построеніе аналогично предыдущему и указано на чертежѣ.

Восьмой примѣръ изслѣдованія.

368. Радикальная ось двухъ круговъ. *Даны двѣ окружности радіусовъ R и r; разстояніе между ихъ центрами пусть = d. Найти на плоскости такую точку M, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ даннымъ окружностямъ, были равны между собою. Геометрическое мѣсто этихъ точекъ.*

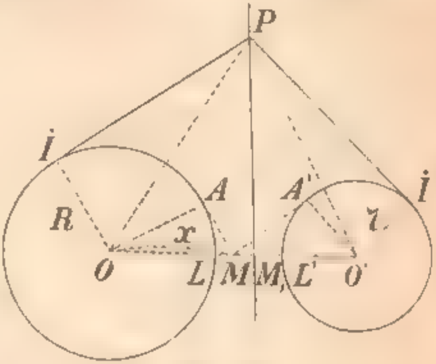
Рѣшеніе. Ищемъ, нѣтъ ли на линіи центровъ точки, удовлетворяющей требованію задачи. Если такая точка существуетъ, то пусть она будетъ M; въ такомъ случаѣ касательныя MA и MA' равны. Примемъ за неизвѣстное разстояніе точки M отъ центра O, положивъ $OM = x$; будетъ $MO' = d - x$. Прямоугольные треугольники AOM и A'O'M дадутъ: $\overline{AM}^2 = x^2 - R^2$, $\overline{A'M}^2 = (d-x)^2 - r^2$; по условію,

$$x^2 - R^2 = (d-x)^2 - r^2,$$

откуда

$$x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} \; . \; . \; . \; (1).$$

Этой формулой и опредѣляется разстояніе искомой точки отъ центра круга O.



Черт. 26.

Ищемъ, нѣтъ ли также внѣ линіи центровъ точекъ, удовлетворяющихъ требованію задачи. Пусть одна изъ такихъ точекъ будетъ P. Опустивъ перпендикуляръ PM_1 на линію центровъ, замѣтимъ, что точка P будетъ найдена, какъ скоро будутъ извѣстны разстояніе OM_1 перпендикуляра PM_1 отъ центра O и отрѣзокъ M_1P, показывающій разстояніе точки P отъ линіи центровъ. Пусть $OM_1 = x'$ и $PM_1 = y$. Проведя касательныя PI и PI', линіи PO, PO', OI и O'I', изъ прямоугольныхъ треугольниковъ POI и PO'I' найдемъ: $\overline{PI}^2 = \overline{PO}^2 - R^2$, или, какъ $\overline{PO}^2 = x'^2 + y^2$, т.-е. $\overline{PI}^2 = x'^2 + y^2 - R^2$. Подобно этому, найдемъ $\overline{PI'}^2 = (d - x')^2 + y^2 - r^2$. По требованію задачи, имѣемъ ур—ніе

$$x'^2 + y^2 - R^2 = (d-x')^2 + y^2 - r^2, \text{ откуда } x' = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} \; . \; . \; . \; (2)$$

Сравненіе (1) со (2) показываетъ, что $x = x'$, т.-е. что всякая точка искомаго геометрическаго мѣста проэктируется въ точку M, а это значитъ, что всѣ искомыя точки находятся на одной и той же прямой — на перпендикулярѣ къ линіи центровъ, разстояніе котораго отъ центра O опредѣляется формулою $\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$. Этотъ перпендикуляръ и есть, слѣд. *геометрическое мѣсто такихъ точекъ* плоскости, что касательныя, проведенныя изъ каждой къ даннымъ кругамъ, равны между собою.

Изслѣдованіе. I. *Данные круги неравны между собою*, и пусть $R > r$. Разберемъ задачу для всякихъ относительныхъ положеній данныхъ круговъ.

1) $d > R + r$: круги лежатъ одинъ внѣ другого, не имѣя общихъ точекъ. Сравнимъ x съ R: не будетъ ли, напр., $x > R$? Отвѣтъ найдемъ, испытавъ, вѣрно ли будетъ неравенство

$$\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} > R.$$

Освободивъ отъ знаменателя, легко найдемъ: $d^2 + R^2 - r^2 > 2dR$, или $d^2 - 2dR + R^2 > r^2$, или $(d - R)^2 > r^2$, откуда $d - R > r$, и, наконецъ, $d > R + r$. Такъ какъ преобразованіе приводило къ неравенству, эквивалентному предшествующему, и такъ какъ послѣднее совпадаетъ съ условіемъ, которое намъ дано, то заключаемъ, что испытуемое соотношеніе вѣрно, и $x > R$. Сравнимъ теперь x съ отрѣзкомъ OL, или $d - r$, и посмотримъ, не будетъ ли $x < d - r$, т.-е. испытаемъ неравенство

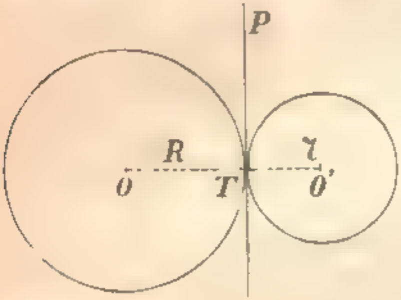
$$\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} < d - r.$$

Послѣдовательно имѣемъ: $d^2 - 2dr + r^2 > R^2$, или $(d - r)^2 > R^2$, откуда $d - r > R$, и наконецъ, $d > R + r$ — что намъ дано. Заключаемъ, что $d - r > x > R$, т.-е. радикальная ось проходитъ между данными кругами, пересѣкаетъ линію центровъ на отрѣзкѣ LL'.

Остается разсмотрѣть, къ какому изъ обоихъ круговъ она ближе, и для этого надо сравнить LM_1 съ $L'M_1$, или $x - R$ съ $d - x - r$. Не будетъ ли, напр., $x - R < d - x - r$, или, что то же, $2x < d + R - r$, или, наконецъ, $\frac{d^2 + R^2 - r^2}{d} < d + R - r$?

Провѣрка этого неравенства приводится къ провѣркѣ неравенства $d^2 + R^2 - r^2 < d^2 + d(R - r)$, или $(R + r)(R - r) < d(R - r)$, или $R + r < d$, а это намъ дано. Итакъ:

Когда круги лежатъ одинъ внѣ другого, не имѣя общихъ точекъ, то радикальная ось ихъ проходитъ между обоими кругами, ближе къ большему кругу.



Черт. 27.

2) $d = R + r$: круги имѣютъ внѣшнее касаніе.

Подставивъ въ формулу (1) $R + r$ вмѣсто d, найдемъ

$$x = R.$$

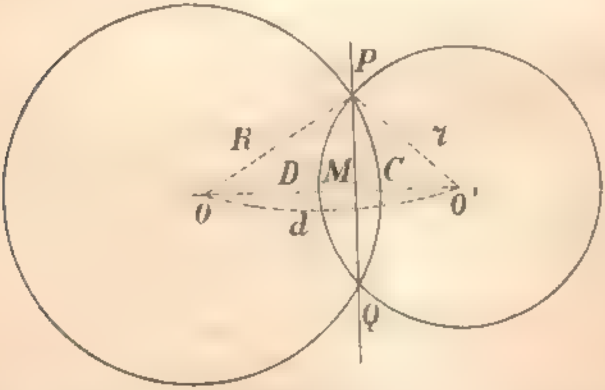
Это значитъ, что въ данномъ случаѣ радикальная ось отстоитъ отъ центра круга O на разстояніе = его радиусу. Слѣдовательно:

Въ случаѣ внѣшняго касанія радикальная ось сливается съ общею внутреннею касательною къ даннымъ кругамъ.

3) $R - r < d < R + r$: круги пересѣкаются.

Въ треугольникѣ OPO' имѣемъ: $r^2 = R^2 + d^2 - 2d \, . \, OM$, откуда

$$OM = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}.$$



Черт. 28.

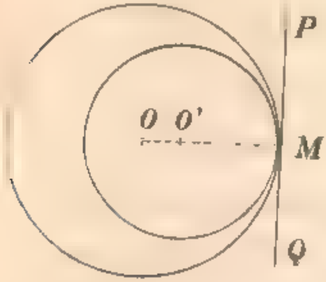
Сравнивая это выраженіе съ (1), находимъ: $x = OM$. Слѣдовательно, въ данномъ случаѣ *радикальная ось совпадаетъ съ общею хордою круговъ*, что можно было предвидѣть, ибо точки P и Q, очевидно, принадлежатъ искомому мѣсту.

4) $d = R - r$: круги имѣютъ внутреннее касаніе.

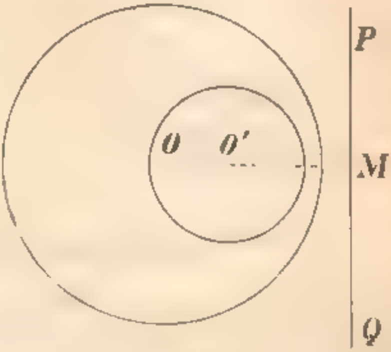
Вводя $R - r$ вмѣсто d въ формулу (1), находимъ

$$x = R.$$

Заключаемъ, какъ и во 2-мъ случаѣ, что *радикальная ось совпадаетъ съ общею касательною данныхъ круговъ.*



Черт. 29.



Черт. 30.

5) $d < R - r$: меньшій кругъ находится внутри большаго, не имѣя съ нимъ общихъ точекъ.

Въ этомъ случаѣ опять имѣемъ $x > R$: въ самомъ дѣлѣ, провѣрка неравенства $R < \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$ приводитъ послѣдовательно къ: $r^2 < (R - d)^2$, $r < R - d$, $d < R - r$, а это намъ дано. Въ разсматриваемомъ случаѣ, значитъ, *рад. ось расположена внѣ обоихъ круговъ.* Здѣсь само собою очевидно, что она ближе къ большему кругу.

Такимъ образомъ, въ двухъ послѣднихъ случаяхъ, когда одинъ кругъ находится внутри другого, замѣчаемъ, что рад. ось не встрѣчаетъ разстоянія центровъ, т.-е. отрѣзка OO', а пересѣкаетъ линію центровъ на продолженіи его, при чемъ разстояніе точки M отъ O, бывшее сначала $= R$, дѣлается затѣмъ $> R$: значитъ, точка пересѣченія M движется въ направленіи воображаемой точки, которая перемѣщалась бы отъ центра большаго круга къ центру меньшаго.

6) $d = 0$: окружности концентричны. Находимъ

$$x = \frac{R^2 - r^2}{0} = \infty,$$

т. е. по мѣрѣ сближенія центровъ x растетъ, рад. ось болѣе и болѣе удаляется вправо, и при $d = 0$ отбрасывается въ безконечность.

II. Пусть *круги равны между собою:* $R = r$. Формула (1) даетъ

$$x = \frac{d}{2}.$$

Значитъ, *рад. ось перпендикулярна къ разстоянію центровъ въ его срединѣ.*

Если при этомъ положить $d = 0$, то окружности совпадутъ, при этомъ $x = \frac{0}{0}$. Это значитъ, что рад. ось проходитъ чрезъ общій центръ, и положеніе ея ничѣмъ болѣе не опредѣляется; неопредѣленность эта очевидна, ибо изъ какой бы точки внѣ круговъ ни провести касательной къ одному кругу, она вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ касательна и къ другому.

Частные случаи. 1) Если кругъ r обращается въ точку, $r = 0$, то

$$x = \frac{d^2 + R^2}{2d};$$

по условію задачи, эта формула опредѣляетъ разстояніе отъ O проэкціи такой точки M, чтобы было

$$\overline{AM}^2 = \overline{MO'}^2, \text{ или } \overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2, \text{ или } \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2,$$

слѣд., рад. ось круга O и точка O' есть геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что разность квадратовъ ихъ разстояній отъ центра даннаго круга и отъ данной точки O' равна квадрату R^2.

2) Если $r = 0$ и $R = 0$, тогда $x = \frac{d}{2}$, т.-е. радикальная ось двухъ точекъ O и O' есть перпендикуляръ въ срединѣ прямой OO'

Девятый примѣръ изслѣдованія.

369. *Тѣло, состоящее изъ двухъ призмъ, сложенныхъ равными основаніями, погружено въ ванну, состоящую также изъ двухъ жидкостей, находящихся одна поверхъ другой. Спрашивается, въ какомъ разстояніи надъ поверхностью раздѣла жидкостей находится площадь соприкосновенія призмъ? Плотности и высоты призмъ равны: въ верхней призмѣ* D *и* H, *въ нижней* D' *и* H', *плотность верхней жидкости равна* d, *нижней* d'.

Пусть требуемая высота будетъ x. По закону Архимеда: „вѣсъ плавающаго тѣла равенъ вѣсу вытѣсненной жидкости“. Зная это и припоминая, что $P = UDq$ (гдѣ P — вѣсъ тѣла, U — его объемъ, D — плотность и q — вѣсъ кубической единицы воды), мы, обозначивъ буквою S площадь основанія каждой призмы, имѣемъ уравненіе

$$S(HD + H'D') = S(H + x)d + S(H' - x)d', \quad . \; . \; . \; (1)$$

откуда

$$x = \frac{H(d - D) + H'(d' - D')}{d' - d}.$$

Изслѣдованіе. Величина x можетъ быть или положительною, или отрицательною: если она положительна, то можетъ быть рѣшеніемъ предложенной задачи, если же отрицательна, то даетъ отвѣтъ на слѣдующій вопросъ: „въ какомъ разстояніи *подъ* поверхностью, . . .“?

Съ другой стороны, никогда количество x, по абсолютной величинѣ, не можетъ быть больше

H', если x положительно,

и

H, если x отрицательно:

иначе тѣло не погружалось бы заразъ въ обѣ жидкости, и ур—ніе (1) не было бы уже уравненіемъ задачи.

Наконецъ, по законамъ равновѣсія жидкостей, d' не можетъ быть меньше d, такъ что относительно знаменателя можетъ быть только два предположенія: $d' - d > 0$ и $d' - d = 0$. Итакъ:

I. $d' - d > 0$. При этомъ относительно числителя возможны 3 предположенія:

1) $H(d - D) + H'(d' - D') > 0$. Въ этомъ случаѣ, для того чтобы величина x дѣйствительно служила рѣшеніемъ задачи, необходимо, чтобы она была $< H'$, слѣд., нужно чтобы

$$H(d - D) + H'(d' - D') < H'(d' - d),$$

т.-е.

$$HD + H'D' \geqslant (H + H')d.$$

2) $H(d - D) + H'(d' - D') < 0$. Въ этомъ случаѣ x отрицателенъ, и для того, чтобы онъ служилъ рѣшеніемъ задачи, необходимо чтобы абсолютная величина его была $\leqslant H$, т.-е. чтобы

$$-\frac{H(d - D) + H'(d' - D')}{d' - d} \leqslant H,$$

или

$$HD + H'D' \leqslant (H + H')d'.$$

3) $H(d - D) + H'(d' - D') = 0$. Въ такомъ случаѣ $x = 0$, и площадь соприкосновенія призмъ совпадаетъ съ поверхностью раздѣла жидкостей.

II. $d' - d = 0$. Если при этомъ числитель не $= 0$, то $x = \frac{m}{0}$: эта форма означаетъ дѣйствительную невозможность: тѣло не можетъ быть въ равновѣсіи внутри жидкости.

Если же $HD + H'D' = d(H + H')$, то $x = \frac{0}{0}$. Эта форма означаетъ дѣйствительную неопредѣленность: такъ и должно быть, ибо въ данномъ случаѣ тѣло будетъ въ равновѣсіи въ какомъ угодно положеніи.

ГЛАВА XXVI.

Изслѣдованіе уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Изслѣдованіе двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ. — Примѣры изслѣдованія буквенныхъ вопросовъ.

370. Рѣшая два уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

мы нашли формулы:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad \text{и} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \; . \; . \; . \; (1)$$

предполагая, что коэффиціенты a и a', или b и b' отличны отъ нуля, и что при этомъ $ab' - ba'$ отлично отъ нуля. Цѣль изслѣдованія заключается въ томъ, чтобы показать, во всѣхъ ли случаяхъ эти формулы дадутъ рѣшенія ур—ній, или же, напротивъ, есть такіе случаи, когда онѣ непримѣнимы.

Мы должны разсмотрѣть два случая, смотря по тому, будетъ ли знаменатель въ формулахъ x и y, 1) отличенъ отъ нуля, или 2) равенъ нулю, при чемъ или одинъ изъ числителей, или оба — равны нулю.

Это раздѣленіе основывается на слѣдующихъ свойствахъ биномовъ $ab' - ba'$, $cb' - bc'$ и $ac' - ca'$.

Первое свойство. *Если коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ, или свободные члены c и c' не равны нулю одновременно, и если два изъ биномовъ $ab' - ba'$, $cb' - bc'$ и $ac' - ca'$, равны нулю, то и третій равенъ нулю.*

Пусть $cb' - bc' = 0$ и $ac' - ca' = 0$; отсюда $cb' = bc'$ и $ac' = ca'$: перемноживъ эти равенства, найдемъ $ab'cc' = a'bcc'$, или $(ab' - a'b)cc' = 0$; если c и c не равны нулю, то должно быть $ab' - a'b = 0$. Если же $c = 0$, въ такомъ случаѣ, по условію, $c' \lessgtr 0$; а потому изъ равенствъ $cb' = bc'$ и $ac = ca'$ имѣемъ: $a = 0$,

$b = 0$, и слѣд. $ab' - ba' = 0$. Вслѣдствіе того, что всѣ три бинома симметричны относительно a, b и c, это свойство доказано, какіе бы два бинома ни были равны нулю.

Второе свойство. *Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы два изъ этихъ биномовъ были нулями, а третій былъ бы отличенъ отъ нуля, состоятъ въ томъ, чтобы буквенныя количества, общія этимъ двумъ биномамъ, были нулями.*

Очевидно, что этихъ условій достаточно, затѣмъ, если имѣемъ $cb' - bc' = 0$, $ac' - ca' = 0$, и $ab' - ba' \gtrless 0$, то равенства даютъ: $cc'(ab' - ba') = 0$, а слѣд. $cc' = 0$. Пусть $c = 0$, тогда $bc' = 0$ и $ac' = 0$, а потому и $c' = 0$: ибо, положивъ $c \lesseqgtr 0$, $b = 0$ и $a = 0$, нашли бы $ab' - ba' = 0$, что противно условію: $ab' - ba' \lessgtr 0$.

371. I. Общій знаменатель $ab' - ba'$ отличенъ отъ нуля.

Въ этомъ случаѣ система ур—ній имѣетъ конечное и опредѣленное рѣшеніе, представляемое формулами (1).

Въ самомъ дѣлѣ, эти рѣшенія составляютъ систему эквивалентную данной, потому что дѣлитель $ab' - ba'$ не есть нуль.

Въ случаѣ, когда числитель $ac' - ca'$ равенъ нулю, что возможно при одномъ изъ трехъ условій: если $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, или если $a = 0$ и $c = 0$; или $c = 0$ и $c' = 0$ (предположеніе $a = 0$ и $a' = 0$ повело бы къ: $ab' - ba' = 0$, что противно условію), замѣчаемъ, что y обращается въ нуль; а при третьей группѣ условій, именно при $c = 0$ и $c' = 0$, и x дѣлается нулемъ.

Примѣчаніе. Въ силу второго свойства, условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы оба неизвѣстныя были нулями, $x = 0$ и $y = 0$, суть $c = 0$ и $c' = 0$.

Итакъ, когда общій знаменатель $ab' - ba'$ отличенъ отъ нуля, система имѣетъ конечное опредѣленное рѣшеніе; притомъ или оба неизвѣстныя будутъ положительны, или оба отрицательны, или одно положительно, а другое отрицательно; наконецъ, или одно, или оба могутъ быть нулями. Послѣднее имѣетъ мѣсто только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда свободные члены — оба нули.

Положительныя рѣшенія въ большинствѣ случаевъ даютъ прямой отвѣтъ на вопросъ, отрицательныя же или служатъ признакомъ невозможности задачи, или неправильной постановки ея. Истолкованіе отрицательныхъ рѣшеній основано на теоремѣ, аналогичной той, которая была доказана для ур—нія съ однимъ неизвѣстнымъ.

372. Теорема. *Двѣ системы двухъ ур—ній съ двумя неизвѣстными, отличающіяся только знакомъ при одномъ или при обоихъ неизвѣстныхъ, имѣютъ рѣшенія, равныя по абсолютной величинѣ, но разнящіяся знаками — для тѣхъ неизвѣстныхъ, знаки при которыхъ въ обѣихъ системахъ различны; и рѣшенія, одинаковыя по величинѣ и по знаку—для неизвѣстныхъ, предшествуемыхъ общимъ знакомъ въ обѣихъ системахъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, сравнимъ системы:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} (1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} ax - by &= c \\ a'x - b'y &= c' \end{aligned}\right\} (2)$$

разнящіяся только знакомъ при y; докажемъ, что эти системы имѣютъ одинаковое рѣшеніе для x, и рѣшенія, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку, для y

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $-y = z$, система (2) обратится въ

$$\left.\begin{aligned} ax + bz &= c \\ a'x + b'z &= c' \end{aligned}\right\} (2').$$

Замѣчая, что система (2′) ничѣмъ не отличается отъ (1), заключаемъ, что рѣшенія системы (1): x' и y' удовлетворяютъ и (2′); такъ что система (2′) имѣетъ рѣшенія. $x = x'$ и $z = y'$; или, такъ какъ $z = -y$, то (2′), а потому и (2) имѣетъ рѣшенія:

$$x = x', \quad y = -y'.$$

Примѣръ. *Куплено нѣсколько аршинъ матеріи по опредѣленной цѣнѣ. Если бы было куплено 3 аршинами больше, а за аршинъ было заплочено 1 руб. меньше, то на всю покупку издержали бы 11 рублями меньше. Если же было бы куплено 8 аршинами меньше, а за аршинъ платили бы 2 рублями дороже, то издержали бы 12 рублями больше. Сколько аршинъ куплено и сколько платили за аршинъ?*

Пусть было куплено x арш. по y руб. за аршинъ. Получаемъ ур—нія:

$$(x+3)(y-1) = xy - 11$$
$$(x-8)(y+2) = xy + 12;$$

откуда

$$x = -10; \quad y = -6.$$

Слѣд. задача невозможна въ томъ смыслѣ, какъ она дана.

Подставивъ въ ур—нія. $-x$ вмѣсто x, и $-y$ вмѣсто y, найдемъ:

$$(x-3)(y+1) = xy - 11$$
$$(x+8)(y-2) = xy + 12;$$

которымъ, на осн. доказанной теоремы, удовлетворяютъ рѣшенія: $x = 10$, $y = 6$. Они служатъ прямыми отвѣтами на слѣдующую задачу:

„Куплено извѣстное число аршинъ матеріи по опредѣленной цѣнѣ. Если бы было куплено тремя аршинами *меньше*, а за аршинъ было заплачено 1 рублемъ *дороже*, то на всю покупку издержали бы 11 руб. меньше. Если же было бы куплено 8-ю аршинами *больше*, а за аршинъ платили бы 2 рублями *меньше*, то издержали бы 12 рублями больше. Сколько аршинъ куплено и сколько платили за аршинъ?"

373. II. Общій знаменатель $ab' - ba' = 0$, а одинъ изъ числителей, напр.

$$cb' - bc' \gtrless 0.$$

Равенство $ab' - ba' = 0$ можетъ имѣть мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; 2) $a = 0$, $b = 0$; 3) $a = 0$, $a' = 0$.

Предположеніе $b = 0$, $b' = 0$, обращающее также въ нуль биномъ $ab' - ba'$, слѣдуетъ устранить, потому что при немъ обращается въ нуль и числитель $cb' - bc'$, по условію, неравный нулю.

Первый случай. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. Оба неизвѣстныя представляются въ этомъ случаѣ подъ видомъ $\frac{m}{0}$ или ∞:

$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Покажемъ, что *безконечныя рѣшенія представляютъ единственно возможное рѣшеніе системы въ разсматриваемомъ случаѣ.*

Такимъ образомъ нужно доказать, что въ данномъ случаѣ уравненія не допускаютъ конечныхъ рѣшеній; а затѣмъ, что безконечныя рѣшенія дѣйствительно удовлетворяютъ системѣ.

Изъ условія $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ имѣемъ: $a=\frac{a'b}{b'}$; подставивъ въ первое ур., находимъ:

$$\frac{a'b}{b'}x+by=c,\quad \text{или}\quad a'x+b'y=\frac{cb'}{b}.$$

Но второе ур. есть

$$a'x+by'=c';$$

по условію же $cb'-bc'\gtrless 0$, откуда $\frac{cb'}{b}\gtrless c'$.

Отсюда видно, что система состоитъ изъ двухъ ур-ній, которыхъ первыя части одинаковы, между тѣмъ какъ вторыя неравны; очевидно, слѣдовательно, что всякія *конечныя* значенія x и y, обращающія въ тождество одно изъ уравненій, не могутъ обратить въ тождество и другое. Такія ур—нія, которыя не имѣютъ общихъ конечныхъ рѣшеній, называютъ *несовмѣстными* (противорѣчащими одно другому).

Покажемъ теперь, что безконечныя значенія x и y удовлетворяютъ системѣ, и для этого разсмотримъ два случая, смотря по тому, имѣютъ ли коэффиценты a и b одинаковые знаки, или противоположные.

Пусть a и b имѣютъ одинаковые знаки; пусть, при этомъ, $cb'-bc'>0$, и $ab'-ba'$, уменьшаясь, стремится къ нулю; въ такомъ случаѣ

$$x=+\infty.$$

Умноживъ обѣ части неравенства $cb'>bc'$ на $\frac{a}{b}$ - количество положительное, получимъ $\frac{ab'c}{b}>ac'$; но $\frac{ab'}{b}=a'$, слѣд. $a'c>ac'$, или $ac'-a'c<0$; поэтому

$$y=-\infty.$$

Замѣтивъ, что $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$, видимъ, что a' и b' также имѣютъ одинаковые знаки; слѣд., подставивъ въ ур—нія вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ

$$a\,.\,\infty-b\,.\,\infty=c$$
$$a'\,.\,\infty-b'\,.\,\infty=c',$$

т.-е.

$$\infty-\infty=c\quad \text{и}\quad \infty-\infty=c',$$

что возможно, потому что разность двухъ безконечностей можетъ быть какимъ угодно количествомъ.

Если a и b имѣютъ противоположные знаки, напр. $a>0$ и $b<0$, то, оставивъ остальныя предположенія безъ измѣненія, найдемъ

$$x=+\infty.$$

Умноживъ обѣ части неравенства $cb>bc'$ на $\frac{a}{b}$. количество положительное, получимъ: $-\frac{ab'c}{b}>-ac'$; но $\frac{ab'}{b}=a'$, слѣд. $-a'c>-ac'$, или $ac'-a'c>0$; а потому и

$$y=-\infty.$$

Замѣтивъ, что a' и b' имѣютъ противоположные знаки, подставивъ вмѣсто x и y ихъ значенія, получимъ:

$$a\,.\,\infty-(-b)\,.\,\infty=c,$$
$$a'\,.\,\infty-(-b')\,.\,\infty=c',$$

или $\infty-\infty=c$ и $\infty-\infty=c'$, — тождества.

Второй случай $a = 0$, $b = 0$. И въ этомъ случаѣ: $x = \infty$ и $y = \infty$; значенія эти приличествуютъ уравненіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя, имѣемъ:

$$0 \,.\, \infty + 0 \,.\, \infty = c$$
$$a' \,.\, \infty + b' \,.\, \infty = c'.$$

Но произведеніе $0 \,.\, \infty$ есть символъ неопредѣленности, сл. первое равенство можемъ разсматривать какъ тождество. Что касается второго, первая часть его есть разность двухъ безконечностей; ибо

$$x = \frac{cb}{0}, \text{ а } y = \frac{-ca}{0},$$

откуда

$$a'x + b'y = a'b'c\left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0}\right),$$

и равенство $a'b'c(\infty - \infty) = c$, есть тождество.

Съ другой стороны, очевидно, что всякая иная система значеній x и y не можетъ соотвѣтствовать ур—мъ:

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c \text{ и } a'x + b'y = c'.$$

Третій случай. $a = 0$, $a' = 0$. Формулы x и y принимаютъ видъ.

$$x = \frac{cb' - bc'}{0} = \infty; \quad y = \frac{0}{0}.$$

Итакъ, x безконеченъ, а y неопредѣленъ. И въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что никакая система конечныхъ значеній x и y не можетъ удовлетворять уравненіямъ

$$0 \,.\, x + by = c, \quad 0 \,.\, x + b'y = c,$$

ибо по условію $\frac{c}{b} \lessgtr \frac{c'}{b'}$.

Съ другой стороны, если вмѣсто x подставимъ ∞, то какъ $0 \,.\, \infty$ изображаетъ количество неопредѣленное, усматриваемъ, что существуетъ безчисленное множество значеній y, удовлетворяющихъ заразъ предыдущимъ уравненіямъ, въ которыхъ $0 \,.\, x$ замѣненъ количествами α и α', лишь бы произвольныя количества α и α' удовлетворяли соотношенію: $\frac{c - \alpha}{b} = \frac{c' - \alpha'}{b'}$.

Примѣчаніе I. Если кромѣ $a = 0$ и $a' = 0$ было бы и $b = 0$, y имѣло бы опредѣленную величину $\frac{c}{b'}$, ибо тогда слѣдовало бы положить $\alpha = c$ и $\alpha' = 0$.

Примѣчаніе II. Въ разсмотрѣнныхъ трехъ случаяхъ, если уравненія вытекаютъ изъ условій задачи, нужно еще разсмотрѣть, можетъ ли быть истолковано это алгебраическое рѣшеніе уравненій, если да — это будетъ единственно возможное рѣшеніе задачи; если нѣтъ — задача *невозможна;* невозможность эта, во всякомъ случаѣ, будетъ зависѣть отъ несовмѣстности данныхъ между собою и съ неизвѣстными. Потому-то и говорятъ, какъ и по отношенію къ ур—мъ съ 1 неизвѣстнымъ, что символъ ∞ есть признакъ невозможности задачи.

374. III. Знаменатель и оба числителя — нули.

$$ab' - a'b = 0, \quad cb' - c'b = 0, \quad ac' - a'c = 0.$$

Эти равенства могутъ имѣть мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; 2) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; 3) $a = 0$, $a' = 0$, $cb' - bc' = 0$.

Первый случай. $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. Значенія x и y берутъ видъ

$$x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}.$$

Неопредѣленность эта — дѣйствительная. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ общую величину равныхъ отношеній буквою k, т.-е. положивъ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$, имѣемъ отсюда: $a=a'k$, $b=b'k$, $c=c'k$; подставивъ въ первое ур., получимъ

$$k(a'x+b'y)=kc' \quad \text{или} \quad a'x+b'y=c'.$$

Такимъ образомъ, первое ур—ніе ничѣмъ не отличается отъ второго, такъ что въ сущности два неизвѣстныя связаны однимъ уравненіемъ, которое принимаетъ безчисленное множество рѣшеній: неопредѣленность дѣйствительная. Однако же, значенія x и y не вполнѣ произвольны, такъ какъ, въ силу того, что они связаны уравненіемъ $ax+by=c$, произвольному значенію одного неизвѣстнаго соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе другого.

Примѣчаніе. Если бы было $c=0$, а потому и $c'=0$, x и y были бы неопредѣленны, какъ и прежде, съ тѣмъ отличіемъ, что отношеніе ихъ $\frac{y}{x}$ сохраняло бы постоянную величину, равную $-\frac{a}{b}$; что прямо видно изъ уравненія $ax+by=0$, къ которому въ этомъ случаѣ приводятся оба ур—нія.

Второй случай. $a=0$, $b=0$, $c=0$. Въ этомъ случаѣ

$$x=\frac{0}{0},\quad y=\frac{0}{0}.$$

Но первое ур. обращается въ тождество $0=0$, слѣд. система сводится къ *одному* ур—нію съ *двумя* неизвѣстными: неопредѣленность дѣйствительная.

Третій случай. $a=0$, $a'=0$, $cb'-bc'=0$. Оба неизвѣстныя опять принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, а система

$$0\,.\,x+by=c,\quad 0\,.\,x+by=c',$$

показываетъ, что x въ самомъ дѣлѣ неопредѣленъ, но $y=\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$, т.-е. имѣетъ вполнѣ опредѣленную величину. Но это противорѣчіе между результатами, получаемыми изъ формулъ для неизвѣстныхъ и результатами, непосредственно выводимыми изъ уравненій, только кажущееся: оно зависитъ отъ того, что дробь, дающая значеніе y:

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab-ba'},$$

въ данномъ случаѣ содержитъ въ числителѣ и знаменателѣ общаго множителя, обращающагося въ нуль при данныхъ предположеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, вынеся за скобки въ числителѣ c, а въ знаменателѣ b, имѣемъ

$$y=\frac{c\left(\frac{ac'}{c}-a'\right)}{b\left(\frac{ab}{b}-a'\right)};$$

но изъ условія $cb'-cb=0$ имѣемъ $\frac{c'}{c}=\frac{b'}{b}$; слѣд.

$$y=\frac{c\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)}{b\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)}=\frac{c}{b}.$$

Если бы $cb'-bc'=0$ имѣли вслѣдствіе предположеній $b=0$, $b'=0$, то нашли бы $x=\frac{0}{0}$, $y=\infty$; эти рѣшенія отвѣчали бы ур—мъ, ибо, какъ $0\,.\,\infty$ есть символъ неопредѣленности, то равенства

$$0+0\,.\,\infty=c \quad \text{и} \quad 0+0\,.\,\infty=c'$$

суть тождества.

375. *Примѣчаніе.* Раскрытіе неопредѣленности дроби, принимающей видъ $\frac{0}{0}$ при частныхъ значеніяхъ *нѣсколькихъ* буквъ, въ нее входящихъ, можно дѣлать еще слѣдующимъ пріемомъ. Если дробь $\frac{A}{B}$, въ составъ которой входятъ количества $x, y, z, \ldots$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ то, положивъ

$$x=a+h,\quad y=b+ph,\quad z=c+qh,\ \ldots$$

подставляютъ эти величины въ числит. и знам. и, сокративъ дробь, полагаютъ $h=0$: тогда и получится *истинное значеніе* дроби $\frac{A}{B}$ при $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ Оно можетъ быть или опредѣленно или неопредѣленно, см. по тому, будетъ ли независимо отъ $p, q, \ldots$ или же, послѣ всевозможныхъ упрощеній, будетъ еще содержать одно или нѣсколько изъ этихъ количествъ, располагая которыми произвольно, можно дать дроби какую угодно величину.

Такъ, мы видимъ, что при $a=0$, $a'=0$ и $cb'-bc'=0$, дроби

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{и} \quad y=\frac{ac-ca'}{ab'-ba'}$$

принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$. Полагаемъ

$$a=h,\quad a'=ph,\quad c'=\frac{cb'}{b}+b'qh;$$

находимъ

$$x=\frac{bb'q}{bp-b'},$$

слѣд. x дѣйствительно неопредѣленъ, потому что, выбирая извѣстнымъ образомъ p и q, можно ему давать произвольныя значенія.

Для y находимъ

$$\frac{h\left(\frac{cb'}{b}+b'qh\right)-cph}{hb'-bph};$$ сократимъ на h, а потомъ положивъ $h=0$:

$$\frac{c(b'-bp)}{b(b'-bp)}=\frac{c}{b}$$ — величину вполнѣ опредѣленную.

376. Сдѣланное изслѣдованіе можно резюмировать такъ: *система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ одно рѣшеніе конечное или безконечное, если изъ трехъ биномовъ*

$$ab'-ba',\quad cb'-bc',\quad ac'-ca'$$

обращается въ нуль не болѣе одного: рѣшеніе неопредѣленно, если два изъ нихъ дѣлаются нулями, за исключеніемъ случая, когда: $c=0$, $c'=0$.

Приводимъ нѣсколько задачъ съ полнымъ изслѣдованіемъ.

Первый примѣръ изслѣдованія.

377. *Два курьера ѣдутъ равномѣрно и въ одну сторону, отъ* R'' *къ* R, *по прямой* xy, *со скоростями* v *и* v'; *въ данный моментъ одинъ находится въ* A, *другой въ* A', *въ разстояніяхъ* $OA=d$ *и* $OA'=d'$ *отъ точки* O. *Спрашивается въ какомъ разстояніи отъ точки* O *и черезъ сколько часовъ отъ даннаго момента произойдетъ встрѣча?*

Черт. 31.

Пусть встрѣча произойдетъ въ будущемъ, т.-е. вправо отъ A' на разстояніи отъ O, равномъ $OR=x$, и черезъ t часовъ отъ даннаго момента. Уравненія задачи будутъ слѣдующія. $OR=OA+AR$, $OR=OA'+A'R$ или

$$\left.\begin{aligned} x&=d+vt \\ x&=d'+v't \end{aligned}\right\}\ (1).$$

Если допустить, что встрѣча имѣетъ мѣсто между O и A, въ нѣкоторой точкѣ R', т.-е. вправо отъ O, но *до* того момента, когда курьеры проѣзжаютъ— одинъ черезъ A, другой черезъ A', то уравненія, при сохраненіи прежнихъ обозначеній, будутъ. $OR'=OA-R'A$, $OR'=OA'-R'A'$, или

$$\left.\begin{aligned} x&=d-vt \\ x&=d'-v't \end{aligned}\right\}\ (2).$$

Такъ какъ эта система отличается отъ первой знакомъ при t, то заключаемъ обратно, что если система (1) даетъ положительное рѣшеніе для x и отрицательное для t, это служитъ признакомъ того, что встрѣча имѣла мѣсто вправо отъ O, но раньше даннаго момента, и что время, протекшее отъ встрѣчи до этого момента равно абсолютной величинѣ отрицательнаго рѣшенія.

Наконецъ положимъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ R'', влѣво отъ точки O: уравненія, при сохраненіи прежнихъ обозначеній, будутъ: $R''O=R''A-OA$, $R''O=R''A'-OA'$, или $x=vt-d$, $x=v't-d'$, или

$$\left.\begin{aligned} -x&=d-vt \\ -x&=d'-v't \end{aligned}\right\}\ (3).$$

Эта система выводится изъ (1) перемѣною x и t на $-x$ и $-t$. Слѣдовательно, обратно, если система (1) даетъ отрицательныя значенія для x и t, это будетъ признакомъ того, что встрѣча имѣла мѣсто влѣво отъ O, въ разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ x, и что время, протекшее отъ момента встрѣчи, равно абсолютной величинѣ t.

378. Изслѣдованіе. Послѣ этого предварительнаго изслѣдованія рѣшаемъ систему (1):

$$x=\frac{vd-dv'}{v-v'},\quad t=\frac{d'-d}{v-v'}.$$

Дѣлаемъ всевозможныя предположенія относительно общаго знаменателя; эти предположенія суть:

$$v>v',\quad v=v',\quad v<v'.$$

При этомъ, такъ какъ числители могутъ получать какія угодно величины, разложимъ каждый изъ предыдущихъ случаевъ на три другіе случая:

$$d'>d,\quad d'=d,\quad d'<d.$$

Отсюда уже вытекаютъ опредѣленныя предположенія относительно другого числителя: $vd'-v'd$.

Въ самомъ дѣлѣ, если: при $v>v'$ возьмемъ $d'>d$, то отсюда необходимо вытекаетъ, что $vd'>v'd$, но не можетъ быть: ни $vd'=v'd$, ни $vd'<v'd$. Но если при $v>v'$ взять $d'<d$, то другой числитель даетъ три возможныя предположенія

$$vd'>v'd,\quad vd'=v'd,\quad vd'<v'd.$$

Поступая такимъ образомъ, получаемъ слѣдующую таблицу всевозможныхъ комбинацій, въ числѣ тринадцати:

$v>v'$	$d'>d$	$vd'>dv'$
	$d'=d$	$vd'>dv'$
	$d'<d$	$vd'>dv'$ $vd'=dv'$ $vd'<dv'$
$v=v'$	$d'>d$	$vd'>dv'$
	$d'=d$	$vd'=dv'$
	$d'<d$	$vd'<dv'$
$v<v'$	$d'>d$	$vd'>dv'$ $vd'=dv'$ $vd'<dv'$
	$d'=d$	$vd'<dv'$
	$d'<d$	$vd'<dv'$

Изслѣдуемъ поочередно каждый изъ этихъ случаевъ.

Первый случай. $v>v'$, $d'>d$, $vd'>dv'$.

Формулы для неизвѣстныхъ даютъ конечныя, опредѣленныя и положительныя значенія для x и t, означающія, что встрѣча будетъ имѣть мѣсто въ будущемъ (считая отъ даннаго момента) и, слѣд., вправо отъ точки O и отъ A.

Этотъ результатъ можно было предвидѣть: въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $v>v'$, т. е. догоняющій курьеръ ѣдетъ скорѣе передняго, слѣд. долженъ необходимо встрѣтиться съ нимъ вправо отъ A'.

Второй случай. $v>v'$, $d'=d$, $vd'>dv'$.

Формулы даютъ

$$x=d;\quad t=0.$$

Это значитъ, что встрѣча имѣетъ мѣсто въ данный моментъ, что совершенно очевидно. Въ самомъ дѣлѣ, при d d оба курьера въ разсматриваемый моментъ находятся въ одной точкѣ (напр. A), а какъ $v > v$, т.-е. скорости ихъ неравны, то они только въ этотъ моментъ и будутъ вмѣстѣ, а затѣмъ одинъ будетъ постоянно впереди другого.

Третій случай. $v>v'$, $d'<d$, $vd'>dv'$.

Формулы даютъ:

$$x>0, \quad t<0.$$

Положительное значеніе x показываетъ, что встрѣча имѣетъ мѣсто вправо отъ 0; отрицательное t означаетъ, что она произошла *раньше* того момента, когда одинъ курьеръ проѣзжаетъ черезъ A, другой черезъ A', въ нѣкоторой точкѣ R' (подставивъ въ систему (1) вмѣсто t . . . $-t$, находимъ систему (2), относящуюся къ точкѣ R').

Это можно видѣть изъ условій, при помощи чертежа:

Черт. 32.

Такъ какъ $d'<d$, то курьеръ, ѣдущій со скоростью v', находится въ данный моментъ ближе другого къ точкѣ 0; $v>v'$, сл. курьеръ, ѣдущій со скоростью v, долженъ былъ встрѣтить другого раньше даннаго момента, т.-е. влѣво отъ точки A'; затѣмъ, неравенство $vd > v d$ даетъ

$$\frac{d'}{v'} > \frac{d}{v},$$

а это значитъ, что курьеръ (v') ѣдетъ d' верстъ большее время, чѣмъ курьеръ (v) проѣзжаетъ d верстъ; значитъ послѣдній проѣхалъ черезъ точку 0 послѣ перваго, и какъ въ данный моментъ онъ обогналъ перваго, то и долженъ былъ встрѣтить его вправо отъ точки O.

Четвертый случай. $v>v'$, $d'<d$, $vd'=dv'$.

Формулы даютъ: $x=0$, $t<0$.

Эти рѣшенія означаютъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ 0 *раньше* разсматриваемаго момента. И въ самомъ дѣлѣ, равенство $vd' - dv$ даетъ

$$\frac{d'}{v'} = \frac{d}{v},$$

т.-е. времена, употребленныя на прохожденіе разстояній OA' и OA, равны (предыд. черт.), слѣд. оба курьера прошли черезъ точку 0 въ одинъ и тотъ же моментъ.

Пятый случай. $v>v'$, $d'<d$, $vd'<dv'$

Формулы даютъ: $x<0$, $t<0$.

Рѣшенія эти означаютъ, что встрѣча имѣла мѣсто раньше даннаго момента и влѣво отъ точки 0 (см. систему (3) уравненій).

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ курьеръ, находящійся впереди, въ A, ($d>d'$) двигается съ большею скоростью ($v>v'$), — то встрѣча уже имѣла мѣсто. Затѣмъ, изъ неравенства $vd'<dv'$ имѣемъ: $\frac{d'}{v'}<\frac{d}{v'}$, а это значитъ, что курьеръ, ѣдущій скорѣе, прошелъ черезъ точку O раньше другого, слѣд. встрѣча его съ другимъ уже была влѣво отъ точки O.

Шестой случай. $v=v'$, $d'>d$, $vd'>dv'$.

Формулы даютъ: $x=\infty$, $t=\infty$.

Эти рѣшенія служатъ признакомъ дѣйствительной невозможности. Въ самомъ дѣлѣ, въ данный моментъ курьеры находятся въ различныхъ точкахъ, скорости же ихъ движенія равны, слѣд. разстояніе между ними всегда будетъ одинаково, и потому они не могутъ встрѣтиться.

Седьмой случай. $v=v'$, $d'=d$, $vd'=v'd$.

Формулы даютъ: $x=\frac{0}{0}$, $t=\frac{0}{0}$:

неопредѣленность дѣйствительная; въ чемъ не трудно убѣдиться и изъ самыхъ условій. Въ самомъ дѣлѣ, въ данный моментъ курьеры находятся вмѣстѣ ($d'=d$), ѣдутъ они съ одинаковою скоростью ($v=v'$), слѣд. постоянно они будутъ находиться вмѣстѣ.

Восьмой случай. $v=v'$, $d'<d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ: $x=\infty$, $t=\infty$, что объясняется такимъ же точно образомъ, какъ и въ случаѣ шестомъ.

Девятый случай. $v<v'$, $d'>d$, $vd'>dv'$.

Формулы даютъ: $x<0$, $t<0$.

Рѣшенія эти означаютъ, что встрѣча уже имѣла мѣсто влѣво отъ 0 (черт. 33).

Черт. 33.

Въ этомъ убѣждаемся разсужденіями, аналогичными приведеннымъ въ пятомъ случаѣ.

Десятый случай. $v<v'$, $d'>d$, $vd'=dv'$.

Формулы даютъ: $x=0$, $t<0$.

Это значитъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ 0; въ чемъ убѣждаемся такимъ же образомъ, какъ и въ четвертомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай. $v<v'$, $d'>d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ: $x>0$, $t<0$.

Встрѣча имѣла мѣсто вправо отъ точки 0, но раньше настоящаго момента. Объясненіе то же самое, что для третьяго случая.

Двѣнадцатый случай. $v<v'$, $d'=d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ: $x=d=d'$; $t=0$.

Встрѣча имѣла мѣсто въ настоящій моментъ. Какъ и во второмъ случаѣ.

Тринадцатый случай. $v<v'$, $d'<d$, $vd'<dv'$.

Формулы даютъ величины конечныя, опредѣленныя и положительныя, слѣд. встрѣча имѣетъ мѣсто въ будущемъ. Какъ въ первомъ случаѣ.

379. *Примѣчаніе.* Уравненія

$$\left.\begin{array}{l} x=d+vt \\ x=d'+v't \end{array}\right\} (A)$$

были выведены въ томъ предположеніи, что оба курьера ѣдутъ въ одну сторону, именно въ направленіи отъ x къ y. Легко видѣть, что эти же уравненія могутъ служить и для другихъ задачъ, аналогичныхъ первой, если только условимся подъ v и v' разумѣть отрицательныя количества, если направленіе движенія будетъ отъ y къ x, а подъ d и d' отрицательныя числа, если линіи OA и OA' будутъ находиться влѣво отъ O.

Такъ напр., если курьеры ѣдутъ по направленію отъ y къ x, и при составленіи уравненій мы допустимъ, что точка встрѣчи R лежитъ вправо отъ O, то уравненія будутъ

$$\left.\begin{aligned} x &= d - vt \\ x &= d' - v't \end{aligned}\right\} \text{(B)}.$$

Очевидно, что ту же задачу можно выразить и уравненіями (A), если только подъ буквами v и v' въ системѣ (A) разумѣть отрицательныя числа.

Черт. 34.

Если бы курьеръ, выѣзжающій изъ A, ѣхалъ въ направленіи xy, а выѣзжающій изъ A' — въ направленіи yx, мы имѣли бы систему

$$\left.\begin{aligned} x &= d + vt \\ x &= d' - v't \end{aligned}\right\} \text{(C)}.$$

Вмѣсто нея мы могли бы взять также систему (A), разумѣя въ ней подъ v' — количество отрицательное.

Точки A и A', въ которыхъ находились курьеры въ настоящій моментъ, помѣщались вправо отъ точки O; задача будетъ еще общѣе, если дать этимъ точкамъ какія угодно положенія на линіи xy, считая d и d' положительными, когда эти точки расположены вправо отъ O, и отрицательными, если точки A и A' находятся влѣво отъ O.

Такимъ образомъ, разумѣя подъ d и d' абсолютныя количества, для чертежа (35) найдемъ уравненія

Черт. 35.

$$\left.\begin{aligned} x &= -d + vt \\ x &= d' + v't \end{aligned}\right\} \text{(D)}.$$

А для чертежа (36) уравненія

Черт. 36.

$$\left.\begin{aligned} x &= -d + vt \\ x &= -d' + v't \end{aligned}\right\} \text{(E)}.$$

Очевидно, что система (A) можетъ замѣнить собою каждую изъ системъ (D) и (E), если только въ первомъ случаѣ будемъ разумѣть въ системѣ (A) подъ d число отрицательное, а во второмъ — условимся подъ d и d' разумѣть отрицательныя числа.

Итакъ, уравненія

$$\begin{aligned} x &= d + vt \\ x &= d + v't, \end{aligned}$$

имѣющія рѣшеніями:

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d' - d}{v - v'},$$

служатъ выраженіемъ слѣдующей совершенно общей задачи:

Два курьера ѣдутъ равномѣрно по прямой со скоростями, равными, по величинѣ и по знаку, количествамъ v и v', въ настоящій моментъ они находятся отъ точки O, лежащей на этой прямой, въ разстояніяхъ, изображаемыхъ, по величинѣ и по знаку, буквами d и d'. Найти разстояніе точки O до точки встрѣчи, и время встрѣчи.

При этомъ, разстоянія считаются положительными — вправо отъ O, отрицательными — влѣво отъ O; скорости — положительными въ направленіи xy, отрицательными въ направленіи yx; времена — положительными, когда они слѣдуютъ за даннымъ моментомъ, отрицательными — когда предшествуютъ этому моменту.

Числовой примѣръ. Два курьера, ѣдущіе равномѣрно по прямой, находятся въ настоящій моментъ: одинъ въ точкѣ A, отстоящей отъ O влѣво на 20 верстъ, другой въ A' въ разстояніи, равномъ 35 верстамъ, вправо отъ O. Они движутся навстрѣчу другъ другу, первый со скоростью 4, а второй 6 верстъ въ часъ. Опредѣлить разстояніе точки встрѣчи отъ O и время встрѣчи.

Для рѣшенія задачи нужно только въ формулы

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d' - d}{v - v'}$$

подставить вмѣсто d число -20, вмѣсто d' число $+35$; затѣмъ: $+4$ вмѣсто v и -6 вмѣсто v'. Найдемъ:

$$x = 2 \text{ вер.}; \quad t = 4 \text{ час. } 30 \text{ мин.}$$

Точка встрѣчи находится вправо отъ O на 2 версты, а время встрѣчи [illegible] 30 мин. отъ настоящаго момента.

Второй примѣръ изслѣдованія.

380. *Изъ двухъ сплавовъ серебра, пробы которыхъ равны соотвѣтственно a и b, составить p фунтовъ новаго сплава пробы c. Сколько фунтовъ нужно взять отъ каждаго сплава?*

Пусть отъ перваго сплава нужно взять x, отъ втораго y фунтовъ. По условію, имѣемъ уравненіе

$$x + y = p \;.\;.\;. (1).$$

Въ одномъ фунтѣ перваго сплава находится a золотниковъ чистаго серебра, слѣд. въ x фунтахъ его будетъ ax зол.; въ y фунтахъ второго сплава by зол.; слѣд. въ $x+y$ или въ p фунтахъ новаго сплава содержится $ax+by$ зол., а въ одномъ фунтѣ $\frac{ax+by}{p}$ зол. чистаго серебра, что равно c; поэтому второе ур. будетъ

$$ax + by = cp \;.\;.\;. (2).$$

Рѣшивъ уравненія (1) и (2), найдемъ

$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot p, \quad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot p.$$

Изслѣдованіе. По свойству вопроса, x и y не могутъ быть ни безконечными, ни отрицательными, поэтому рѣшенія такого рода будутъ служить признакомъ абсолютной невозможности задачи при тѣхъ условіяхъ, которыя ведутъ къ рѣшеніямъ этого рода. Въ этомъ и заключается особенность разсматриваемой задачи, изъ всѣхъ значеній x и y, какія допускаютъ найденныя формулы для этихъ количествъ, слѣдуетъ удерживать только значенія конечныя, опредѣленныя и положительныя.

Относительно общаго знаменателя возможны 3 предположенія:

$$a>b,\quad a=b,\quad a<b.$$

Каждое изъ этихъ предположеній соединяемъ со всевозможными предположеніями касательно одного изъ числителей, напр., перваго:

$$c>b,\quad c=b,\quad c<b.$$

Относительно второго числителя нужно дѣлать такія предположенія, которыя были бы совмѣстны съ прежде взятыми. Такъ, если возьмемъ предположеніе $a>b$ и $c>b$, то его можно сочетать съ каждымъ изъ трехъ возможныхъ предположеній относительно другого числителя: $a>c$, $a=c$, $a<c$. Но если взять комбинацію $a=b$ и $c>b$, то ее можно соединить только съ предположеніемъ $a<c$, такъ какъ c, будучи больше b, не можетъ быть ни равно, ни меньше количества a, равнаго b. Такимъ путемъ мы получаемъ слѣдующую таблицу изслѣдованія:

$$a>b\left\{\begin{array}{ll} c>b & \left\{\begin{array}{l} a>c \\ a=c \\ a<c \end{array}\right. \\ c=b & \ a>c \\ c<b & \ a>c \end{array}\right.$$

$$a=b\left\{\begin{array}{ll} c>b & a<c \\ c=b & a=c \\ c<b & a>c \end{array}\right.$$

$$a<b\left\{\begin{array}{ll} c>b & \ a<c \\ c=b & \ a<c \\ c<b & \left\{\begin{array}{l} a>c \\ a=c \\ a<c \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Первый случай. $a>b,\ c>b,\ a>c.$

Формулы даютъ для x и y рѣшенія конечныя, опредѣленныя и положительныя, слѣд. задача возможна. Это слѣдуетъ и изъ условій: въ самомъ дѣлѣ, проба c искомаго сплава, по условію, больше низшей пробы b, но меньше высшей пробы a; очевидно, такой сплавъ всегда можно составить.

Второй случай. $a>b,\ c>b,\ a=c.$

Формулы даютъ: $x=p,\ y=0.$

Это значитъ, что всѣ p фунтовъ должны быть взяты отъ сплава пробы a, и ничего не нужно брать отъ сплава пробы b. Это очевидно a priori, ибо проба c составляемаго сплава должна равняться, по условію, пробѣ a.

Третій случай. $a>b,\ c>b,\ a<c.$

Формулы даютъ: $x>0,\ y<0.$

Заключаемъ, что задача невозможна. Это видно à priori: въ самомъ дѣлѣ, проба требуемаго сплава должна быть больше не только низшей пробы b, но и высшей a данныхъ сплавовъ; очевидно, что сплавляя послѣдніе, нельзя получить пробы c.

Четвертый случай. $a>b,\ c=b,\ a>c.$

Формулы даютъ: $x = 0$, $y = p$.

Это значитъ, что всѣ p фунтовъ должны быть взяты отъ сплава пробы b, что очевидно, ибо искомый сплавъ и долженъ имѣть пробу b (условіе $c = b$).

Пятый случай. $a > b$, $c < b$, $a > c$.

Формулы даютъ: $x < 0$, $y > 0$.

Отрицательное значеніе x указываетъ на невозможность задачи. И въ самомъ дѣлѣ, задача невозможна, потому что проба искомаго сплава должна быть меньше не только a, но и низшей пробы b одного изъ данныхъ сплавовъ.

Шестой случай. $a = b$, $c > b$, $a < c$.

Формулы даютъ: $x = \infty$, $y = \infty$.

Задача невозможна, и въ самомъ дѣлѣ, составляющіе сплавы — одинаковой пробы ($a = b$), проба же требуемаго сплава c должна быть больше пробы $a = b$, что невозможно.

Седьмой случай. $a = b = c$.

Формулы даютъ: $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Это значитъ, что задача неопредѣленна, въ томъ смыслѣ, что можно взять число фунтовъ, не превышающее p, отъ одного изъ данныхъ сплавовъ, а недостающую до p часть изъ другого. Результатъ этотъ очевиденъ à priori, потому что всѣ три сплава — одинаковой пробы.

Восьмой случай. $a = b$, $c < b$, $a > c$.

Формулы даютъ: $x = \infty$, $y = \infty$.

Задача невозможна, какъ и въ шестомъ случаѣ.

Девятый случай. $a < b$, $c > b$, $a < c$.

Формулы даютъ: $x < 0$, $y > 0$; отрицательное значеніе x указываетъ на невозможность задачи, подобно пятому случаю.

Десятый случай. $a < b$, $c = b$, $a < c$.

Формулы даютъ: $x = 0$, $y = p$, какъ въ четвертомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай, $a < b$, $c < b$, $a > c$.

Формулы даютъ: $x < 0$, $y < 0$; задача невозможна, какъ и въ третьемъ случаѣ.

Двѣнадцатый случай. $a < b$, $c < b$, $a = c$.

Формулы даютъ: $x = p$, $y = 0$, какъ и во второмъ случаѣ.

Тринадцатый случай. $a < b$, $c < b$, $a < c$.

Формулы даютъ для x и y величины конечныя, опредѣленныя и положительныя. Задача, слѣд., возможна, какъ въ первомъ случаѣ.

Третій примѣръ изслѣдованія.

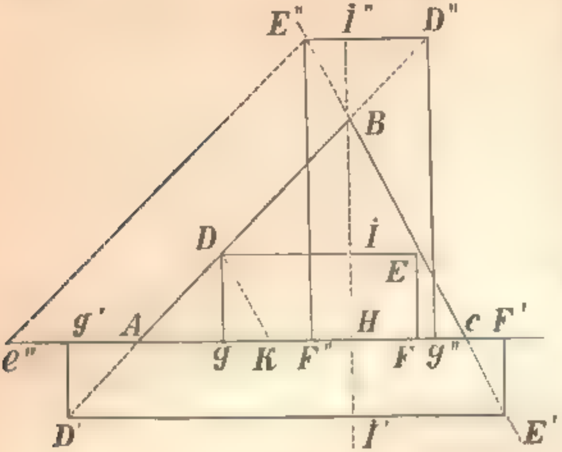
331. *Въ треугольникъ* ABC, *котораго основаніе равно* b, *а высота* h, *вписать прямоугольникъ даннаго периметра* $2p$.

Прямоугольникъ называется *вписаннымъ* въ треугольникѣ, когда двѣ его вершины находятся на одной сторонѣ треугольника, а двѣ другія вершины на двухъ другихъ сторонахъ, таковъ прямоугольникъ DEFG. Если же эти двѣ послѣднія вершины находятся не на самыхъ сторонахъ, а на ихъ продолженіяхъ, то прямоугольникъ называютъ *внѣ-вписаннымъ*, таковы прямоугольники D'E'F'G' и [illegible]

Внутренній вписанный прямоугольникъ.

332. Пусть задача рѣшена и DEFG есть требуемый прямоугольникъ; означимъ сторону DE буквою x, сторону EF буквою y, основаніе AC буквою b, высоту BH треугольника буквою h. Во-первыхъ имѣемъ ур—ніе

$$x + y = p \; . \; . \; . \; (1)$$



Черт. 37.

Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и BDE основанія относятся какъ высоты, слѣдовательно

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BI}{BH},$$

или

$$\frac{x}{b} = \frac{h - y}{h} \; . \; . \; . \; (2).$$

Рѣшая ур—нія (1) и (2), находимъ

$$x = \frac{b(h - p)}{h - b},$$

$$y = \frac{h(p - b)}{h - b} \; . \; . \; . \; (3).$$

Изслѣдованіе. Во-первыхъ замѣтимъ, что x и y не могутъ быть одновременно отрицательными, потому что сумма ихъ, въ силу ур—нія (1), равна положительному количеству p, но одно изъ этихъ количествъ можетъ быть отрицательнымъ; причемъ отрицательныя значенія x или y, въ такомъ случаѣ, не могутъ быть отбрасываемы, какъ невозможныя, но подлежатъ истолкованію слѣдующимъ образомъ.

Если для y получается отрицательное рѣшеніе, и слѣд. для x положительное, то для истолкованія этого отрицательнаго рѣшенія перемѣнимъ въ уравненіяхъ (1) и (2) y на $-y$; найдемъ:

$$x - y = p, \; \frac{x}{b} = \frac{h + y}{h} \; . \; . \; . \; (m).$$

Первое изъ этихъ уравненій означаетъ, что дается не сумма сторонъ прямоугольника, а *разность* между его основаніемъ и высотой. Второе уравненіе отвѣчаетъ прямоугольнику D'E'F'G', котораго основаніе D'E' находится подъ основаніемъ AC треугольника; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ D'E' буквою x и E'F' буквою y, изъ подобія треугольниковъ D'BE' и ABC прямо находимъ ур—ніе (m). Впрочемъ, непосредственно видно, что высота I'H этого прямоугольника имѣетъ, по отношенію къ AC, положеніе противоположное, высотѣ IH перваго прямоугольника. Итакъ, отрицательное значеніе для y соотвѣтствуетъ слѣдующему видоизмѣненію даннаго вопроса: *построить внѣ вписанный прямоугольникъ, котораго двѣ вершины находились бы на продолженіяхъ сторонъ* BA *и* BC *треугольника подъ его основаніемъ, если извѣстна разность между основаніемъ и высотою прямоугольника.*

Рѣшеніе, соотвѣтствующее этому новому условію, будемъ называть рѣшеніемъ *второго рода*, называя рѣшеніе въ точномъ смыслѣ даннаго вопроса рѣшеніемъ *перваго рода*.

Если отрицательное рѣшеніе получится для x, то для истолкованія его перемѣнимъ въ уравненіяхъ (1) и (2) x на $-x$; найдемъ:

$$y - x = p, \; \frac{-x}{b} = \frac{h - y}{h} \text{ или } \frac{x}{b} = \frac{y - h}{h} \; . \; . \; . \; (n).$$

Первое изъ этихъ уравненій означаетъ, что дается *разность* между высотою и основаніемъ искомаго прямоугольника. Второе уравненіе отвѣчаетъ прямоугольнику D″E″F″G″, котораго основаніе E″D″ находится надъ вершиною B треугольника; въ самомъ дѣлѣ, сохранивъ прежнія обозначенія, изъ подобія треугольниковъ D″BE″ и ABC тотчасъ выходимъ уравненіе (*n*). Впрочемъ, къ такому истолкованію отрицательнаго значенія x можно придти еще такимъ образомъ, проектируя сторону E″D″ на линію основанія тр—ка посредствомъ прямой E″e″, параллельной AB, замѣчаемъ, что отрѣзокъ Ae″ имѣетъ положеніе отрицательныхъ x-овъ (положительные x-сы DE и D′E′, проектированные подобнымъ же образомъ на AC, займутъ положеніе вправо отъ точки A). Итакъ, всякій разъ, когда будетъ получаться для x отрицательное значеніе, мы его будемъ истолковывать какъ рѣшеніе слѣдующаго вопроса: ***построить внѣ-описанный прямоугольникъ, котораго высота превышала бы основаніе на p, и двѣ вершины котораго лежали бы на продолженіяхъ сторонъ*** AB ***и*** CB ***за вершину треугольника***. Назовемъ это рѣшеніе рѣшеніемъ ***третьяго рода***.

Послѣ этого подготовительнаго изслѣдованія, составляемъ таблицу всевозможныхъ случаевъ, какіе могутъ представить формулы x и y. Во-первыхъ, относительно общаго знаменателя этихъ формулъ можно сдѣлать три предположенія: $h > b$, $h < b$, $h = b$. Каждое изъ этихъ предположеній можно комбинировать съ каждымъ изъ трехъ предположеній относительно числителя формулы x:

$$h > p, \quad h = p, \quad h < p.$$

Такимъ образомъ составится 9 комбинацій. Относительно второго числителя придется дѣлать такія предположенія, которыя не находились бы въ противорѣчіи съ вышеуказанными. Такъ, взявъ $h > b$ и $h > p$, можемъ это предположеніе комбинировать съ каждымъ изъ слѣдующихъ трехъ: $p > b$, $p = b$, $p < b$; а взявъ комбинацію $h > b$, $h < p$, можемъ относительно второго числителя положить только $p > b$. Поступая такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующую таблицу изслѣдованія

$$h > b \begin{cases} h > p & \begin{cases} p > b \\ p = b \\ p < b \end{cases} \\ h = p \;, & p > b \\ h < p \;, & p > b \end{cases}$$

$$h < b \begin{cases} h > p \;, & p < b \\ h = p \;, & p < b \\ h < p & \begin{cases} p > b \\ p = b \\ p < b. \end{cases} \end{cases}$$

$$h = b \begin{cases} h > p \;, & p < b \\ h = p \;, & p = b \\ h < p \;, & p > b. \end{cases}$$

Первый случай. $h > b$, $h > p > b$.

Въ этомъ случаѣ $h - b > 0$, $h - p > 0$ и $p - b > 0$; а слѣд.

$$x > 0 \text{ и } y > 0.$$

Но чтобы эти алгебраическія положительныя рѣшенія дали внутренній вписанный прямоугольникъ, надо еще, чтобы было $x < b$, $y < h$. Въ данномъ случаѣ такъ и есть, ибо каждая изъ дробей $\frac{h-p}{h-b}$ и $\frac{p-b}{h-b}$ меньше 1.

Такимъ образомъ, при данныхъ условіяхъ имѣемъ *рѣшеніе перваго рода*.

Второй случай. $h > b$, $h > p$, $p = b$.

Здѣсь имѣемъ: $h-b>0$, $h-p>0$, $p-b=0$; слѣд.

$$x=b,\ y=0;$$

т.-е. прямоугольникъ сливается съ линіей AC, обращается въ прямую.

Третій случай. $h>b$, $h>p<b$.
Въ этомъ случаѣ $h-b>0$, $h-p>0$, $p-b<0$, слѣд.

$$x>0\ (\text{и} >b),\ y<0;$$

это рѣшеніе, какъ уже знаемъ, даетъ прямоугольникъ *второго рода*.

Четвертый случай. $p=h>b$.
Здѣсь имѣемъ: $h-b>0$, $h-p=0$, $p-b>0$; слѣд.

$$x=0,\ y=h,$$

и прямоугольникъ обращается въ прямую BB.

Пятый случай. $p>h>b$.
Это условіе даетъ: $h-p<0$, $h-b>0$, $p-b>0$, а потому

$$x<0,\ y>0\ (\text{и} >h,\ \text{ибо дробь}\ \frac{p-b}{h-b}>1).$$

Получаемъ рѣшеніе *третьяго* рода, т.-е. прямоугольникъ D'E''F'G'', въ которомъ разность между линіями E'F' и E'D' равна p.

Шестой случай. $p<h<b$.
Въ такомъ случаѣ: $h-b<0$, $h-p>0$, $p-b<0$, а потому

$$x<0,\ y>0\ (\text{и больше}\ h).$$

Имѣемъ, какъ и въ пятомъ случаѣ, рѣшеніе *третьяго рода*.

Седьмой случай. $p=h<b$.
Въ этомъ случаѣ: $h-b<0$, $h-p=0$, $p-b<0$; слѣд.

$$x=0,\ y=h,$$

прямоугольникъ сливается съ высотою треугольника.

Восьмой случай. $p>b>h$.
Въ этомъ случаѣ: $h-b<0$, $h-p<0$, $p-b>0$.

$$x>0\ (\text{и больше}\ b),\ y<0:$$

получаемъ рѣшеніе *второго рода*, какъ въ третьемъ случаѣ.

Девятый случай. $h<p=b$.
Здѣсь имѣемъ: $h-b<0$, $h-p<0$, $p-b=0$; а потому

$$x=b,\ y=0:$$

Прямоугольникъ сливается съ основаніемъ треугольника.

Десятый случай. $h<p<b$.
Въ этомъ случаѣ: $h-b<0$, $h-p<0$, $p-b<0$; а потому

$$x>0\ \text{и}\ y>0,\ \text{при чемъ}\ x<b,\ \text{а}\ y<h:$$

имѣемъ рѣшеніе *перваго рода*, какъ въ первомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай. $p < b = h$. Находимъ:

$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Эти рѣшенія означаютъ невозможность задачи. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненія (2) $b = h$, имѣемъ: $x = h - y$, откуда $x + y = h$, т. е. когда въ треугольникѣ основаніе равно высотѣ, полупериметръ вписаннаго прямоугольника долженъ равняться высотѣ; слѣд. какъ скоро p не равно h, задача невозможна.

Двѣнадцатый случай. $h = b = p$. Въ этомъ случаѣ:

$$h - b = h - p = p - b = 0, \text{ слѣд.}$$

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Эта неопредѣленность дѣйствительная; въ самомъ дѣлѣ, тотчасъ мы видѣли, что при $b = h$ полупериметръ всякаго вписаннаго прямоугольника долженъ равняться h; слѣд. если будетъ дано, какъ и есть въ данномъ случаѣ, $p = h$, всякій вписанный прямоугольникъ будетъ требуемый, и задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

Тринадцатый случай. $p > h = b$. Въ этомъ случаѣ

$$x = \infty, \quad y = \infty:$$

задача невозможна, какъ въ одиннадцатомъ случаѣ.

Примѣчаніе I. Изслѣдованіе показало намъ, что *рѣшеніе перваго рода* получается въ томъ случаѣ, когда полупериметръ искомаго прямоугольника заключается между основаніемъ и высотою треугольника, т. е. при $h > b$ если имѣемъ $h > p > b$ (первый случай), а при $h < b$, если дано, что $h < p < b$ (десятый случай). Эти условія можно найти и геометрически. Проведя DK параллельно BC, найдемъ KC = DE, и слѣд.

$$p = \mathrm{DE} + \mathrm{DG} = \mathrm{CK} + \mathrm{DG}.$$

Но вслѣдствіе подобія треугольниковъ ABC и ADK, необходимо имѣемъ

при $h > b$ и $\mathrm{DG} > \mathrm{AK}$, а потому $p > \mathrm{CK} + \mathrm{AK}$ или $p > b$;
а при $h < b$ и $\mathrm{DG} < \mathrm{AK}$, а потому $p < \mathrm{CK} + \mathrm{AK}$ или $p < b$.

Съ другой стороны

$$p = \mathrm{DG} + \mathrm{DE} = \mathrm{HI} + \mathrm{DE}.$$

Но изъ подобія треугольниковъ BDE и BAC необходимо имѣемъ

при $h > b$ и $\mathrm{BI} > \mathrm{DE}$, а слѣд. $p < \mathrm{HI} + \mathrm{BI}$ или $p < h$;
а при $h < b$ и $\mathrm{BI} < \mathrm{DE}$, а слѣд. $p > \mathrm{HI} + \mathrm{BI}$ или $p > h$.

Итакъ, для того чтобы рѣшеніе перваго рода имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы полупериметръ прямоугольника заключался между основаніемъ и высотою даннаго треугольника.

Примѣчаніе II. Когда p мало отличается отъ h, получается прямоугольникъ весьма растянутый въ направленіи высоты BH; напротивъ того, если p близко къ b, прямоугольникъ получается сплюснутый; а измѣняя непрерывно p между этими предѣлами, получимъ всѣ промежуточныя формы; слѣд. можетъ получиться, между прочимъ, и *квадратъ*; и для этого необходимо, чтобы было

$$x = y, \text{ или } b(h - p) = h(p - b), \text{ откуда}$$

$$p = \frac{2bh}{b + h}.$$

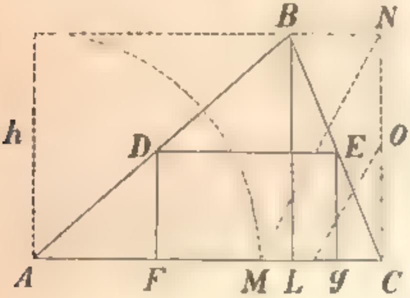
Въ такомъ случаѣ, имѣя въ виду уравненіе $x+y=p$, получимъ

$$x=y=\frac{bh}{b+h}.$$

Построеніе. Легко построить найденныя величины для x и y; построимъ, напр., y въ случаѣ: $h<p<b$. Изъ формумы $y=\frac{h(b-p)}{b-h}$ имѣемъ пропорцію: $(b-h):(b-p)=h:y$; такимъ образомъ, слѣдуетъ построить четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ: $b-h$, $b-p$ и h. Нанеся на AC отрѣзки AM$=h$, AL$=p$, имѣемъ

$$b-h=\text{CM},\ b-p=\text{CL}.$$

Изъ точки C возставляемъ перпендикуляръ CN къ AC, равный h, соединяемъ M съ N и проводимъ LO параллельно MN; легко видѣть, что OC$=y$. Проведя изъ O линію OD параллельно AC, получимъ верхнее основаніе DE прямоугольника, а опустивъ перпендикуляры DF и EG, и самый прямоугольникъ.



Черт. 37.

Внѣ-вписанный прямоугольникъ.

383. I. Когда вершины D и E прямоугольника находятся подъ основаніемъ треугольника, имѣемъ прямоугольникъ D'E'F'G'. Пусть требуется построить такой прямоугольникъ по данному периметру $2p$. Называя сторону D'E' буквою x и E'F' буквою y, имѣемъ уравненія:

$$x+y=p,\ \frac{x}{b}=\frac{h+y}{h}\ .\ .\ .\ (4)$$

откуда

$$x=b\,.\,\frac{p+h}{b+h},\ y=h\,.\,\frac{p-b}{b+h}.$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ знаменатель въ этихъ формулахъ не можетъ быть нулемъ, то x и y не могутъ быть ни безконечными, ни неопредѣленными, кромѣ того, x всегда положителенъ, а y можетъ быть или положительнымъ, или отрицательнымъ, или нулемъ, что зависитъ отъ знака разности $p-b$. Итакъ:

1. $p>b$. Въ этомъ случаѣ: $x>0$ и $y>0$; и кромѣ того, такъ какъ дробь $\frac{p+h}{b+h}>1$, то $x>b$. Итакъ, въ данномъ случаѣ существуетъ внѣ-вписанный прямоугольникъ съ даннымъ периметромъ $2p$, имѣющій такое положеніе какъ D'E'F'G'.

2. $p=b$. Въ этомъ случаѣ: $x=b$, $y=0$, и разсматриваемый прямоугольникъ сливается съ основаніемъ треугольника.

3. $p<b$. Въ этомъ случаѣ $x>0$, но $<b$; $y<0$.

Вставляя въ уравненія (4) $-y$ вмѣсто y, получаемъ

$$x-y=p,\ \frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}.$$

Легко видѣть, что эти уравненія соотвѣтствуютъ вписанному прямоугольнику DEFG, въ которомъ разность между основаніемъ и высотой равна p

Примѣчаніе. Чтобы въ разсматриваемомъ случаѣ прямоугольникъ былъ квадратомъ, надо, чтобы было $x=y$, или $b(p+h)=h(p-b)$, откуда

$$p=\frac{2bh}{h-b},\ \text{и слѣд.}\ x=y=\frac{bh}{h-b}.$$

Такъ какъ p — величина положительная, то h не можетъ быть $< b$; такимъ образомъ нельзя получить внѣ-вписаннаго квадрата подъ основанiемъ треугольника, если $b > h$.

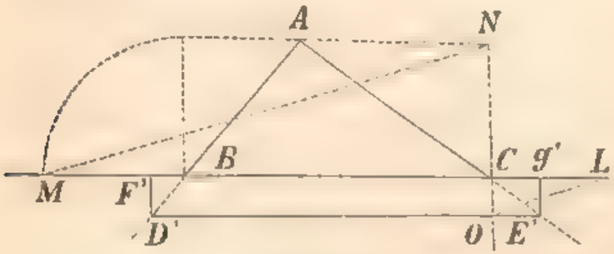
Построенiе. Сдѣлаемъ построенiе для случая $p > b$. Изъ пропорцiи

$$(b+h):(p-b)=h:y$$

видно, что построенiе y сводится къ нахожденiю четвертой пропорцiональной къ тремъ даннымъ линiямъ $b+h$, $p-b$ и h; для чего беремъ BM $= h$, BL $= p$, и слѣдов.

$$CM=b+h \text{ и } CL=p-b.$$

Соединяемъ M съ N и изъ L проводимъ линiю LO, параллельную MN: точка



Черт. 38.

O опредѣляетъ сторону D'E' искомаго прямоугольника, а вмѣстѣ съ тѣмъ и самый прямоугольникъ.

384. II. Когда вершины внѣ-вписаннаго прямоугольника находятся на продолженiяхъ сторонъ BA и BC за вершину B, имѣемъ прямоугольникъ D''E''F''G'', для опредѣленiя котораго послужатъ уравненiя

$$x+y=p,\ \frac{x}{b}=\frac{y-h}{h}, \ldots (5)$$

въ которыхъ x означаетъ основанiе, а y — высоту новаго прямоугольника. Изъ нихъ имѣемъ:

$$x=b\cdot\frac{p-h}{b+h},\ y=h\cdot\frac{b+p}{b+h}.$$

Изслѣдованiе. 1. $p > h$; въ этомъ случаѣ: $x > 0$, $y > 0$ и $> h$. Это рѣшенiе даетъ прямоугольникъ съ периметромъ $2p$, имѣющiй такое положенiе какъ D''E''F''G''.

2. $p = h$; въ этомъ случаѣ: $x = 0$, $y = h$, и разсматриваемый прямоугольникъ сливается съ высотою треугольника.

3. $p < h$; въ этомъ случаѣ: $x < 0$, $y > 0$, но $< h$. Подставивъ въ ур—нiя (5) $-x$ вмѣсто x, получимъ

$$y-x=p,\ \frac{x}{b}=\frac{h-y}{h};$$

легко видѣть, что эти уравненiя соотвѣтствуютъ вписанному прямоугольнику DEFG, въ которомъ разность между высотою и основанiемъ равна данной линiи p.

Примѣчанiе. Чтобы прямоугольникъ былъ квадратомъ, надо, чтобы было $x = y$, т.-е. $b(p-h) = h(b+p)$, откуда

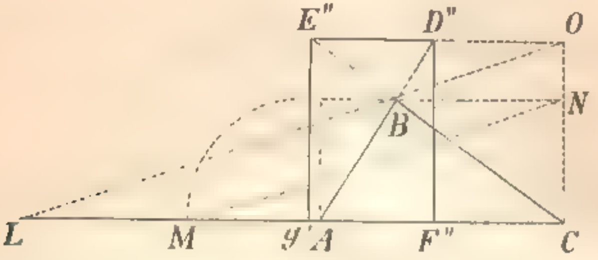
$$p=\frac{2bh}{b-h},\ \text{слѣд. } x=y=\frac{bh}{b-h};$$

нельзя, слѣд., получить внѣ-вписаннаго квадрата въ разсматриваемъ случаѣ, если будетъ $b<h$.

Построеніе. Для построенія y беремъ на продолженіи основанія AC линіи $AM=h$, $AL=p$; тогда

$$CM \quad b \quad h,\ CL \quad b \quad p.$$

Соединивъ M съ N, проводимъ OL параллельно MN; затѣмъ изъ точки O — параллель къ линіи AC, которая и дастъ вершины D'' и E'' искомаго прямоугольника.



Черт. 39

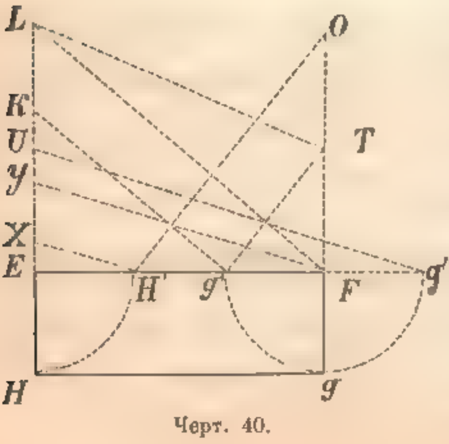
385. *Заключеніе* Обозрѣвая изслѣдованіе, не трудно усмотрѣть, что никогда всѣ три рода прямоугольниковъ, имѣющихъ данный периметръ $2p$, не появляются совмѣстно на одномъ и томъ же чертежѣ, т. е. въ одномъ и томъ же треугольникѣ, но являются попарно; а именно:

1) Если p меньше меньшаго изъ количествъ b и h, задача не имѣетъ рѣшенія.

2) Если p заключается между b и h, то внутренній прямоугольникъ является совмѣстно съ однимъ изъ внѣшнихъ, а именно: съ I при $b \; h$, и со II при $b \; h$.

3) Если p больше большаго изъ количествъ b и h, то внутренніе прямоугольникъ невозможенъ, но являются совмѣстно два внѣшнихъ.

Четвертый примѣръ изслѣдованія.



Черт. 40.

386. *Даны два прямоугольника:* ABCD *и* EFGH, *имѣющіе измѣренія: первый b и h, при чемъ $b>h$, второй m и n, причемъ $m>n$. Вписать въ первый изъ нихъ прямоугольникъ* PQRS *подобный второму.*

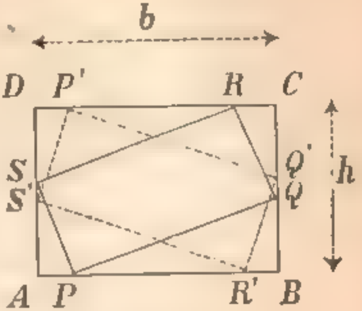
Вершины P, Q, R и S искомаго прямоугольника могутъ лежать или на самыхъ сторонахъ прямоугольника ABCD, или на ихъ продолженіяхъ: въ первомъ случаѣ получается *внутренне-вписанный* прямоугольникъ, во второмъ *внѣ-вписанный*.

387. I. Для построенія прямоугольника PQRS достаточно знать разстоянія: AP - x, AS y точекъ P и S отъ вершины A. Такъ какъ уголъ SPQ прямой, то углы APS и BPQ дополнительны и тр—ки ASP и BPQ подобны, а потому сходственныя ихъ стороны пропорціональны:

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BQ}}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PQ}},$$

т.-е.

$$\frac{x}{h-y}=\frac{y}{b-x}=\frac{n}{m}.$$



Черт. 41.

Приравнивая каждое изъ двухъ первыхъ отношеній третьему, находимъ два уравненія съ двумя неизвѣстными:

$$mx+ny=nh\ .\ .\ .\ (1)$$

$$nx+my=nb\ .\ .\ .\ (2)$$

откуда

$$x=\frac{n(mh-nb)}{m^2-n^2},\quad y=\frac{n(mb-nh)}{m^2-n^2};$$

слѣдовательно

$$\mathrm{BP}=b-x=\frac{m(mb-nh)}{m^2-n^2},\quad \mathrm{BQ}=h-y=\frac{m(mh-nb)}{m^2-n^2};$$

или, положивъ $\frac{m}{n}=k$:

$$x=\frac{kh-b}{k^2-1},\quad b-x=\frac{k(kb-h)}{k^2-1},\quad y=\frac{kb-h}{k^2-1},\quad h-y=\frac{k(kh-b)}{k^2-1}.$$

Изслѣдованіе. Если данные прямоугольники не квадраты, то достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ предположенія $b>h$ и $m>n$, такъ что изслѣдованію подлежатъ случаи:

$$k>1\begin{cases}k>\frac{b}{h}\\ k=\frac{b}{h}\\ k<\frac{b}{h}\end{cases}$$

$$k=1\begin{cases}k<\frac{b}{h},\ \text{при}\ b>h\\ k=\frac{b}{h},\ \text{при}\ b=h.\end{cases}$$

Первый случай. $k=\frac{m}{n}>\frac{b}{h}$. Изъ этого неравенства находимъ, что $kh>b$. Затѣмъ, замѣчаемъ, что k, будучи больше $\frac{b}{h}$, больше и дроби $\frac{h}{b}$ $\left(\text{которая} < \frac{b}{h}\right)$, а слѣдовательно и $kb>h$. Заключаемъ, что $x>0$, $y>0$, $b-x>0$, $h-y>0$; изъ послѣднихъ двухъ неравенствъ слѣдуетъ, что $x<b$ и $y<h$. Такимъ образомъ, вершины искомаго прямоугольника находятся на самыхъ сторонахъ прямоугольника ABCD, т. е. PQRS представляетъ дѣйствительно внутренній вписанный прямоугольникъ.

Условіе $\frac{m}{n}>\frac{b}{h}$ показываетъ, что всѣ вписанные прямоугольники имѣютъ форму болѣе удлиненную, нежели прямоугольникъ ABCD.

Второй случай. $k=\frac{m}{n}=\frac{b}{h}$. Это условіе даетъ: $kh=b$, слѣд.

$$x=0,\ y=h;$$

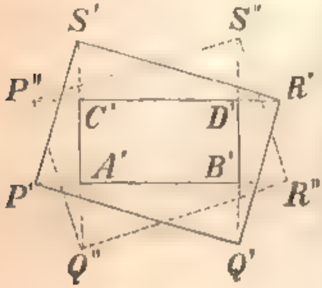
это значитъ, что вершины P и R совпадаютъ—первая съ A, вторая съ C; а вершины S и Q — первая съ D, вторая съ B, а потому прямоугольникъ PQRS съ ABCD.

Третій случай. $k = \frac{m}{n} < \frac{b}{h}$. Изъ этого слѣдуетъ, что $kh < b$, а потому $x < 0$ и $h - y < 0$ или $y > h$; такимъ образомъ: x отрицателенъ, а y положителенъ и больше h. Эти результаты означаютъ, что вершина P должна находиться влѣво отъ точки A на продолженіи стороны BA, а вершина R — вправо отъ точки D на продолженіи стороны DC, вершина S—вверхъ отъ C на продолженія AC, а вершина Q—внизъ отъ B на продолженіи DB; т.-е. получается прямоугольникъ P'Q'R'S', обнимающій ABCD.

Если составить уравненія для этой новой задачи, положивъ $A'P' = x$ и $A'S' = y$, найдемъ:

$$\frac{x}{y-h} = \frac{y}{x+b} = \frac{n}{m};$$

и эти уравненія мы получаемъ прямо изъ уравненій предшествующихъ перемѣною x на $-x$. Итакъ, первоначальныя уравненія всегда даютъ отвѣтъ на предложенную задачу: этимъ отвѣтомъ служитъ внутреннe-вписанный прямоугольникъ PQRS, если EFGH болѣе удлиненъ чѣмъ ABCD, и внѣ-вписанный прямоугольникъ P'Q'R'S' (черт. 42), если EFGH менѣе удлиненъ нежели ABCD.



Черт. 42.

Слѣдуетъ замѣтить, что взявъ $DP' = AP$ и $DS' = AS$ (черт. 41), получимъ второй прямоугольникъ P'Q'R'S', удовлетворяющій условіямъ вопроса, но какъ онъ равенъ PQRS, то мы и не будемъ считать его новымъ рѣшеніемъ. То же замѣчаніе относится къ внѣ-вписанному прямоугольнику P''Q''R''S'', равному P'Q'R'S' (черт. 42).

Четвертый случай. $k = 1$ и $b > h$. Находимъ:

$$x = -\infty, \ y = \infty.$$

Условіе $k = 1$ означаетъ, что прямоугольникъ EFGH есть квадратъ; а полученное рѣшеніе, въ которомъ $x = 0$, означаетъ, что для даннаго прямоугольника никогда не можетъ быть полученъ внѣ-вписанный квадратъ, но что внѣ-вписанный прямоугольникъ, какъ P'Q'R'S', тѣмъ болѣе приближается къ формѣ квадрата, чѣмъ больше становятся его размѣры.

Пятый случай. Если $k = 1$ и $b = h$, т. е. данные прямоугольники ABCD и EFGH—квадраты, формулы даютъ:

$$x = \frac{0}{0}, \ y = \frac{0}{0};$$

эти рѣшенія означаютъ дѣйствительную неопредѣленность, потому что въ квадратъ можно вписать безчисленное множество квадратовъ; въ самомъ дѣлѣ, легко доказать, что если нанести на каждой сторонѣ квадрата, начиная отъ каждой вершины, одну и ту же произвольную длину, получимъ вершины новаго квадрата.

Примѣчаніе. Здѣсь умѣстно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Когда, какъ въ данномъ случаѣ, неопредѣленность получается отъ нѣсколькихъ предположеній относительно частныхъ значеній буквъ, нужно всѣ эти предположенія вводить заразъ: иначе могла бы ускользнуть изъ виду дѣйствительная неопредѣленность. Такъ, положивъ въ формулахъ x и y заразъ $k = 1$ и $b = h$, тотчасъ обнаружимъ неопредѣленность; и если бы мы захотѣли найти истинное значеніе x и y, положивъ

$$b = h + \alpha \text{ и } k = 1 + \beta,$$

то, упростивъ формулы и положивъ затѣмъ $a = 0$, нашли бы

$$x = \frac{h-p}{2},\; y = \frac{h+p}{2},$$

выраженія, вслѣдствіе присутствія въ нихъ произвольнаго количества p, дѣйствительно неопредѣленныя.

Но если бы оба предположенія мы ввели *не совмѣстно*, а положивъ *сперва* $b = h$, что позволяетъ удалить общаго множителя $k - 1$, *а затѣмъ* $k = 1$ въ упрощенныхъ уже формулахъ

$$x = \frac{bk}{k+1},\; y = \frac{bk}{k+1},$$

нашли бы опредѣленныя величины

$$x = \frac{b}{2},\; y = \frac{b}{2};$$

слѣдовательно, мы удалили бы неопредѣленность, на дѣлѣ существующую.

Примѣчаніе это весьма важно, и его всегда слѣдуетъ имѣть въ виду при изслѣдованіи вопросовъ, когда приходится дѣлать не одно частное предположеніе.

Если будемъ k неограниченно увеличивать, приближая его къ ∞, x и y будутъ стремиться къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при $k = \infty$ имѣемъ $x = \frac{\infty}{\infty}$, $y = \frac{\infty}{\infty}$; для раскрытія этихъ неопредѣленностей раздѣлимъ числителя и знаменателя формулъ x и y на k^2, что дастъ

$$x = \frac{\frac{h}{k} - \frac{b}{k^2}}{1 - \frac{1}{k^2}},\; y = \frac{\frac{b}{k} - \frac{h}{k^2}}{1 - \frac{1}{k^2}},$$

а положивъ $k = \infty$, находимъ $x = 0$ и $y = 0$: прямоугольникъ PQRS обращается въ діагональ AC, что совершенно понятно.

Построеніе. Величины x и $h - y$ можно представить въ видѣ

$$x = \frac{n}{m+n}\left(\frac{m}{m-n}h - \frac{n}{m-n}b\right),$$

$$h - y = \frac{m}{m+n}\left(\frac{m}{m-n}h - \frac{n}{m-n}b\right),$$

и построить при помощи четвертыхъ пропорціональныхъ. Во-первыхъ, чтобы получить линію

$$\frac{mh}{m-n} = z,$$

достаточно взять (черт. 40) на продолженіи HE линію EK $= h$, затѣмъ на линіи EF нанести FG $=$ FG $= n$; соединивъ точки G′ и K и проведя черезъ точку F линію FL параллельно G′K, найдемъ

$$\frac{\mathrm{FG'}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{EL}},\ \text{т.-е.}\ \frac{m-n}{m} = \frac{h}{\mathrm{EL}},\ \text{откуда}\ \mathrm{EL} = \frac{mh}{m-n} = z.$$

Такимъ же образомъ, чтобы построить отрѣзокъ

$$\frac{nb}{m-n} = u,$$

беремъ $FO = b$, $EH' = EH = n$; соединивъ точки H′ и O, проводимъ изъ точки G′ параллель G′T, и получаемъ

$$\frac{H'F}{G'F} = \frac{FO}{FT}, \text{ т.-е. } \frac{m-n}{n} = \frac{b}{FT}, \text{ откуда } FT = \frac{nb}{m-n} = u.$$

Нанеся FT отъ L до V, получимъ

$$EV = EL - LV = z - u,$$

и выраженія x и $h - y$ примутъ видъ

$$x = \frac{n}{m+n} \cdot EV, \; h - y = \frac{m}{m+n} \cdot EV.$$

Итакъ, для опредѣленія x нужно взять $FG'' = FG = n$, провести прямую G″V и черезъ точку H′ ей параллельную H′X, для полученія $h - y$ проводимъ черезъ точку F линію FY параллельно VG″; найдемъ $EX = x$ и $EY = h - y$.

Нанеся на стороны прямоугольника ABCD

$$AP = EX, \; DS = YE,$$

получимъ и прямоугольникъ PQRS.

Фигура P′Q′R′S′ (черт. 42). строится такимъ же образомъ, ибо въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{n}{m+n}(u - z), \; y - h = \frac{m}{m+n}(u - z).$$

388. II. Вершины P и S могутъ находиться въ P″ и S″ на продолженіяхъ сторонъ BA и CA; внѣ-вписанный прямоугольникъ приметъ положеніе P″Q″R″S″ (черт. 43). Положивъ

$$AP'' = x, \; AS'' = y,$$

изъ подобія треугольниковъ P″AS″ и P″BQ″ найдемъ:

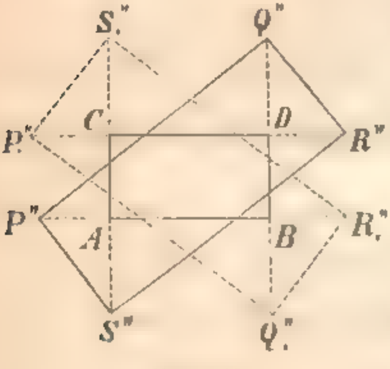
$$\frac{x}{h+y} = \frac{y}{b+x} = \frac{n}{m};$$

откуда

$$mx - ny = hn$$
$$my - nx = bn;$$

рѣшивъ ихъ, находимъ:

$$x = \frac{n(mh + nb)}{m^2 - n^2}, \; y = \frac{n(mb + nh)}{m^2 - n^2},$$



Черт. 43.

или

$$x = \frac{kh + b}{k^2 - 1}, \; y = \frac{kb + h}{k^2 - 1}.$$

Изслѣдованіе. Задача всегда возможна, какова бы ни была величина k въ предѣлахъ отъ ∞ до 1; то же самое замѣчаніе, что и прежде, прилагается и къ случаю $k = 1$.

Что касается выраженія x и $h + y$, ихъ строимъ такимъ же образомъ какъ и въ первомъ случаѣ, приведя къ виду

$$x = \frac{n}{m+n}(z + u), \; h + y = \frac{m}{m+n}(z + u),$$

гдѣ z и u имѣютъ вышеуказанныя значенія, сверхъ того, построенія, уже исполненныя при нахожденіи x и $h - y$ или x и $y - h$, позволяютъ быстрѣе построить x и $h + y$, опредѣляющія новое рѣшеніе P'Q'R'S'.

Заключеніе. Итакъ, задача, взятая въ самомъ общемъ смыслѣ, всегда имѣетъ два рѣшенія: 1) прямоугольникъ *внѣ-вписанный*, какъ P'Q'R'S' (черт. 43); 2) прямоугольникъ такой какъ PQRS (черт. 41), или какъ P'Q'R'S' (черт. 42) смотря по тому, будетъ ли $\frac{m}{n}$ больше, или меньше $\frac{b}{h}$.

ГЛАВА XXVII.

Неопредѣленный анализъ первой степени.

Рѣшеніе одного уравненія съ 2-мя неизвѣстными, въ цѣлыхъ числахъ.—Рѣшеніе системы уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій.— Рѣшеніе одного ур—нія съ 3-мя неизвѣстными.

1. Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ одного уравненія съ 2-мя неизвѣстными.

389. Когда число неизвѣстныхъ больше числа уравненій, послѣднія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній и называются поэтому *неопредѣленными*. Простѣйшій случай представляетъ одно ур. съ двумя неизвѣстными, напримѣръ, $x - 3y = 5$. Опредѣляя изъ него x, находимъ

$$x = 3y + 5.$$

Это ур. показываетъ, что x зависитъ отъ y, самый же y остается совершенно произвольнымъ; поэтому мы можемъ давать ему какія угодно значенія. Такъ, полагая

$y = -2$, **находимъ:** $x = -1$,

$y = 0$, » $x = 5$,

$y = 4$, » $x = 17$ и т. д.

Иногда вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ, чтобы неизвѣстныя были числа *цѣлыя;* а нерѣдко къ этому присоединяется еще требованіе, чтобы они были и *положительныя* (напр., если x и y означаютъ числа лицъ въ извѣстномъ обществѣ, или цифры искомаго числа и т. п.); такимъ образомъ является задача: изъ безчисленнаго множества рѣшеній цѣлыхъ и дробныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ, выдѣлить только *цѣлыя* и *положительныя:* такое ограниченіе значительно уменьшаетъ число рѣшеній.

Всякое неопредѣленное ур. съ двумя неизвѣстными, по освобожденіи отъ дробей, по перенесеніи неизвѣстныхъ въ одну часть, а извѣстныхъ въ другую и по приведеніи можетъ быть представлено въ видѣ:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a, b и c—числа цѣлыя. Прежде всего мы должны рѣшить вопросъ о томъ, всегда ли подобное ур. можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ? Отвѣтомъ на это служатъ слѣдующія двѣ теоремы.

390. Теорема I. *Если въ уравненіи* $ax+by=c$ *коэффиціенты* a *и* b *при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго множителя, не содержащагося въ извѣстномъ членѣ* c, *то уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.*

Пусть a и b имѣютъ общаго дѣлителя m, который *не дѣлитъ* числа c: въ такомъ случаѣ, по раздѣленіи a и b на m, получимъ нѣкоторыя цѣлыя числа a' и b'.

$$a:m=a',\quad b:m=b';\ \text{откуда}\quad a=ma'\quad \text{и}\quad b=mb'.$$

Подстановка въ уравненіе дастъ

$$a'mx+b'my=c,$$

откуда

$$a'x+b'y=\frac{c}{m},$$

гдѣ $\frac{c}{m}$, по условію, дробь. Допустивъ, что x и y могутъ быть цѣлыми числами, мы получили бы въ первой части послѣдняго уравненія цѣлое число, тогда какъ вторая часть его - дробь: равенство было бы невозможно. Итакъ, ур. не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ.

Примѣромъ можетъ служить ур. $15x+21y=29$, въ которомъ коэффиціенты 15 и 21 имѣютъ общаго множителя 3, на который 29 не дѣлится.

Если всѣ три коэффиціента a, b и c имѣютъ общаго множителя, то по сокращеніи на него уравненія можетъ оказаться: или, что коэффиценты a и b имѣютъ общаго множителя, или что a и b — числа первыя между собою. Въ первомъ случаѣ, по предыдущей теоремѣ, ур. не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Что же касается второго случая, то можно доказать, что ур. необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія.

391. Теорема II. *Когда коэффиціенты* a *и* b *суть числа первыя между собою, то ур.* $ax+by=c$ *имѣетъ цѣлыя рѣшенія.*

Рѣшивъ ур. относительно x, напр., получимъ

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Докажемъ прежде всего, что если въ эту формулу вмѣсто y будемъ подставлять всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа меньшія a, т.-е. 0, 1, 2, 3, ... $a-1$, и каждый разъ совершать дѣленіе, то всѣ a остатковъ будутъ *различны.* Въ самомъ дѣлѣ, подставимъ вмѣсто y какія-нибудь два числа y' и y'' меньшія a (изъ ряда 0, 1, 2, . . . $a-1$); получимъ два выраженія

$$\frac{c-by'}{a}\quad \text{и}\quad \frac{c-by''}{a}.$$

Выполнивъ каждое дѣленіе и означивъ частныя буквами q' и q'', а остатки r' и r'', найдемъ:

$$\frac{c-by'}{a}=q'+\frac{r'}{a},\qquad \frac{c-by''}{a}=q''+\frac{r''}{a}.$$

Допустивъ, что остатки r' и r'' могутъ быть равны, найдемъ по вычитаніи второго равенства изъ перваго:

$$\frac{c - by'}{a} - \frac{c - by''}{a} = q' - q''$$

или

$$\frac{b(y'' - y')}{a} = q' - q''.$$

Такъ какъ $q' - q''$, какъ разность цѣлыхъ чиселъ, есть число цѣлое, то и первая часть должна быть цѣлымъ числомъ, а потому $b(y'' - y')$ должно нацѣло дѣлиться на a. Но b и a—числа первыя между собою, слѣдов. $y'' - y'$ должно дѣлиться на a, т.-е. разность двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое *меньше* a, должна бы дѣлиться на a, что невозможно. Невозможно, поэтому, и допущеніе, что могутъ быть равные остатки.

Итакъ, мы доказали, что если вмѣсто y подставлять всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа отъ 0 до $a - 1$ включительно, и каждый разъ совершать дѣленіе $c - by$ на a, то мы получимъ a остатковъ, которые *всѣ различны* и *каждый меньше* a (какъ дѣлителя). Но всѣ цѣлыя числа меньшія a, различныя между собою, число которыхъ a, суть, очевидно, числа

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ a - 1.$$

Слѣд. въ числѣ остатковъ будетъ *непремѣнно одинъ* и *только одинъ*, равный нулю. Значеніе y, подстановка котораго въ выраженіе $\frac{c - by}{a}$, даетъ остатокъ 0, обращаетъ $x = \frac{c - by}{a}$ въ цѣлое число: цѣлому y соотвѣтствуетъ цѣлый x. Итакъ, когда a и b первыя между собою, уравненіе дѣйствительно допускаетъ цѣлыя рѣшенія, что и требовалось доказать.

392. Первый способъ рѣшенія ур—нія $ax + by = c$ въ цѣлыхъ числахъ. Вышеприведенное доказательство даетъ также средство находить одну пару цѣлыхъ рѣшеній. Пусть, напр., дано уравненіе

$$7x + 5y = 232.$$

Такъ какъ коэффиціенты при x и y суть числа первыя между собою, то ур—ніе допускаетъ цѣлыя рѣшенія. Для опредѣленія одной пары ихъ рѣшаемъ ур. относительно, напр., y; находимъ

$$y = \frac{232 - 7x}{5}.$$

Подставляемъ сюда вмѣсто x послѣдовательно цѣлыя числа, меньшія 5, т.-е 0, 1, 2, 3, 4; находимъ:

$$\text{при } x = 0,\ y = \frac{232}{5} = 46 + \frac{2}{5};$$

$$\text{» } x = 1,\ y = \frac{232 - 7}{5} = 45$$

Итакъ, подстановка 1 вмѣсто x дастъ для y цѣлое число 45; сл. $x = 1$ и $y = 45$ представляютъ одну пару цѣлыхъ рѣшеній, что не трудно провѣрить.

Замѣтимъ, что въ видахъ ограниченія числа возможныхъ подстановокъ слѣдуетъ всегда рѣшать уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ.

Какъ скоро найдена одна пара цѣлыхъ рѣшеній, то легко найти сколько угодно такихъ рѣшеній при помощи формулъ, къ выводу которыхъ теперь и переходимъ.

393. Теорема III. *Если какимъ-нибудь способомъ найдена одна пара цѣлыхъ рѣшеній:* $x = \alpha$, $y = \beta$ *уравненія* $ax + by = c$, *то всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ*

$$x = \alpha + bt, \qquad y = \beta - at,$$

гдѣ t—произвольное цѣлое число.

Такъ какъ $x = \alpha$ и $y = \beta$, по условію, суть рѣшенія даннаго уравненія, то подстановка ихъ въ это уравненіе дастъ тождество

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Вычтя это тождество изъ даннаго уравненія, имѣемъ:

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

откуда

$$x - \alpha = \frac{b(\beta - y)}{a},$$

а слѣдовательно

$$x = \alpha + \frac{b(\beta - y)}{a}.$$

Выраженіе x состоитъ изъ: цѣлаго числа α и дробнаго выраженія $\frac{b(\beta - y)}{a}$. Поэтому x *только тогда* можетъ быть цѣлымъ числомъ, когда $b(\beta - y)$ дѣлится на a; но b и a—числа первыя между собою, слѣд. чтобы $b(\beta - y)$ дѣлилось на-цѣло на a, необходимо, чтобы $\beta - y$ дѣлилось на a; поэтому для y можно брать только такія цѣлыя числа, при которыхъ $\frac{\beta - y}{a}$ обращается въ произвольное цѣлое число t, т.-е. условіе того, чтобы x было цѣлымъ, есть

$$\frac{\beta - y}{a} = t,$$

или

$$\beta - y = at,$$

или

$$y = \beta - at;$$

а въ такомъ случаѣ

$$x = \alpha + bt.$$

Выраженія: $x = \alpha + bt$ и $y = \beta - at$ даютъ сколько угодно цѣлыхъ рѣшеній; стоитъ только вмѣсто t подставлять какія угодно цѣлыя числа.

Такъ какъ t подчинено только одному условію, что оно должно быть цѣлымъ, то въ формулы x и y можно вмѣсто t подставить $-t$, и тогда онѣ примутъ видъ:

$$x = \alpha - bt, \qquad y = \beta + at.$$

Возьмемъ ли групу формулъ:

$$x = \alpha + bt, \qquad y = \beta - at,$$

или

$$x = \alpha - bt, \qquad y = \beta + at,$$

замѣчаемъ, что вторые члены ихъ суть произведенія неопредѣленнаго цѣлаго t: на коэффиціентъ при y въ формулѣ x, и на коэффиціентъ при x въ формулѣ y, при чемъ одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ берется съ тѣмъ знакомъ, какой онъ имѣетъ въ уравненіи, а другой со знакомъ противоположнымъ тому, какой онъ имѣетъ въ уравненіи. Зная это правило, можно тотчасъ опредѣлить всѣ цѣлыя рѣшенія уравненія, какъ скоро найдена одна пара такихъ рѣшеній.

Примѣръ I. Выше мы нашли, что одна пара цѣлыхъ рѣшеній уравненія $7x + 5y = 232$ есть: $x = 1$, $y = 45$; слѣд. всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x = 1 + 5t, \qquad y = 45 - 7t;$$

или въ формулахъ:

$$x = 1 - 5t, \qquad x = 45 + 7t.$$

Взявъ, напр., вторую групу формулъ, и давая въ ней t какія угодно цѣлыя значенія, положительныя и отрицательныя, найдемъ сколько угодно паръ цѣлыхъ рѣшеній; такъ

при $t = 0$ имѣемъ: $x = 1$, $y = 45$;
» $t = 1$ » $x = -4$, $y = 52$;
» $t = 2$ » $x = -9$, $y = 59$, и т. д.
» $t = -1$ » $x = 6$, $y = 38$,
» $t = -2$ » $x = 11$, $y = 31$, и т. д.

Примѣръ II. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$8x - 13y = 159.$$

Опредѣляя x, имѣемъ:

$$x = \frac{13y + 159}{8};$$

при $y = 0$, имѣемъ: $x = 19\frac{7}{8}$; при $y = 1$, $x = 21\frac{1}{2}$; при $y = 2$, $x = 23\frac{1}{8}$; при $y = 3$, $x = 24\frac{3}{4}$; при $y = 4$, $x = 26\frac{3}{8}$; при $y = 5$, $x = 28$.

Общія формулы цѣлыхъ рѣшеній суть:

$$x=28+13t, \qquad y=5+8t;$$

или же

$$x=28-13t, \qquad y=5-8t.$$

Примѣчаніе. Изъ самаго доказательства теоремы III слѣдуетъ, что въ формулахъ: $x=\alpha+bt$, $y=\beta-at$ содержатся *всѣ* цѣлыя рѣшенія уравненія $ax+by=c$; непосредственною же повѣркою можно доказать, что эти выраженія дѣйствительно удовлетворяютъ данному уравненію. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка даетъ:

$$a(\alpha+bt)+b(\beta-at)=c, \text{ или } a\alpha+b\beta=c;$$

а это есть тождество, потому что, по положенію, α и β удовлетворяютъ данному уравненію.

Указанный способъ рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ очень простъ, и его слѣдуетъ употреблять всякій разъ, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ, или, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ нихъ — числа небольшія. Въ противномъ случаѣ, могло бы потребоваться большое число подстановокъ для нахожденія одной пары цѣлыхъ рѣшеній, и способъ этотъ отнималъ бы много времени. Поэтому для рѣшенія ур—ній съ большими коэффиціентами предпочтительнѣе употреблять

394. Второй способъ рѣшенія уравненія $ax+by=c$ въ цѣлыхъ числахъ.

Сперва разсмотримъ два частныхъ случая:

1. Пусть одинъ изъ коэффиціентовъ заключается множителемъ въ извѣстномъ членѣ, напр., пусть $c=ma$; уравненіе будетъ

$$ax+by=ma,$$

откуда

$$x=\frac{ma-by}{a}=m-\frac{by}{a}.$$

Чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо (такъ какъ m—цѣлое число), чтобы by дѣлилось на a; но b и a—числа первыя между собою, слѣд. необходимо y должно быть кратнымъ a, т.-е. должно быть

$$y=at,$$

гдѣ t—какое угодно цѣлое число: тогда x выразится цѣлою формулою

$$x=m-bt.$$

Формулы: $x=m-bt$, $y=at$, гдѣ t—произвольное цѣлое число, и даютъ всѣ цѣлыя рѣшенія предложеннаго уравненія.

2. Если одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, напр. $a=1$, то ур.

$$x+by=c$$

даетъ $x=c-by$; давая y какія угодно цѣлыя значенія, будемъ и для x получать каждый разъ цѣлыя же величины. Рѣшеніе такого уравненія, слѣдоват., весьма просто.

На этомъ замѣчаніи и основанъ общій способъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы намъ удалось привести рѣшеніе уравненія $ax+by=c$ къ такому уравненію, въ которомъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, то задача была бы рѣшена. Но когда a и b числа первыя между собою,—такое приведеніе всегда возможно. Пусть, напр., дано ур—ніе

$$8x+13y=159\ .\ .\ .\ (1).$$

Коэффиціенты 8 и 13 числа первыя между собою, слѣд. уравненіе можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ. Опредѣливъ то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше, находимъ:

$$x=\frac{159-13y}{8};$$

исключая цѣлыя числа изъ $\frac{159}{8}$ и $\frac{13}{8}$ и соединяя дробные члены въ одну дробь, получимъ:

$$x=19-y+\frac{7-5y}{8}.$$

Выраженіе x состоитъ изъ двухъ частей: $19-y$, которая будетъ цѣлою при всякомъ цѣломъ y, и $\frac{7-5y}{8}$, имѣющей дробный видъ: для того чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо между всѣми значеніями y выбрать такія, при которыхъ $\frac{7-5y}{8}$ равнялась бы нѣкоторому цѣлому числу t. Итакъ, нахожденіе цѣлыхъ значеній для x приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ уравненія

$$\frac{7-5y}{8}=t,\ \text{или}\ \ 7-5y=8t\ .\ .\ .\ (2).$$

Въ такомъ случаѣ будетъ

$$x=19-y+t\ .\ .\ .\ (\alpha).$$

Замѣтимъ, что въ уравненіи (2), или все равно, $5y+8t=7$, меньшій коэффиціентъ есть остатокъ отъ раздѣленія большаго коэффиціента въ данномъ ур—ніи на меньшій; а большій коэффиціентъ равенъ меньшему коэффиціенту даннаго ур—нія; вслѣдствіе этого ур—ніе (2) проще даннаго. Кромѣ того, коэффиціенты его 5 и 8 числа первыя между собою: это необходимо вытекаетъ изъ того, что если дѣлимое (13) и дѣлитель (8) первые между собою, то остатокъ (5) будетъ первый съ дѣлителемъ; такимъ образомъ ур—ніе (2) имѣетъ необходимо цѣлыя рѣшенія. Опредѣляя изъ него неизвѣстное, имѣющее меньшій коэффиціентъ, получимъ:

$$y=\frac{7-8t}{5}=1-t+\frac{2-3t}{5}.$$

Чтобы всякому t соотвѣтствовалъ цѣлый y, необходимо, чтобы выраженіе $\frac{2-3t}{5}$ было числомъ цѣлымъ: обозначивъ это цѣлое число буквою t', находимъ

$$y=1-t+t',\ .\ .\ .\ (\alpha')$$

причемъ

$$\frac{2-3t}{5}=t';$$

Такимъ образомъ нахожденіе цѣлыхъ значеній y приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ уравненія $\frac{2-3t}{5}=t'$, или

$$3t+5t'=2\ .\ .\ .\ (3).$$

Выводя изъ него неизвѣстное съ меньшимъ коэффиціентомъ, имѣемъ

$$t=\frac{2-5t'}{3}=-t'+\frac{2-2t'}{3}.$$

Разсуждая по предыдущему, убѣдимся, что нахожденіе цѣлыхъ значеній для t приводитъ къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ ур—нія

$$\frac{2-2t'}{3}=t'',\quad \text{или}\quad 2t'+3t''=2\ .\ .\ .\ (4),$$

причемъ

$$t=-t'+t''\ .\ .\ .\ (\alpha'').$$

Рѣшая ур. (4) относительно t', имѣемъ

$$t'=\frac{-3t''+2}{2}=-t''+1-\frac{t''}{2}.$$

Чтобы t' было цѣлымъ, необходимо, чтобы было цѣлымъ $\frac{t''}{2}$; положивъ

$$\frac{t''}{2}=t''',\quad \text{гдѣ}\quad t'''\text{—неопредѣленное цѣлое, имѣемъ}$$

$$t''=2t'''\ .\ .\ .\ (5)$$

причемъ

$$t'=1-t''-t'''\ .\ .\ .\ (\alpha''').$$

Итакъ, мы пришли къ ур—нію (5), въ которомъ коэффиціентъ при t'' есть 1; давая t''' какія угодно цѣлыя значенія, будемъ каждый разъ получать и для t'' цѣлыя значенія.

Такимъ образомъ мы нашли рядъ соотношеній

1) $x=19-y+t,$
2) $y=1-t+t',$
3) $t=-t'+t'',$
4) $t'=1-t''-t''',$
5) $t''=2t'''.$

Давая произвольное цѣлое значеніе количеству t''', мы изъ ур. (5) получимъ цѣлое же значеніе и для t''. Цѣлыя значенія t'' и t''', подставленныя въ ур. (4), дадутъ цѣлое значеніе для t'. Цѣлыя значенія t' и t'', подставленныя въ (3), дадутъ цѣлое значеніе для t. Эти цѣлыя значенія t и t', подставленныя въ (2), дадутъ цѣлое значеніе для y. Накопецъ цѣлыя значенія t и y, подставленныя въ (1), дадутъ соотвѣтствующее цѣлое значеніе x. Но во избѣжаніе неудобства, представляемаго такими послѣдовательными подстановками, выражаютъ x и y непосредственно чрезъ произвольное количество t'''. Подставляя въ (4) вмѣсто t'' его величину $2t'''$, найдемъ

$$t' = 1 - 2t''' - t''' = 1 - 3t''';$$

подставляя это выраженіе t' и вмѣсто t'' его величину въ (3), получимъ:

$$t = -1 + 3t''' + 2t''' = -1 + 5t''';$$

подстановка значеній t и t' во (2) дастъ:

$$y = 1 + 1 - 5t''' + 1 - 3t''' = 3 - 8t''';$$

накопецъ, подстановка найденныхъ выраженій для y и t въ (1) дастъ:

$$x = 19 - 3 + 8t''' - 1 + 5t''' = 15 + 13t'''.$$

Итакъ, общія формулы цѣлыхъ рѣшеній нашего ур. суть:

$$x = 15 + 13t''', \quad y = 3 - 8t'''.$$

Онѣ имѣютъ совершенно тотъ же составъ, какой указанъ въ § 393.

395 Укажемъ, что указанный въ предыдущемъ § пріемъ рѣшенія ур—нія всегда приводитъ къ полученію цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, мы получили рядъ уравненій:

$$\begin{aligned}
&1)\ 8x + 13y = 159,\\
&2)\ 5y + 8t = 7,\\
&3)\ 3t + 5t' = 2,\\
&4)\ 2t' + 3t'' = 2,\\
&5)\ t'' - 2t''' = 0,
\end{aligned}$$

при чемъ во (2) меньшій коэффиціентъ 5 есть остатокъ отъ раздѣленія большаго коэффиціента даннаго ур. 13 на меньшій 8. Въ ур—ніи (3) меньшій коэффиціентъ 3 есть остатокъ отъ дѣленія 8 на 5, т.-е. дѣлителя на первый остатокъ. Въ ур—ніи (4) меньшій коэффиціентъ 2 есть остатокъ отъ дѣленія 5 на 3, т.-е. перваго остатка на второй и т. д. Изъ этого видно, что процессъ рѣшенія приводитъ въ данномъ случаѣ къ такому же ряду дѣйствій, какой имѣлъ бы мѣсто при нахожденіи общаго наиб. дѣлителя между коэффиціентами даннаго уравненія. Но какъ эти коэффиціенты — числа первыя между собою, то въ указанномъ рядѣ дѣленій непремѣнно дойдемъ до остатка равнаго 1, который и явится коэффиціентомъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ въ одномъ изъ уравненій [въ нашемъ примѣрѣ — коэффиціентомъ при t'' въ ур. (5)]. Такимъ образомъ, цѣль будетъ достигнута.

Для полученія цѣлыхъ рѣшеній въ опредѣленныхъ числахъ стоитъ только произвольному цѣлому t'' давать какія угодно цѣлыя значенія —положительныя или отрицательныя: 0, 1, 2, 3, . . ., — 1, — 2, — 3, . . .

При $t''' =$	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3	-4
$x = 15 + 13t''$	15	28	41	54	67	80 . . .	2	-11	-24	-37
$y = 3 - 8t''$	3	-5	-13	-21	-29	-37	11	19	27	35

396. Упрощенія общаго способа. При рѣшеніи неопредѣленнаго уравненія слѣдуетъ пользоваться всѣми обстоятельствами, которыя ведутъ къ упрощенію вычисленій и слѣд. къ скорѣйшему достиженію цѣли. Укажемъ эти упрощенія.

1. Рѣшая уравненіе $19x + 15y = 23$, находимъ

$$y = \frac{23 - 19x}{15} = 1 - x + \frac{8 - 4x}{15}.$$

Приравнявъ t дробный членъ, получили бы уравненіе съ коэффиціентами 4 и 15; но можно получить ур. съ меньшими коэффиціентами, замѣтивъ, что $\frac{8 - 4x}{15} = \frac{4(2 - x)}{15}$ и слѣд.

$$y = 1 - x + \frac{4(2 - x)}{15};$$

очевидно, что y будетъ цѣлымъ при такомъ цѣломъ x, который обращаетъ $\frac{2 - x}{15}$ въ цѣлое число t; поэтому полагаемъ

$$\frac{2 - x}{15} = t,$$

откуда

$$2 - x = 15t, \quad \text{и} \quad x = 2 - 15t;$$

затѣмъ

$$y = 1 - x + 4t = 1 - 2 + 15t + 4t = -1 + 19t.$$

Указанный пріемъ быстро привелъ къ цѣлымъ формуламъ для x и y.

2. Упрощеніе рѣшенія всегда возможно въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ и извѣстный членъ имѣютъ общаго множителя. Пусть дано ур—віе

$$6x + 5y = 21;$$

раздѣливъ обѣ части на общаго множителя 3 чиселъ 6 и 21, получимъ:

$$2x + \frac{5y}{3} = 7.$$

Такъ какъ $2x$ и 7—числа цѣлыя, то $5y$ должно дѣлиться на 3; но 5 и 3 суть числа первыя между собою, слѣдовательно $\frac{y}{3}$ должно быть цѣлымъ. Обозначивъ это цѣлое буквою y', имѣемъ: $\frac{y}{3} = y'$, откуда $y = 3y'$, и данное ур. принимаетъ простѣйшій видъ

$$2x + 5y' = 7;$$

рѣшая его, послѣдовательно находимъ:

$$x = \frac{5y' + 7}{2} = 2y' + 3 + \frac{y' + 1}{2}; \quad \frac{y' + 1}{2} = t; \quad y' + 1 = 2t; \quad y' = -1 + 2t;$$

$$x = 2y' + 3 + t = -2 + 4t + 3 + t = 1 + 5t;$$

и наконецъ

$$y = 3y' = 3(-1 + 2t) = -3 + 6t.$$

3. Однимъ изъ полезнѣйшихъ упрощеній служитъ *введеніе отрицательныхъ остатковъ*. Такъ, рѣшая ур—ніе

$$7x + 26y = 111,$$

имѣемъ

$$x = \frac{111 - 26y}{7} = 15 + \frac{6}{7} - 3y - \frac{5y}{7}.$$

Здѣсь каждый изъ остатковъ: 6 и 5 отъ дѣленія 111 и 26 на 7 больше половины дѣлителя; но ихъ можно уменьшить, если каждое изъ частныхъ увеличить на 1. Взявъ при дѣленіи 111 на 7 въ частномъ 16, получимъ отрицательный остатокъ -1, численная величина котораго меньше 6; точно такимъ же образомъ, взявъ при дѣленіи 26 на 7 въ частномъ 4, найдемъ отрицательный остатокъ -2, численно меньшій прежняго остатка. Формула x приметъ видъ

$$x = 16 - \frac{1}{7} - 4y - \frac{2y}{7} = 16 - 4y - \frac{2y - 1}{7};$$

полагая $\frac{2y - 1}{7} = t$, имѣемъ:

$$x = 16 - 4y + t.$$

Затѣмъ: $2y = 1 + 7t$, $y = \frac{1 + 7t}{2} = 3t + \frac{1 + t}{2}$; полагая $\frac{1 + t}{2} = t'$,

имѣемъ

$$y = 3t + t', \quad t = -1 + 2t'.$$

Наконецъ

$$y = -3 + 7t', \quad x = 27 - 26t'.$$

397. Рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ. Иногда вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ не только цѣлыхъ, но вмѣстѣ съ этимъ и положительныхъ рѣшеній. Слѣдующая теорема позволяетъ, при одномъ взглядѣ на уравненіе, опредѣлить, имѣетъ ли уравненіе ограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или неограниченное, или совсѣмъ не имѣетъ такихъ рѣшеній.

398. Теорема. *Уравненіе $ax + by = c$ имѣетъ ограниченное число рѣшеній въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ, или совсѣмъ не имѣетъ такихъ рѣшеній, когда коэффиціенты a и b имѣютъ одинаковый знакъ; напротивъ, оно имѣетъ неограниченное число сказанныхъ рѣшеній, когда a и b имѣютъ противоположные знаки.*

Мы видѣли, что цѣлыя рѣшенія уравненія $ax+by=c$ выражаются формулами

$$x=\alpha+bt,\quad y=\beta-at,$$

гдѣ α и β представляютъ одну пару цѣлыхъ рѣшеній, а t произвольное цѣлое число, положительное или отрицательное.

Условившись коэффиціентъ a считать всегда положительнымъ (еслибъ было $a<0$, то умноживъ все уравненіе на -1, мы сдѣлали бы коэф. при x положительнымъ), и обозначая абсолютныя величины количествъ a, b и c буквами a', b' и c', убѣдимся, что въ отношеніи знаковъ ур. $ax+by=c$ можетъ представлять только слѣдующіе случаи:

$$a'x+b'y=+c' \;.\;.\;.\;(1).$$

$$a'x+b'y=-c' \;.\;.\;.\;(2).$$

$$a'x-b\,y=\pm c' \;.\;.\;.\;(3).$$

I. Цѣлыя рѣшенія ур—нія (1) изображаются формулами:

$$x=\alpha+b't,\quad y=\beta-a't;$$

чтобы x и y были положительны, цѣлое t должно удовлетворять неравенствамъ:

$$\alpha+b't>0,\quad \beta-a\,t>0;$$

рѣшая эти неравенства, находимъ:

$$t>-\frac{\alpha}{b'},\quad t<\frac{\beta}{a'},$$

т.-е. ограничивающіе предѣлы для t. Если между этими предѣлами находятся *цѣлыя* числа, то уравненіе имѣетъ столько паръ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, сколько существуетъ такихъ цѣлыхъ значеній t; если же между предѣлами $-\frac{\alpha}{b'}$ и $\frac{\beta}{a'}$ нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то ур—ніе совсѣмъ не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Вотъ примѣры:

1. Рѣшая ур. $8x+13y=159$, мы нашли

$$x=15+13t,\quad y=3-8t;$$

рѣшая неравенства $15+13t>0$ и $3-8t>0$, находимъ:

$$t>-\frac{15}{13},\quad \text{или}\quad t>-1\frac{2}{13};\quad \text{и}\quad t<\frac{3}{8}.$$

Между предѣлами $-1\frac{2}{13}$ и $\frac{3}{8}$ заключаются только два цѣлыя числа: -1 и 0; полагая $t=-1$, находимъ: $x=2$, $y=11$; положивъ $t=0$, получимъ $x=15$, $y=3$. Данное ур. допускаетъ, такимъ образомъ, только двѣ пары цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

2. Рѣшая ур. $2x + 3y = 1$, находимъ

$$x = -1 + 3t, \quad y = 1 - 2t,$$

откуда находимъ предѣлы для t: $t > \frac{1}{3}$, $t < \frac{1}{2}$. Но какъ между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то заключаемъ, что данное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Это видно изъ самаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, сумма коэффиціентовъ при x и y больше извѣстнаго члена, а потому даже при самыхъ малыхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, при $x = 1$ и $y = 1$, первая часть уравненія больше второй. Вообще, если въ уравненіи $a'x + b'y = c'$ имѣемъ $a' + b > c$, оно не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

II. Уравненіе $a'x + b'y = -c'$, въ которомъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ положительны, а извѣстный членъ отрицателенъ, не имѣетъ положительныхъ рѣшеній, ни цѣлыхъ, ни дробныхъ, ибо сумма положительныхъ чиселъ не можетъ равняться отрицательному числу.

III. Цѣлыя рѣшенія уравненія $a'x - b'y = c$, гдѣ $c \gtrless 0$, выражаются формулами:

$$x = \alpha + b't, \quad y = \beta + a't;$$

чтобы выбрать изъ нихъ только положительныя, надо рѣшить неравенства

$$\alpha + b't > 0, \quad \beta + a't > 0,$$

откуда

$$t > -\frac{\alpha}{b'}, \quad t > -\frac{\beta}{a'};$$

отсюда очевидно, что всякое цѣлое значеніе t, большее большей изъ дробей — $-\frac{\alpha}{b'}$ и $-\frac{\beta}{a'}$ дастъ цѣлыя положительныя рѣшенія; а такъ какъ такихъ значеній t безконечно много, то ур. допускаетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ. Выше мы нашли, что цѣлыя рѣшенія уравненія $6x - 5y = 21$ выражаются формулами:

$$x = 1 + 5t, \quad y = -3 + 6t;$$

а предѣлы для t опредѣляются неравенствами

$$1 + 5t > 0, \quad -3 + 6t > 0,$$

откуда

$$t > -\frac{1}{5}, \quad t > \frac{1}{2}.$$

Заключаемъ, что всѣ цѣлыя числа, большія $\frac{1}{2}$, т.-е. 1, 2, 3, 4, . . . до $-\infty$ даютъ цѣлыя положительныя значенія x и y.

399. *Примѣчаніе.* Когда число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ограниченное, его можно опредѣлить, съ точностью до 1, не рѣшая уравненія.

Этотъ случай представляется тогда, когда a и b имѣютъ одинаковые знаки, и для t получается два предѣла—низшій и высшій, именно

$$t \geqslant -\frac{\alpha}{b} \quad \text{и} \quad t < \frac{\beta}{a};$$

откуда видно, что уравненіе $ax + by = c$ имѣетъ столько цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, сколько есть цѣлыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ, чиселъ между $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$.

I случай. Числа $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ *— дробныя.*

Пусть будутъ $-\frac{\alpha}{b} - f$ и $\frac{\beta}{a} + f_1$ цѣлыя числа, изъ которыхъ первое меньше $-\frac{\alpha}{b}$, второе больше $\frac{\beta}{a}$. Между двумя цѣлыми числами $-\frac{\alpha}{b} - f$ и $\frac{\beta}{a} + f_1$ содержится столько послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, сколько единицъ безъ одной заключается въ ихъ разности. Слѣд. число n цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія будетъ

$$n = \frac{\beta}{a} + f_1 - \left(-\frac{\alpha}{b} - f\right) - 1 = \frac{a\alpha + b\beta}{ab} + f + f_1 - 1.$$

Но какъ α и β суть рѣшенія даннаго ур—нія, то число $a\alpha + b\beta$ равно c, и потому

$$n = \frac{c}{ab} + f + f_1 - 1$$

Пусть цѣлая часть частнаго $\frac{c}{ab}$ равна q, а дополнительная дробь f_2: тогда

$$n = q + f + f_1 + f_2 - 1 \; . \; . \; . \; (1 .$$

Такъ какъ, по положенію, $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ не цѣлыя числа, то f и f_1 суть числа положительныя, отличныя отъ нуля, и меньшія 1, а потому число $f + f_1 + f_2 - 1$, будучи цѣлымъ, можетъ равняться только 0 или 1, такъ что n равно q или $q + 1$.

II случай. Одно изъ чиселъ: $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ *или оба —цѣлыя.*

Если $-\frac{\alpha}{b}$ число цѣлое, то можно взять t равнымъ $-\frac{\alpha}{b}$, и x будетъ равенъ нулю, между тѣмъ какъ y будетъ имѣть величину положительную и цѣлую, равную частному отъ раздѣленія c на b. Въ такомъ случаѣ при доказательствѣ беремъ цѣлое число, предшествующее $-\frac{\alpha}{b}$, т.-е. полагаемъ $f = 1$. Подобное же замѣчаніе относится и къ случаю, когда $\frac{\beta}{a}$ будетъ цѣлое число: и тогда, при этихъ новыхъ условіяхъ, формула (1) всегда примѣнима.

Полагая, что только одно изъ чиселъ $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ — цѣлое, цѣлое число $f + f_1 + f_2 - 1$ приводится къ суммѣ двухъ чиселъ, отличныхъ отъ нуля и меньшихъ, каждое, единицы; оно равно, слѣд., 1, а потому число рѣшеній будетъ $q + 1$.

Пусть, затѣмъ, оба числа: $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ цѣлыя. Числа f и f_1 будутъ оба равны 1, и легко показать, что f_2 равно 0. Въ самомъ дѣлѣ, какъ сказано выше, $-\frac{\alpha}{b}$ есть цѣлое число, слѣд. c дѣлится на b; $\frac{\beta}{a}$ есть цѣлое число, слѣдовательно, c дѣлится на a, а потому и на ab. Такимъ образомъ $f_2 = 0$, $f + f_1 = 1$, слѣд. $f + f_1 + f_2 - 1$ равно 1, и $n = q + 1$. Итакъ, число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $ax + by = c$ равно q или $q + 1$, называя буквою q цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія c на ab. (При этомъ 0 принимается числомъ положительнымъ.)

Напр., для ур—ній $5x + 3y = 2$ и $7x + 5y = 39$ число рѣшеній — q; для уравненій $4x + 3y = 11$ и $7x + 3y = 61$ оно равно $q + 1$.

400. Для примѣненія изложенной теоріи рѣшимъ слѣдующія три задачи.

I задача. ***Выдать 78 рублей одними 5-ти и 3-хъ рублевыми билетами, не имѣя никакихъ другихъ.***

Положимъ, что для этого нужно выдать пятирублевыхъ билетовъ x, а трехрублевыхъ—y; уравненіе, очевидно, будетъ:

$$5x + 3y = 78.$$

Задача требуетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній; и по коэффиціентамъ при x и y видно, что ур—ніе имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Раздѣливъ все ур—ніе на 3, находимъ

$$\frac{5x}{3} + y = 26;$$

полагая $\frac{x}{3} = t$, гдѣ t—цѣлое число, тотчасъ имѣемъ:

$$x = 3t, \quad y = 26 - 5t.$$

Чтобы x и y были положительными, необходимо, чтобы

$$3t > 0 \text{ (если 0 включить въ число положит. чиселъ);}$$

$$26 - 5t > 0, \quad \text{откуда} \quad t < \frac{26}{5} \quad \text{или} \quad 5\frac{1}{5}.$$

Итакъ, полагая

$$\begin{aligned} t &= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \text{ находимъ} \\ x &= 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15, \\ y &= 26,\ 21,\ 16,\ 11,\ 6,\ 1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выдать 78 рублей требуемымъ образомъ можно шестью различными способами, именно:

1) Давая 26 билетовъ въ 3 рубля и ни одного въ 5 рублей; или
2) » 21 » » » » » 3 билета » » » ; или
3) » 16 » » » » » 6 » » » » ; или
4) » 11 » » » » » 9 » » » » ; или
5) » 6 » » » » » 12 » » » » ; или
6) » 1 » » » » » 15 » » » » .

II задача. *Извѣстно, что пріемами элементарной геометріи (т.-е. посредствомъ циркуля и линейки) можно раздѣлить окружность какъ на 6, такъ и на 5 равныхъ частей. Какъ и сколькими способами можно съ помощью этихъ частей найти $\frac{1}{15}$ часть окружности?*

Очевидно, что нужно найти такія двѣ дроби съ знаменателями 5 и 6, которыхъ разность равнялась бы $\frac{1}{15}$; назвавъ числители этихъ дробей буквами x и y, имѣемъ:

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{5}=\frac{1}{15}\quad(1);\qquad\frac{y}{5}-\frac{x}{6}=\frac{1}{15}\quad(2).$$

Рѣшаемъ ур. (1); по освобожденіи отъ знаменателей имѣемъ:

$$5x-6y=2;$$

раздѣливъ обѣ части на 2 и положивъ $\frac{x}{2}=x'$, получимъ ур—ніе

$$5x'-3y=1,$$

откуда $x'=-1+3t$, а слѣд.

$$x=-2+6t;$$

затѣмъ

$$y=-2+5t.$$

Чтобы x и y были >0, нужно, чтобы было: $t>\frac{1}{3}$, $t>\frac{2}{5}$. Полагая

$$t=1,\quad 2,\quad 3,\ldots$$

находимъ:

$$x=4,\quad 10,\quad 16,\ldots$$

$$y=3,\quad 8,\quad 13,\ldots$$

Итакъ, наименьшія значенія x и y, дающія простѣйшее рѣшеніе задачи, суть: $x=4$ и $y=3$, т.-е.: отъ $\frac{4}{6}$ или $\frac{2}{3}$ окружности нужно отнять $\frac{3}{5}$ ея, и остатокъ дастъ $\frac{1}{15}$ окружности.

Рѣшая ур—ніе (2), или, по освобожденіи отъ дробей, уравненіе: $6y - 5x = 2$, находимъ:

$$x = 2 - 6t,$$
$$y = 2 - 5t.$$

предѣлы для t суть: $t < \frac{1}{3}$, $t < \frac{2}{5}$. Полагая

$$t = 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \ldots$$

имѣемъ:

$$x = 2, \quad 8, \quad 14, \quad 20, \ldots$$

$$y = 2, \quad 7, \quad 12, \quad 17, \ldots$$

Итакъ, при этомъ способѣ, простѣйшее рѣшеніе задачи будетъ $x = 2$ и $y = 2$, т.-е. вычтя изъ дуги, равной $\frac{2}{5}$ окр. дугу $\frac{1}{3}$ окр., получимъ въ остаткѣ $\frac{1}{15}$ окружности.

III задача. *Зубчатое колесо съ 17-ю зубцами захватываетъ зубцы другого колеса съ 13-ю зубцами. Сколько оборотовъ должно сдѣлать каждое изъ нихъ, чтобы каждый зубецъ перваго побывалъ въ каждомъ промежуткѣ второго?*

Пусть первое колесо должно сдѣлать x оборотовъ, а второе y. Когда первое обернется одинъ разъ, его 17 зубцовъ зацѣпятъ послѣдовательно столько же промежутковъ второго; слѣд. при x оборотахъ $17x$ зубцовъ зацѣпятъ $13y$ промежутковъ между зубцами второго. Но при x оборотахъ каждый зубецъ долженъ зацѣпить каждый промежутокъ, слѣд.

$$17x = 13y,$$

откуда: $x = 13t$, $y = 17t$.

Чтобы x и y были положительны, нужно t давать всѣ цѣлыя значенія, начиная съ 1. Такимъ образомъ, требуемое будетъ имѣть мѣсто черезъ 13 оборотовъ (вообще $13t$) перваго, или 17 (вообще $17t$) оборотовъ второго.

2. Рѣшеніе системы уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій.

401. Возьмемъ 2 ур—нія съ 3-мя неизвѣстными:

$$ax + by + cz = d \quad \ldots (1)$$
$$a'x + b'y + c'z = d' \quad \ldots (2).$$

Если въ каждомъ изъ нихъ или въ одномъ всѣ четыре коэффиціента имѣютъ общаго множителя, то предварительно на него сокращаютъ уравненіе; пусть это сдѣлано, и оба уравненія приведены въ простѣйшій видъ.

Чтобы эти уравненія принимали цѣлыя рѣшенія, необходимо, чтобы въ каждомъ всѣ три коэффиціента: при x, y и z были первые между собою, т.-е. a, b и c — первые между собою, и a', b' и c' — между собою. Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напр. a, b и c имѣютъ общаго множителя m, на который d не дѣлится; въ такомъ случаѣ частныя

$$\frac{a}{m}=a', \quad \frac{b}{m}=b' \quad \text{и} \quad \frac{c}{m}=c'$$

будутъ цѣлыя; отсюда

$$a=a''m, \quad b=b''m, \quad c=c''m.$$

Подставляя въ ур. (1) и сокращая на m, найдемъ

$$a''x+b''y+c''z=\frac{d}{m}.$$

При цѣлыхъ x, y и z первая часть представляетъ число цѣлое, тогда какъ вторая есть дробь; слѣд. ур—ніе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Рѣшая одно ур—ніе съ 2-мя неизвѣстными: $ax+by=c$, мы видѣли, что когда a и b — числа первыя между собою, ур—ніе необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія; слѣд. условіе, что для цѣлыхъ рѣшеній коэффиціенты a и b должны быть первыми между собою, было въ этомъ случаѣ условіемъ *необходимымъ* и *достаточнымъ*.

Что же касается взятой системы 2-хъ ур—ній съ 3-мя неизвѣстными, то въ каждомъ ур—ніи коэффиціенты могутъ быть числами первыми между собою, а ур—нія могутъ *и не имѣть* цѣлыхъ рѣшеній; слѣд. условіе это для данной системы, будучи необходимымъ, можетъ быть еще недостаточнымъ (см. далѣе случай II).

402. Пріемъ рѣшенія состоитъ въ исключеніи одного изъ неизвѣстныхъ; исключивъ, напр., z, найдемъ:

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c \quad . \; . \; . \; (3).$$

При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 3 случая:

403. *Первый случай.* Если коэффиціенты при x и y въ ур—ніи (3) — числа первыя между собою, то, какъ извѣстно, ур—ніе это необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Если одна пара этихъ рѣшеній будетъ α и β, то всѣ цѣлыя рѣшенія выразятся формулами:

$$x=\alpha+(bc'-b'c).t,$$
$$y=\beta-(ac'-a'c).t.$$

Подставивъ ихъ въ ур. (1), найдемъ

$$cz-c(ab'-a'b)t=d-a\alpha-b\beta.$$

Первая часть дѣлится на c; если раздѣлится и вторая часть, то ур. будетъ имѣть цѣлыя рѣшенія, въ противномъ случаѣ — нѣтъ. Пусть дѣленіе $d-a\alpha-b\beta$ на c совершается безъ остатка и пусть

$$\frac{d-a\alpha-b\beta}{c}=\gamma_1 \quad . \; . \; . \; (4)$$

тогда

$$z - (ab' - ba)t = \gamma,$$

откуда

$$z = \gamma + (ab' - ba')t.$$

[Изъ (4) имѣемъ: $a\alpha + b\beta + c\gamma = d$, т.-е. α, β и γ обращаютъ 1-е ур—ніе въ тождество, а потому составляютъ систему цѣлыхъ рѣшеній этого ур—нія].

Итакъ, имѣемъ симметричныя формулы

$$x = \alpha + (bc' - b'c).t,$$
$$y = \beta + (ca' - ac')t,$$
$$z = \gamma + (ab' - ba')t:$$

цѣлыя t дадутъ цѣлыя же значенія и для x, y и z.

Положивъ для краткости:

$$bc' - b'c = p, \quad ca' - ac' = q, \quad ab' - ab = r,$$

найдемъ

$$x = \alpha + pt, \quad y = \beta + qt, \quad z = \gamma + rt.$$

Если бы по смыслу задачи требовалось найти для x, y, z цѣлыя *положительныя* числа, то пришлось бы рѣшить совмѣстныя неравенства

$$\alpha + pt > 0, \quad \beta + qt > 0, \quad \gamma + rt > 0,$$

которыя дадутъ три предѣла для t.

Если всѣ эти предѣлы одного смысла, то: 1) когда всѣ они низшіе, то нужно давать t всѣ цѣлыя значенія, большія большаго изъ нихъ; 2) если всѣ три предѣла высшіе, то надо давать t всѣ цѣлыя значенія, меньшія меньшаго изъ нихъ; въ томъ и другомъ случаѣ ур—ніе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Если предѣлы не всѣ одного смысла, то нужно давать t всѣ цѣлыя значенія, содержащіяся между этими предѣлами: число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній будетъ, слѣдовательно, ограниченное. Наконецъ, если предѣлы получатся противорѣчащіе, то ур—нія не имѣютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ. Рѣшить ур—нія

$$15x + 35y + 85z = 385,$$
$$6x + 9y + 8z = 104.$$

Всѣ коэффиціенты перваго ур—нія имѣютъ общаго множителя 5, на который и сокращаемъ это ур—ніе, послѣ чего получимъ систему

$$3x + 7y + 7z = 77,$$
$$6x + 9y + 8z = 104.$$

Въ каждомъ изъ этихъ ур—ній въ отдѣльности коэффиціенты *при неизвѣстныхъ* числа первыя между собою; стало быть, возможно, что ур—нія имѣютъ цѣлыя рѣшенія. Предварительно сдѣлаемъ нѣкоторыя упрощенія. Въ первомъ ур—ніи коэффиціенты 7, 7 и 77 дѣлятся на 7; раздѣливъ обѣ части на это число, найдемъ ур—ніе

$$\frac{3x}{7} + y + z = 11;$$

замѣчая, что $\frac{x}{7}$ должно быть цѣлымъ, полагаемъ $\frac{x}{7} = x'$, откуда

$$x = 7x,$$

а уравненіе принимаетъ видъ

$$3x' + y + z = 11 \ . \ . \ . \ (1').$$

Во второмъ уравненіи коэффиціенты 6, 8 и 104 дѣлятся на 2; по сокращеніи на это число, получимъ

$$3x + \frac{9y}{2} + 4z = 52:$$

такъ какъ $\frac{y}{2}$ должно быть цѣлымъ, то положивъ $\frac{y}{2} = y'$, откуда $y = 2y'$, имѣемъ

$$3x + 9y' + 4z = 52 \ . \ . \ . \ (2')$$

Внося въ ур. (1') $2y'$ вмѣсто y, а во (2') $7x'$ вмѣсто x, найдемъ:

$$3x' + 2y' + z = 11,$$
$$21x' + 9y' + 4z = 52.$$

Умноживъ первое изъ этихъ ур—ній на 4 и вычтя второе, мы исключимъ z и получимъ (по умноженіи на -1):

$$9x' - y' = 8,$$

откуда

$$y' = 8 - 9x'.$$

Отсюда видно, что всякому цѣлому x' соотвѣтствуетъ цѣлый y'. Внося эту величину y' въ ур—ніе $3x' + 2y + z = 11$, находимъ

$$-15x' + z = -5,$$

откуда

$$z = -5 + 15x',$$

слѣд. цѣлому x' соотвѣтствуетъ и цѣлый z. Такимъ образомъ, y' и z выражены черезъ x', самый же x' произволенъ. Находимъ теперь формулы для x, y, z; онѣ будутъ

$$x = 7x,$$
$$y = 16 - 18x',$$
$$z = -5 + 15x',$$

гдѣ x'—произвольное цѣлое число.

Если надо имѣть цѣлыя положительныя величины неизвѣстныхъ, то рѣшаемъ неравенства

$$7x' > 0, \quad 16 - 18x' > 0 \quad \text{и} \quad -5 + 15x' > 0,$$

откуда

$$x' > 0,\quad x' < \frac{8}{9},\quad x' > \frac{1}{3}.$$

Предѣлы одного свойства $\left(0 \text{ и } \frac{1}{3}\right)$ приводятся къ одному: $\frac{1}{3}$, слѣдовательно должно быть:

$$\frac{1}{3} < x' < \frac{8}{9};$$

а какъ между этими предѣлами нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то заключаемъ, что уравненія не допускаютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

404. *Второй случай.* Если коэффиціенты $ac' - ca'$ и $bc' - cb'$ имѣютъ общаго множителя k, который не дѣлитъ $dc' - cd'$, ур. (3) не будетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній, а слѣд. и данныя уравненія не будутъ ихъ имѣть.

Примѣръ. Такъ, уравненія

$$5x + 4y - 3z = 11,$$
$$4x + 7y + 9z = 26$$

имѣютъ, каждое, коэффиціенты при x, y, z первые между собою, но не допускаютъ цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ первое на 3 и сложивъ со вторымъ, найдемъ

$$19x + 19y = 59,$$

въ которомъ коэффиціенты при x и y имѣютъ общаго множителя 19, на который 59 не дѣлится.

Точно также не имѣютъ цѣлыхъ рѣшеній и ур—нія, выводимыя изъ данныхъ исключеніемъ x или y. Первое было бы

$$19y + 57z = 86,\quad \text{или}\quad y + 3z = \frac{86}{19};$$

а второе

$$19x - 57z = -27,\quad \text{или}\quad x - 3z = -\frac{27}{19};$$

оба неразрѣшимы въ цѣлыхъ числахъ.

405. *Третій случай.* Если всѣ три количества $ac' - ca'$, $bc' - cb'$ и $dc' - cd$ имѣютъ общаго множителя k, то раздѣливъ все ур—ніе на k и назвавъ частныя отъ раздѣленія этихъ количествъ на k буквами m, n и p, получимъ ур—ніе

$$mx + ny = p.$$

Если m и n—числа первыя между собою, то найдемъ цѣлыя рѣшенія для x и y вида:

$$x = \alpha - nt,\quad y = \beta + mt.$$

Подставляя въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ 1-е, получимъ ур—ніе въ z и t: если оно допускаетъ цѣлыя рѣшенія, они будутъ вида:

$$z = \gamma + qt',\quad \text{и}\quad t = \delta + rt'.$$

Подставляя выраженіе для t въ формулы x и y, выразимъ всѣ три неизвѣстныя черезъ t'; итакъ

$$x = (\alpha - n\delta) - nrt';$$
$$y = (\beta + m\delta) + mrt;$$
$$z = \gamma + qt.$$

Цѣлыя значенія t' дадутъ таковыя же и для x, y и z.

Примѣръ. Пусть даны ур—нія

$$6x - 7y + 2z = 21 \ldots (1)$$
$$8x + 5y + 6z = 49 \ldots (2).$$

Исключивъ z, находимъ

$$10x - 26y = 14,$$

или, по сокращеніи на 2:

$$5x - 13y = 7,$$

откуда:

$$x = 4 - 13t, \quad y = 1 - 5t.$$

Подстановка въ (1) дастъ:

$$-43t + 2z = 4,$$

или

$$-\frac{43t}{2} + z = 2.$$

Положивъ $\frac{t}{2} = t'$, откуда $t = 2t'$, получимъ

$$-43t' + z = 2;$$

слѣдовательно

$$z = 2 + 43t', \quad t = 2t'.$$

Окончательно:

$$x = 4 - 26t', \quad y = 1 - 10t', \quad z = 2 + 43t'.$$

Легко видѣть, что данная система не допускаетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

406. Задача. *Найти число, которое при раздѣленіи на 11, на 17 и на 23, давало бы послѣдовательно остатки 4, 9 и 10.*

Обозначивъ частныя соотвѣтственно буквами x, y и z, а искомое число буквою N, имѣемъ:

$$\frac{N}{11} = x + \frac{4}{11}, \quad \frac{N}{17} = y + \frac{9}{17}, \quad \frac{N}{23} = z + \frac{10}{23},$$

или

$$N = 11x + 4, \quad N = 17y + 9, \quad N = 23z + 10,$$

откуда получаемъ два уравненія:

$$11x + 4 = 17y + 9 \quad \text{и} \quad 11x + 4 = 23z + 10.$$

которыя можно представить въ видѣ:

$$11x - 17y = 5 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$11x - 23z = 6 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Изъ (1) имѣемъ:

$$x = \frac{5 + 17y}{11} = 2y + \frac{5(1 - y)}{11} = 2y + 5t,$$

полагая $\frac{1 - y}{11} = t$, откуда $y = 1 - 11t$.

Подставляя вмѣсто y его величину въ выраженіе x, получимъ

$$x = 2 - 17t,$$

и

$$y = 1 - 11t.$$

Подставляя выраженіе x въ ур. (2), находимъ

$$11(2 - 17t) - 23z = 6, \quad \text{или} \quad 187t + 23z = 16 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Отсюда $z = \frac{16 - 187t}{23} = -8t + \frac{16 - 3t}{23} = -8t + t'$,

полагая $\frac{16 - 3t}{23} = t'$, или $3t + 23t' = 16$, откуда

$t = \frac{16 - 23t'}{3} = 5 - 8t' + \frac{1 + t'}{3} = 5 - 8t' + t''$, полагая $\frac{1 + t'}{3} = t''$.

Изъ послѣдняго ур—нія имѣемъ: $t' = -1 + 3t''$. Обратная подстановка даетъ послѣдовательно:

$$t = 5 - 8(-1 + 3t'') + t' = 13 - 23t';$$
$$z = -8(13 - 23t'') - 1 + 3t'' = -105 + 187t''.$$

Остается x и y выразить въ зависимости отъ t''; получимъ:

$$x = -219 + 391t'',$$
$$y = -142 + 253t'',$$
$$z = -105 + 187t''.$$

Взявъ для N одну изъ трехъ формулъ этого числа, напр. $N = 11x + 4$ и подставивъ вмѣсто x найденное выраженіе, имѣемъ:

$$N = 11(-219 + 391t') + 4 = -2405 + 4301t'.$$

Это и есть общая формула всѣхъ чиселъ, имѣющихъ то свойство, что при дѣленіи на 11, 17 и 23, они даютъ остатки, соотвѣтственно равные 4, 9 и 10. Полагая $t' = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots$ находимъ цѣлый рядъ чиселъ этого свойства. Такъ:

$t = 0$ даетъ $N = -2405$;

$t = 1$ даетъ $N = 1896$ и т. д.

Если бы требовалось найти наименьшее положительное число даннаго свойства, то оно соотвѣтствовало бы наименьшему цѣлому t'', дающему для N—положительное значеніе. Такое t'' опредѣляется изъ условія: $-2405+4301t''>0$, и есть $t''=1$; соотвѣтствующая величина N равна 1896.

407. Подобнымъ же образомъ рѣшается всякая система ур—ній, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій, потому что послѣдовательныя исключенія неизвѣстныхъ всегда приведутъ къ одному ур—нію съ 2 неизвѣстными. Пусть для примѣра дана

Задача. *Найти число, которое при раздѣленіи на* 5, 6, 7 *и* 8 *давало бы послѣдовательные остатки* 3, 1, 0 *и* 5.

Обозначивъ искомое число буквою N, а частныя по порядку буквами x, y, z и u, находимъ:

$$N=5x+3,\quad N=6y+1,\quad N=7z,\quad N=8u+5;$$

откуда 3 ур—нія

$$\begin{aligned} &1.\quad 5x-6y=-2,\\ &2.\quad 5x-7z=-3,\\ &3.\quad 5x-8u=2. \end{aligned}$$

Въ данномъ случаѣ нѣтъ даже надобности въ исключеніи неизвѣстныхъ, ибо и безъ того каждое ур—ніе содержитъ только два неизвѣстныя.

Рѣшая ур—ніе $5x-6y=-2$, находимъ:

$$y=2+5t,\quad x=2+6t.$$

Вставляя $x=2+6t$ въ уравненіи (2), получаемъ ур—ніе

$$7z-30t=13,$$

изъ котораго находимъ

$$z=-11+30t',\quad t=-3+7t'.$$

Выразивъ x и y черезъ t', имѣемъ

$$x=-16+42t',\quad y=-13+35t'.$$

Вставляя вмѣсто x его выраженіе черезъ t' въ ур. (3), имѣемъ

$$210t'-8u=82,$$

откуда:

$$t'=1+4t'',\quad u=16+105t'.$$

Выражая и остальныя неизвѣстныя черезъ t', получаемъ

$$\begin{aligned} x&=26+168t'',\\ y&=22+140t'',\\ z&=19+120t'',\\ u&=16+105t''. \end{aligned}$$

Вычисляя N, проще всего по формулѣ $N = 7z$, находимъ:

$$N = 133 + 840t''.$$

Итакъ, искомыя числа имѣютъ видъ $133 + 840t$; изъ нихъ наименьшее положительное $= 133$.

3. Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія, содержащаго болѣе двухъ неизвѣстныхъ.

408. Ограничимся разсмотрѣніемъ случая одного уравненія съ 3-мя неизвѣстными.

Пусть будетъ $ax + by + cz = d$ такое ур., въ которомъ a, b, c и d—числа цѣлыя. Прежде всего необходимо, чтобы коэффиціенты a, b и c не имѣли такого общаго множителя, который не заключается въ d; иначе ур. не могло бы быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ. Если же эти коэффиціенты имѣютъ общаго множителя, содержащагося въ d, то его удаляютъ сокращеніемъ; затѣмъ могутъ представиться два случая: 1) изъ трехъ коэффиціентовъ a, b и c, по крайней мѣрѣ, два — первые между собою (или a и b, или a и c, или b и c), какъ напр. въ ур—ніи $12x + 11y + 15z = 141$, гдѣ 12 и 11—числа первыя между собою; 2) или каждые два коэффиціента имѣютъ общаго множителя, такъ что нѣтъ ни одной пары коэффиціентовъ первыхъ между собою; таково ур—ніе

$$12x + 15y + 20z = 181,$$

въ которомъ 12 и 15 дѣлятся на 3; 12 и 20—на 4, а 15 и 20—на 5.

409. *Первый случай.* Пусть a и b—числа первыя между собою; перенесемъ cz во вторую часть и приложимъ къ ур—нію

$$ax + by = d - cz$$

пріемъ § 394, принимая на время z за извѣстное; такимъ образомъ мы найдемъ формулы

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

въ которыхъ α и β—цѣлые относительно z полиномы первой степени. Давая z и t произвольныя цѣлыя значенія, найдемъ цѣлыя значенія и для x и y.

Если неизвѣстныя должны быть, сверхъ того, положительными, то даемъ z произвольное, но цѣлое и положительное, значеніе, и полагаемъ

$$\alpha - bt > 0 \quad \text{и} \quad \beta + at > 0,$$

откуда получимъ для t два предѣла; смотря по тому, будутъ ли эти предѣлы одного смысла или разнаго, согласные между собою или противорѣчащіе, получится неограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній для x и y, или же ограниченное, или же такихъ рѣшеній совсѣмъ не будетъ. Такимъ образомъ поступаютъ по отношенію ко всякому цѣлому положительному значенію z.

Примѣръ. Пусть дано ур—ніе

$$5x + 8y - 12z = 41.$$

Такъ какъ 5 и 8 числа первыя между собою, то указанный пріемъ примѣнимъ къ этому уравненію. Итакъ

$$5x + 8y = 41 + 12z,$$

откуда

$$x = \frac{41 + 12z - 8y}{5} = 8 + 2z - 2y + \frac{1 + 2z + 2y}{5},$$

или

$$x = 8 + 2z - 2y + t,$$

полагая $\frac{1 + 2y + 2z}{5} = t$, или $2y - 5t = -1 - 2z$. Отсюда

$$y = \frac{-1 - 2z + 5t}{2} = -z + 2t + \frac{t-1}{2} = -z + 2t + t'.$$

полагая $\frac{t-1}{2} = t'$, или $t = 1 + 2t'$.

Это значеніе, подставленное въ y, дастъ

$$y = -z + 2 + 4t' + t' \quad \text{или} \quad y = -z + 2 + 5t'$$

Подставляя найденныя для y и t величины въ формулу x, получимъ

$$x = 8 + 2z + 2z - 4 - 10t' + 1 + 2t' = 5 + 4z - 8t'.$$

Если ищемъ для x, y и z только положительныя цѣлыя значенія, то опредѣляя предѣлы для t', получимъ

$$t' > \frac{z-2}{5} \quad \text{и} \quad t' < \frac{4z+5}{8}.$$

Отсюда: $\frac{4z+5}{8} > \frac{z-2}{5}$, слѣд. $z > -\frac{41}{12}$, а какъ для z беремъ только положительныя значенія, то, включая сюда и 0, имѣемъ:

$$z = 0,\ 1,\ 2\ .\ .\ .\ \text{до} + \infty.$$

При $z = 0$ находимъ $t' > -\frac{2}{5}$ и $t' < \frac{5}{8}$, слѣд. можно положить только $t' = 0$, что дастъ: $x = 5$ и $y = 2$.

При $z = 1$ имѣемъ $t' > -\frac{1}{5}$ и $t' < 1\frac{1}{8}$; сл. можно взять $t' = 0$ и $t' = 1$, что дастъ:

$$t' = 0\ .\ .\ .\ y = 1, \quad x = 9;$$
$$t' = 1\ .\ .\ .\ y = 6, \quad x = 1.$$

При $z = 2$ находимъ $t' > 0$ и $t' < 1\frac{5}{8}$; слѣд. можно взять $t' = 0$ (ибо условіе $t' > 0$ не исключаетъ равенства) и $t' = 1$.

При $t' = 0$ имѣемъ: $y = 0$, $x = 13$;
» $t' = 1$ » $y = 5$, $x = 5$.

При $z = 3$ получаемъ $t' > \frac{1}{5}$ и $t' < 2\frac{1}{8}$, слѣдов. можно взять: $t = 1$ и $t' = 2$, что дастъ:

$$t' = 1\ .\ .\ .\ y = 4,\quad x = 9;\qquad t' = 2\ .\ .\ .\ y = 9,\quad x = 1.$$

Продолжая такимъ образомъ, получимъ сколько угодно системъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

410. *Второй случай.* Положимъ теперь, что между тремя коэффиціентами нѣтъ ни одной пары взаимно-первыхъ. Назовемъ буквою h общаго наиб. дѣлителя, напр., для a и b; и пусть a' и b будутъ частныя отъ раздѣленія a и b на h. Ур—ніе будетъ

$$ha'x + hb'y + cz = d,$$

откуда

$$a'x + b'y = \frac{d - cz}{h}.$$

Полагая, что первая часть есть число цѣлое, необходимо, чтобы и вторая равнялась цѣлому числу, напр. t; въ такомъ случаѣ

$$a'x + b'y = t\ .\ .\ .\ (1)$$

и $\frac{d - cz}{h} = t$, или $cz + ht = d\ .\ .\ .\ (2)$.

Но a' и b первыя между собою, какъ частныя отъ раздѣленія a и b на ихъ общ. наиб. дѣл. h; а потому ур. (1) имѣетъ цѣлыя рѣшенія вида

$$x = \alpha - b't' \quad \text{и} \quad y = \beta + a't'\ .\ .\ .\ (3)$$

гдѣ α и β суть цѣлые полиномы первой степени относительно t.

Затѣмъ, замѣчая, что c и h—первыя между собою числа, потому что множитель h, будучи общимъ для a и b, не дѣлитъ c; усматриваемъ, что ур. (2) имѣетъ цѣлыя рѣшенія вида

$$z = \gamma - ht'' \quad \text{и} \quad t = \delta + ct''\ .\ .\ .\ (4).$$

Подставляя эту величину t въ формулы x и y, мы представимъ эти неизвѣстныя цѣлыми полиномами первой степени въ t' и t''; между тѣмъ какъ z зависитъ только отъ t''.

Если вопросъ требуетъ еще, чтобы x, y и z были положительными, то должно выразить, что величины ихъ больше нуля. Въ полученныхъ неравенствахъ нужно стараться изолировать t' и t'' и такимъ образомъ получить предѣлы для этихъ неопредѣленныхъ; однако, изъ теоріи неравенствъ мы знаемъ, что это не всегда возможно.

Примѣръ. Пусть дано ур—ніе

$$6x - 10y + 15z = 37.$$

Замѣчая, что 6 и 10 имѣютъ общаго дѣлителя 2, даемъ ур—нію видъ:

$$3x - 5y = \frac{37 - 15z}{2},$$

и полагаемъ, что

$$3x - 5y = t \quad \text{и} \quad \frac{37 - 15z}{2} = t \quad \text{или} \quad 15z + 2t = 37.$$

Изъ перваго находимъ

$$y = t - 3t' \quad \text{и} \quad x = 2t - 5t'.$$

Изъ второго имѣемъ

$$z = 1 - 2t'' \quad \text{и} \quad t = 11 + 15t''.$$

Вставляя эту величину t въ выраженія y и x, получимъ

$$y = 11 + 15t'' - 3t' \quad \text{и} \quad x = 22 + 30t'' - 5t';$$

достаточно дать t' и t'' какія угодно цѣлыя значенія, и такимъ образомъ получатся цѣлыя значенія x, y и z.

Чтобы выдѣлить только положительныя, полагаемъ

$$1 - 2t'' > 0; \quad 11 + 15t'' - 3t > 0; \quad 22 + 30t'' - 5t > 0.$$

Первое дастъ $t'' < \frac{1}{2}$. Два другія можно написать такъ.

$$3t' - 15t'' < 11 \quad \text{и} \quad 5t' - 30t'' < 22,$$

или, умноживъ первое на 2:

$$6t' - 30t'' < 22 \quad \text{и} \quad 5t' - 30t'' < 22.$$

Изъ условія $2t' < 1$ имѣемъ $30t' < 15$. Складывая это неравенство съ каждымъ изъ двухъ предыдущихъ, находимъ условія

$$6t' < 37 \quad \text{и} \quad 5t' < 37,$$

изъ которыхъ второе заключается въ первомъ. Итакъ, количеству t' можно давать только значенія

$$+6, +5, +4, \ldots \text{до} -\infty.$$

Изъ неравенствъ въ t' и t'' находимъ

$$t'' > \frac{6t' - 22}{30} \quad \text{и} \quad t' > \frac{5t' - 22}{30}.$$

При положительныхъ t' первый предѣлъ больше второго, поэтому нужно удержать первый предѣлъ. При отрицательныхъ t'—наоборотъ, при чемъ для t'' слѣдуетъ брать только величины между 0 и этимъ вторымъ предѣломъ.

Такимъ образомъ, находимъ:

Для $t' = 6, 5, 4$,—нѣтъ соотвѣтствующихъ значеній для t'.

При:

$t' = 3$	имѣемъ:	$t'' = 0$;	откуда	$x = 7$;	$y = 2$;	$z = 1$.
$t' = 2$	»	$t'' = 0$;	»	12;	5;	1.

……

$t' = -2$	»	$t'' = 0$;	»	$x = 32$;	$y = 17$;	$z = 1$.
	»	-1;	»	2;	2;	3.
$t' = -3$	»	0;	»	37;	20;	1.
	»	-1	»	7;	5;	3.

……

$t' = -8$	»	$t'' = 0$;	»	$x = 62$;	$y = 35$;	$z = 1$
	»	-1;	»	32;	20;	3
	»	-2;		2;	5;	5.

и т. д.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

УРАВНЕНІЯ и НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ и ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

ГЛАВА XXVIII.

Мнимыя величины и дѣйствія надъ ними.

411. Происхожденіе мнимыхъ количествъ. Мы видѣли, что извлеченіе корня привело къ открытію двоякаго рода новыхъ величинъ — *несоизмѣримыхъ* и *мнимыхъ*. Съ величинами перваго рода мы уже ознакомились; переходимъ къ изученію **величинъ второго рода — мнимыхъ.**

Пусть требуется извлечь $\sqrt{-49}$; очевидно, что по абсолютной величинѣ этотъ корень равняется 7; но онъ не можетъ быть равенъ ни $+7$, ни -7, ибо и $(+7)^2$ и $(-7)^2$ даютъ $+49$. Такимъ образомъ, квадратный корень изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ никакимъ положительнымъ и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Къ тому же заключенію придемъ и относительно $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[6]{-17}$, вообще относительно $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$. Итакъ, вообще: корень четной степени изъ отрицательнаго числа не м. б. выраженъ ни положительнымъ, ни отрицательнымъ числомъ, и представляетъ поэтому *новый* разрядъ величинъ: ихъ называютъ *мнимыми*, въ отличіе отъ обыкновенныхъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, называемыхъ *дѣйствительными*.

412. Приведеніе мнимаго количества къ виду $a.\sqrt{-1}$. Всякое мнимое количество приводится въ зависимость отъ простѣйшаго мнимаго выраженія: $\sqrt{-1}$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя мнимое выраженіе $\sqrt{-49}$ и разложивъ -49 на множители 49×-1, а затѣмъ примѣнивъ правило извлеченія корня изъ произведенія, послѣдовательно найдемъ:

$$\sqrt{-49} = \sqrt{49 \times -1} = \sqrt{49} \times \sqrt{-1} = \pm 7 . \sqrt{-1};$$

и вообще

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 . -1} = \sqrt{a^2} . \sqrt{-1} = \pm a\sqrt{-1}.$$

Отсюда видно, что всякое мнимое количество можно представить подъ видомъ произведенія изъ $\sqrt{-1}$ на нѣкоторое положит. или отрицат. (соизмѣримое или несоизм.) число; слѣд. мнимое число составляется изъ $\sqrt{-1}$ точно такимъ же образомъ, какъ дѣйствительное число изъ положительной или отрицат. единицы. Поэтому $\sqrt{-1}$ разсматриваютъ какъ нѣкоторую новую, особаго рода, *единицу*, и называютъ ее *мнимою единицею*. *Гауссъ* предложилъ обозначить ее буквою i. Знакъ i *Коши* называлъ *ключемъ*.

Такимъ образомъ, вмѣсто $5\sqrt{-1}$ пишутъ $5i$; вмѣсто $\pm a\sqrt{-1}$ пишутъ $\pm ai$.

413. Общій видъ всякаго числа. Мнимое выраженіе вида $a+bi$, состоящее изъ дѣйствительной части a и чистаго мнимаго члена bi, называется *комплекснымъ количествомъ* (т.-е. составнымъ) или просто *комплексомъ*; въ немъ a и b — дѣйствительныя количества, причемъ b называется *коэффиціентомъ* при мнимой единицѣ. Два комплексныя количества: $a+bi$ и $a-bi$, различающіяся только знаками коэффиціента b, называются *сопряженными*.

Комплексное количество есть самая общая форма чиселъ: въ немъ заключаются дѣйствительныя и чистыя мнимыя числа какъ частные случаи. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $b=0$, получаемъ дѣйствительное количество a; полагая же $a=0$, находимъ чистое мнимое количество bi.

Модуль. Абсолютная величина квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ дѣйствительной части и коэффиціента при мнимомъ знакѣ i, т.-е. $\sqrt{a^2+b^2}$, наз. *модулемъ* комплекснаго выраженія. Такимъ образомъ:

$$\text{модуль комплекса } 3-4i \text{ равенъ } \sqrt{3^2+4^2}=5;$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad 7-8i \qquad \text{»} \qquad \sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}.$$

Если въ выраженіи $a+bi$ положить $b=0$, то комплексъ дастъ дѣйствительное количество a; модуль же обратится въ $\sqrt{a^2}=a$, т.-е. *модуль дѣйствительнаго количества равенъ его абсолютной величинѣ.*

414. Степени i. Прежде всего мы должны разсмотрѣть возвышеніе въ степень мнимой единицы i.

1. Очевидно, $i^1=(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$.

2. $i^2=(\sqrt{-1})^2$; нахожденіе результата можетъ повести въ данномъ случаѣ къ нѣкоторымъ недоразумѣніямъ, и потому требуетъ разъясненія. По опредѣленію корня имѣемъ $(\sqrt{-1})^2=-1$; съ другой стороны: $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{+1}=\pm 1$; спрашивается, что же брать для i^2: -1 или ± 1? *Безу* разъяснилъ это недоразумѣніе, замѣчая, что когда мы не знаемъ происхожденія подкореннаго количества въ формулѣ $\sqrt{a^3}$, то должны брать для корня двойной знакъ, т.-е. полагать $\sqrt{a^2}=\pm a$; но когда знаемъ происхожденіе подкореннаго количества, т.-е. знаемъ, получилось ли a^2 отъ умноженія $(+a)(+a)$, или же отъ умноженія $(-a)(-a)$, то корень слѣдуетъ брать съ однимъ знакомъ: въ первомъ случаѣ съ $+$, во второмъ съ $-$. Этотъ случай, очевидно, относится къ выраженію $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{+1}$: здѣсь подкоренное число $+1$ получилось отъ возвышенія въ квадратъ -1, а не $+1$, а потому для $\sqrt{+1}$ *въ данномъ случаѣ* надо брать значеніе: -1. Этимъ всякое недоразумѣніе устранено. Итакъ, $i^2=-1$.

3. $i^3 = i^2 \,.\, i = -1 \,.\, \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, или $-i$.
4. $i^4 = i^2 \,.\, i^2 = -1 \times -1 = +1$.

Возводя затѣмъ i въ слѣдующія высшія степени, найдемъ прежнія значенія степеней. Такъ:

$$i^5 = i^4 \,.\, i = +1 \,.\, i = +i;\quad i^6 = i^4 \,.\, i^2 = +1 \,.\, -1 = -1;\quad i^7 = i^6 \,.\, i = -i;$$
$$i^8 = i^4 \,.\, i^4 = +1 \text{ и т. д.}$$

Можно доказать, что и при дальнѣйшемъ увеличеніи показателей будутъ періодически повторяться все тѣ же четыре значенія степеней, т.-е. $+i$, -1, $-i$ и $+1$. Въ самомъ дѣлѣ, по отношенію къ дѣлителю 4 всѣ цѣлыя числа можно разбить на четыре группы: 1) числа, дѣлящіяся на 4 безъ остатка; 2) числа, дающія при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 1; 3) числа, дающія при дѣленіи на 4 въ остаткѣ 2; 4) дающія при дѣлителѣ $= 4$, остатокъ 3. Всѣ они заключаются, поэтому, въ четырехъ формулахъ: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, гдѣ n—какое угодно цѣлое положительное число.

Давая показателю каждую изъ этихъ четырехъ формъ, получимъ послѣдовательно:

1. $i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1$.
2. $i^{4n+1} = i^{4n} \,.\, i = +1 \cdot i = -i$.
3. $i^{4n+2} = i^{4n} \,.\, i^2 = +1 \,.\, -1 = -1$.
4. $i^{4n+3} = i^{4n} \,.\, i^3 = +1 \,.\, -i = -i$.

Отсюда заключаемъ: *всѣ четныя степени i дѣйствительны, и равны: $+1$, когда показатель есть число кратное 4, и -1, когда четный показатель не дѣлится безъ остатка на 4, всѣ нечетныя степени i мнимы, и равны: $+i$, когда показатель при дѣленіи на 4 даетъ остатокъ 1, и $-i$, когда рпи дѣленіи показателя на 4 получается остатокъ 3.*

Напр., при дѣленіи 17 на 4 остатокъ $= 1$, слѣд. $i^{17} = +i$, и т. д.

415. Теорема. *Чтобы комплексъ $a+bi$ равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы дѣйствительная часть и коэффиціентъ при i равнялись нулю, т.-е. чтобы $a = 0$ и $b = 0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство $a + bi = 0$ даетъ $a = -bi$, откуда, возвышая обѣ части въ квадратъ, и замѣчая, что

$i^2 = -1$, имѣемъ: $a^2 = b^2 . -1$, или $a^2 = -b^2$, откуда $a^2 + b^2 = 0$.

Но сумма квадратовъ двухъ дѣйствительныхъ количествъ a и b тогда только можетъ равняться нулю, когда каждое количество отдѣльно равно нулю; слѣд. $a = 0$ и $b = 0$.

Обратно, если $a = 0$ и $b = 0$, то оба члена комплекса обращаются въ 0, и слѣд. $a + bi = 0$.

416. Теорема. *Чтобы два комплекса были равны, необходимо и достаточно, чтобы дѣйствительныя части и коэффиціенты при i были отдѣльно равны между собою.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія

$$a + bi = \alpha + \beta i$$

по перенесеніи всѣхъ членовъ въ первую часть и по вынесеніи i за скобки, имѣемъ

$$(a - \alpha) + (b - \beta)i = 0,$$

откуда по предыдущей теоремѣ имѣемъ:

$$a - \alpha = 0 \quad \text{и} \quad b - \beta = 0, \quad \text{или} \quad a = \alpha \quad \text{и} \quad b = \beta.$$

Итакъ, сказанное условіе необходимо. Оно и достаточно, ибо при $a = \alpha$ и $b = \beta$ оба комплекса становятся тождественными.

Дѣйствія надъ комплексными выраженіями.

417. Условившись правила, найденныя нами для дѣйствій надъ дѣйствительными количествами, распространять и на мнимыя, мы придемъ къ тому замѣчательному выводу, что *результатъ всякаго дѣйствія надъ комплексами приводитъ къ выраженіямъ того же вида.*

1. **Сложеніе.** Пусть требуется сложить $a + bi$ съ $c + di$. Прилагая сюда правила сложенія дѣйствительныхъ количествъ, найдемъ: $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di$; или, перемѣняя порядокъ членовъ и выводя i за скобки, получимъ:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) \,.\, i,$$

выраженіе того же вида какъ и слагаемыя.

Примѣръ. $(5 + 4i) + (-7 - 9i) = -2 - 5i$.

Примѣчаніе. Сумма двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть величина дѣйствительная; въ самомъ дѣлѣ:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

2. **Вычитаніе.** Вычитая $c + di$ изъ $a + bi$, имѣемъ

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i,$$

выраженіе того же вида, что и данныя.

3. **Умноженіе.** Примѣняя правило умноженія многочленовъ, данное для дѣйствительныхъ количествъ, и замѣчая, что $i^2 = -1$, найдемъ:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad) \,.\, i,$$

выраженіе того же вида, какъ и сомножители.

Такъ какъ произведеніе двухъ комплексовъ есть выраженіе того же вида, то, умноживъ это произведеніе на третій комплексъ, получимъ снова выраженіе комплексной формы и т. д. Слѣд. теорема справедлива для какого угодно числа мнимыхъ множителей.

Примѣръ. $(3+5i)(4-7i)=12+20i-21i+35=47-i$.

Примѣчаніе. Взявъ сопряженные комплексы, имѣемъ:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2 \,.\, i^2=a^2+b^2,$$

т.-е. *произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексовъ есть дѣйствительное положительное количество, равное квадрату ихъ общаго модуля.*

4. **Дѣленіе.** Пусть требуется раздѣлить $a+bi$ на $c+di$. Изображая частное въ видѣ дроби, имѣемъ

$$\frac{a+bi}{c+di}.$$

Для уничтоженія мнимости знаменателя множимъ числителя и знаменателя на $c-di$ (выраженіе, сопряженное съ знаменателемъ), и находимъ послѣдовательно:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.\,i.$$

Примѣръ. $\dfrac{10+15i}{1+2i}=\dfrac{(10+15i)(1-2i)}{5}=\dfrac{40-5i}{5}=8-i.$

5. **Возвышеніе въ степень.** Такъ какъ возвышеніе въ *цѣлую положительную степень* совершается рядомъ послѣдовательныхъ умноженій, а произведеніе комплексовъ есть выраженіе того же вида, то и степень комплекса имѣетъ тотъ же видъ. Слѣд.

$$(a+bi)^n=(a+bi)(a+bi)\,.\;.\;.\,(a+bi)=P+Qi,$$

гдѣ P и Q—дѣйствительныя количества.

Примѣры. I. $(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi.$

$$\text{II. } (1-\sqrt{3}\,.\,i)^3=1-3\,.\,\sqrt{3}\,.\,i+3\,.\,(\sqrt{3}\,.\,i)^2-(\sqrt{3}\,.\,i)^3$$
$$=1-3\sqrt{3}\,.\,i-9+3\sqrt{3}\,.\,i=-8.$$

Если показатель степени—цѣлое отрицательное число, то

$$(a+bi)^{-n}=\left(\frac{1}{a+bi}\right)^n=\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)^n=\frac{M+Ni}{(a^2+b^2)^n}=P+Qi,$$

слѣд. степень имѣетъ тотъ же видъ.

6. **Извлеченіе корня.** Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ комплекса $a+bi$. Докажемъ, что результатъ дѣйствія и въ этомъ случаѣ будетъ комплексъ того же вида, т.-е. что

$$\sqrt{a+bi}=x+yi\;.\;.\;.\;(1).$$

Предложеніе это будетъ доказано, если окажется возможнымъ найти для x и y такія *дѣйствительныя* значенія, которыя удовлетворяли бы этому равенству. Возвысивъ обѣ части въ квадратъ для освобожденія первой части отъ радикала, получимъ ур.

$$a+bi=x^2-y^2+2xyi\;.\;.\;.\;(2).$$

Мы знаемъ (§ 416), что такое равенство возможно только тогда, когда дѣйствительныя и мнимыя количества отдѣльно равны между собою; слѣд. ур. (2) распадается на два:

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{и} \quad 2xy = b\ .\ .\ .\ (3).$$

Такимъ образомъ неизвѣстныя x и y должны удовлетворять двумъ уравненіямъ второй степени, изъ которыхъ они всегда могутъ быть опредѣлены. Для этого возводимъ оба ур—нія въ квадратъ и складываемъ:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, имѣемъ

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Передъ радикаломъ надо брать одинъ знакъ $+$, потому что первая часть, какъ сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ, всегда положительна. Такимъ образомъ, система ур—ній (3) замѣняется слѣдующею

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = a.$$

Складывая сначала, а потомъ вычитая эти ур—нія, находимъ

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Такъ какъ абсолютная величина $\sqrt{a^2 + b^2}$ больше абсолютной величины a или $-a$, и корень этотъ находится подъ верхнимъ радикаломъ со знакомъ $+$, то подкоренная величина въ выраженіяхъ x и y положительна, а потому x и y—дѣйствительны. Такимъ образомъ, всегда можно найти для x и для y дѣйствительныя количества, удовлетворяющія ур—нію (1), а потому преобразованіе, выражаемое этимъ ур—емъ, всегда возможно.

Уравненіе $2xy = b$ показываетъ, что когда b положительно, x и y должны имѣть одинаковые знаки, когда же b отрицательно, знаки x и y должны быть разные. Поэтому, разумѣя подъ b—абсолютное число, и слѣдов. знаки при b—окончательными, имѣемъ двѣ формулы:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\,.\,i\right]\ .\ .\ .\ (I)$$

$$\sqrt{a - bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\,.\,i\right]\ .\ .\ .\ (II)$$

Примѣры: I. Пусть требуется преобразовать $\sqrt{5 + 12i}$.

Полагая въ формулѣ (I) $a = 5$, $b = 12$, найдемъ:

$$\sqrt{5 + 12i} = \pm\left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5^2 + 12^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{5^2 + 12^2}}{2}}\cdot i\right]$$

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{5 + 13}{2}} + \sqrt{\frac{-5 + 13}{2}}\,.\,i\right] = \pm(3 + 2i).$$

II. Извлечь квадратный корень изъ $3-4i$.

Полагая въ формулѣ (4) $a=3$ и $b=-4$, найдемъ:

$$\sqrt{3-4i}=\pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\cdot i\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}}-\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\cdot i\right]=\pm(2-i).$$

Здѣсь мы разсматривали только квадратные корни изъ отрицательныхъ чиселъ и изъ комплексовъ. Далѣе будетъ указано, что и корни какого угодно порядка представляютъ комплексы того же вида, т.-е. $a+bi$.

418. *Приложенія.* Приводимъ нѣкоторыя приложенія, съ цѣлью показать, какимъ образомъ употребленіе комплексныхъ выраженій даетъ возможность безъ труда достигать результатовъ, выводъ которыхъ безъ помощи этого рода выраженій представлялъ бы значительныя трудности.

Теорема I. *Если данное число есть сумма двухъ квадратовъ, то и квадратъ его также есть сумма двухъ квадратовъ.*

Пусть n есть число, равное суммѣ двухъ квадратовъ a^2 и b^2, т.-е.

$$n=a^2+b^2.$$

Замѣтивъ, что a^2+b^2 есть произведеніе двухъ мнимыхъ сопряженныхъ выраженій $a+bi$ и $a-bi$, замѣняемъ это выраженіе слѣдующимъ:

$$n=(a+bi)(a-bi).$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

$$n^2=(a+bi)^2\,.\,(a-bi)^2=(a^2-b^2+2abi)(a^2-b^2-2abi)$$
$$=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2,$$

т.-е. n^2 есть сумма квадратовъ количествъ: a^2-b^2 и $2ab$. Такимъ образомъ, не только теорема доказана, но полученная формула указываетъ и самый способъ разложенія n^2 на сумму двухъ квадратовъ.

Пусть, напрям., $n=5$. Это число есть сумма двухъ квадратовъ: 2^2+1^2. Полагая $a=2$ и $b=1$, по найденной формулѣ имѣемъ: $n^2=(2^2-1^2)^2+(2.2.1)^2$, или $25=3^2+4^2$.

Положимъ теперь $n=25$, $a=4$, $b=3$, по той же формулѣ найдемъ: 25^2 или $625=(4^2-3^2)^2+(2.4.3)^2=7^2+24^2$; и т. д.

Теорема II. *Произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть сумма двухъ квадратовъ, также равно суммѣ двухъ квадратовъ.*

Пусть даны четыре комплекса: $a+bi$, $a-bi$, $a'+b'i$, $a'-b'i$ попарно сопряженные; взявъ произведеніе

$$(a+bi)(a-bi)(a'+b'i)(a'-b'i),$$

помноживъ перваго множителя на второй и третьяго на четвертый, найдемъ: $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$. Если же помножимъ перваго на третій и второго на четвертый, получимъ $[aa'-bb'+(ab'+ba')i]\,.\,[aa'-bb'-(ab'+ba')i]$, или $(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2$. Слѣд.

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2\quad.\ .\ .\ (1)$$

Если умножимъ перваго на четвертый и второго на третій, то произведеніе приметъ видъ: $[aa'+bb'+(a'b-ab')i] \,.\, [aa'+bb'-(a'b-ab')i]$, или $(aa'+bb')^2+(a'b-ab')^2$. Такимъ образомъ имѣемъ другую формулу:

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'+bb')^2+(a'b-ab')^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Формулы (1) и (2) доказываютъ предложенную теорему, показывая вмѣстѣ съ тѣмъ, что разложеніе взятаго произведенія на сумму двухъ квадратовъ можетъ быть исполнено двоякимъ образомъ. Эта теорема была найдена *Леонардомъ Пизанскимъ*.

Теорема III. *Произведеніе двухъ чиселъ, изъ коихъ каждое есть сумма четырехъ квадратовъ, также равно суммѣ четырехъ квадратовъ.*

Взявъ тождество

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-d}=\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}\right)+\left(\frac{1}{a-c}-\frac{1}{a-d}\right),$$

выполнимъ въ немъ три указанныхъ вычитанія и освободимъ его отъ знаменателя; найдемъ

$$(b-d)(a-c)=(b-c)(a-d)+(c-d)(a-b).$$

Положивъ теперь

$$a=\frac{p+qi}{r+si}, \quad b=\frac{p'+q'i}{r'+s'i}, \quad c=\frac{-r+si}{p-qi}, \quad d=\frac{-r'+s'i}{p'-q'i},$$

замѣнимъ въ предыдущемъ тождествѣ a, b, c и d ихъ мнимыми выраженіями; получимъ

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)=(pp'+qq'+rr'+ss')^2+$$
$$(pq'-rs'-qp'-sr')^2+(pr'+sq'-qs'-rp')^2+(ps'+qr-sp'-rq')^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема эта принадлежитъ *Эйлеру*. Приведенное доказательство ея проще [illegible] доказательства, даннаго *Эрмитомъ* и основаннаго также на употребленіи комплексовъ.

ГЛАВА XXIX.

Геометрическое представленіе мнимыхъ величинъ. — Обобщеніе основныхъ алгебраическихъ законовъ. — Предметъ Алгебры.

419 Мы уже видѣли, что если взять неограниченную прямую $x'x$, на ней [illegible] точку O принять за начало, и условиться длины, отсчитываемыя [illegible] представлять числа положительныя, то длины, отсчитываемыя [illegible] будутъ служить геометрическимъ представленіемъ чиселъ отрицательныхъ. Такъ, если отрѣзокъ OA будетъ представлять единицу, то отрѣзки, [illegible] отъ O, OA, OA', OA'',... будутъ представлять числа +1, +2, [illegible] OB, OB', OB''..., отложенные влѣво отъ O, изображать отрицательныя [illegible] −1, −2, −3,... Точка O представляетъ 0. Такимъ образомъ линія [illegible] представлять всевозможныя *дѣйствительныя* числа положительныя и отрицательныя; она называется поэтому *осью дѣйствительныхъ чиселъ*, или *дѣйствительною осью*.

Спрашивается, какъ представить геометрически чистыя мнимыя и комплексныя (составныя) числа? Проведя черезъ точку O прямую *yy* перпендикулярно къ xx', опишемъ изъ точки O радіусомъ, равнымъ единицѣ длины, окружность; радіусъ OC будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками $OA=+1$ и $OB=-1$ діаметра; слѣд. $\overline{OC}^2=(+1)\,.\,(-1)=-1$, откуда $OC=\sqrt{-1}$, т.-е. $OC=i$. Итакъ, чистыя мнимыя числа i, $2i$, $3i$,... должно отсчитывать на перпендикулярѣ yy' вверхъ отъ 0, а числа $-i$, $-2i$, $-3i$,... на томъ же перпендикулярѣ внизъ отъ 0. Поэтому прямая yy' называется *осью мнимыхъ чиселъ*, или *мнимою осью*.

Черт. 44.

Пусть требуется теперь представить геометрически комплексное число $a+bi$. Для этого на дѣйствительной оси откладываемъ число a, вправо отъ 0, если оно положительно, и влѣво, если отрицательно. Потомъ на мнимой оси откладываемъ число bi вверхъ отъ 0, если оно положительно, и внизъ, если отрицательно. Изъ точекъ a и bi возставляемъ перпендикуляры къ осямъ: пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ и дастъ точку, которая геометрически представляетъ число $a+bi$. Напр., точка P представляетъ число $3+2i$, точка P' — число $3-2i$, P'' — число $-4+3i$, и P''' — число $-3-3i$. Согласно этому, комплексныя количества изображаются точками, наполняющими всю плоскость по обѣ стороны дѣйствительной оси; отсюда названіе *латеральныхъ количествъ*, данное *Гауссомъ* комплекснымъ числамъ. Точку P называютъ *аффиксомъ* комплекса $3+2i$, точку P' — **аффиксомъ комплекса $3-2i$ и т. д.**

Пусть комплексъ $a+bi$ опредѣляетъ точку M; соединивъ ее съ началомъ и назвавъ OM буквою r, изъ треугольника MNO получимъ: $OM=r=\sqrt{a^2+b^2}$. Слѣд., модуль комплекса есть длина линіи OM, соединяющей точку M съ началомъ. Одной линіи OM недостаточно для опредѣленія точки M, ибо всѣ точки плоскости, лежащія на окружности, описанной изъ 0 радіусомъ r, будутъ находиться отъ начала на разстояніи r. Но если вмѣстѣ съ длиною линіи r данъ будетъ уголъ, составляемый ею съ осью ox, то этихъ двухъ данныхъ достаточно для опредѣленія точки M. Такимъ образомъ, абсолютная длина линіи $OM=r$ и направленіе ея, выражаемое угломъ α, составляемымъ этой линіей съ ox, вполнѣ опредѣляютъ точку M, такъ что положеніе этой точки можетъ быть представлено какъ комплексомъ $a+bi$, такъ и комплексомъ r_α, которые и называются поэтому *геометрически-равными*. r называется также *модулемъ* комплекса r_α, и есть количество *существенно положительное*; уголъ α наз. *аргументомъ* комплекса; онъ считается въ направленіи xoM, обратномъ движенію часовой стрѣлки. Согласно этому, комплексный символъ r_α можно разсматривать условно какъ сумму количествъ a и bi, каждое изъ которыхъ можетъ имѣть только два противоположныя направленія, такъ, на нашемъ чертежѣ будемъ имѣть

$$r_\alpha=a+bi.$$

Аргументъ можно увеличивать или уменьшать на цѣлое число окружностей $2k\pi$, ибо направленіе линіи ОМ не измѣнится, если повернуть эту линію на 4, 8,... прямыхъ угловъ; сл.

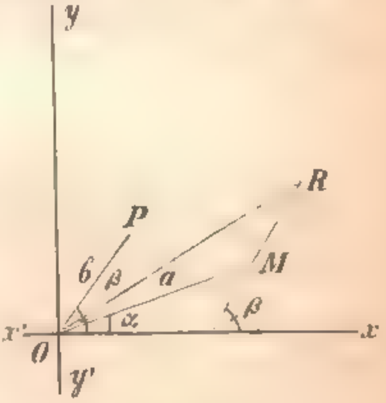
$$r_\alpha = r_{\alpha + 2\pi} = r_{\alpha + 4\pi} = \dots$$

Если линію ОМ повернуть до совпаденія съ Ox, то уголъ α обратится въ нуль, и комплексъ приметъ видъ r_0. Но отрѣзокъ полуоси ox представляетъ дѣйствительное положительное количество; сл. послѣднее можетъ быть изображено символомъ r_0, гдѣ r — его абсолютная величина. Увеличивъ уголъ α до π, получимъ комплексъ r_π, представляющій, слѣд., дѣйствительное отрицательное число. Знаки 0 и π играютъ роль знаковъ $+$ и $-$. Чистое мнимое количество bi изобразится комплексомъ $b_{\frac{\pi}{2}}$; мнимое $-bi$ комплексомъ $b_{\frac{3\pi}{2}}$.

Примѣчаніе. Вычисленіе мнимыхъ вида $a + bi$ было впервые изложено *Бомбелли* въ его *алгебрѣ* (1579); но заслуга введенія въ общее употребленіе въ анализѣ мнимыхъ величинъ принадлежитъ знаменитому *Эйлеру* (1707—1783). Первая попытка геометрическаго представленія этихъ количествъ принадлежитъ члену Петербургской Академіи Наукъ *Генриху Кюну* (1690—1769) и относится къ 1750 году. Аббатъ *Бюэ* (Buée) первый предложилъ, въ 1806, представлять мнимыя единицы на оси перпендикулярной къ дѣйствит. оси. Въ томъ же году *Робертъ Арганъ*, изъ Женевы, приложилъ новую теорію къ доказательству нѣкоторыхъ теоремъ. Но усовершенствованіе этой теоріи принадлежитъ *Гауссу*, и ему же обязаны комплексныя количества правомъ гражданства въ наукѣ. Благодаря этимъ количествамъ, ученикъ Гаусса *Риманнъ* пришелъ къ весьма важнымъ открытіямъ. Развитію теоріи мнимыхъ количествъ также много способствовали *Коши*, *Лежандръ*, *Абель*, *Якоби* и *Вейерштрассъ*.

420. Обобщеніе основныхъ алгебраическихъ законовъ. Опредѣленія дѣйствій остаются прежнія; но какъ понятіе о комплексѣ шире понятія объ обыкновенныхъ положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ, то и дѣйствія надъ комплексами должны получить болѣе широкій смыслъ.

421. Сложеніе комплексовъ. Такъ какъ всякій комплексъ опредѣляется длиною нѣкоторой линіи и ея направленіемъ, то подъ сложеніемъ комплексовъ разумѣютъ слѣдующую операцію: *сложить нѣсколько комплексовъ значитъ помѣстить начало втораго въ конецъ перваго, давая второму направленіе, опредѣляемое его аргументомъ; начало третьяго въ конецъ втораго и т. д. Суммою будетъ линія, соединяющая начало перваго комплекса съ концомъ послѣдняго.* Очевидно, это представленіе сложенія есть не болѣе какъ обобщеніе понятія о сложеніи противоположныхъ величинъ, заключая въ себѣ послѣднее, а равно и ариѳметическое сложеніе, какъ частные случаи.



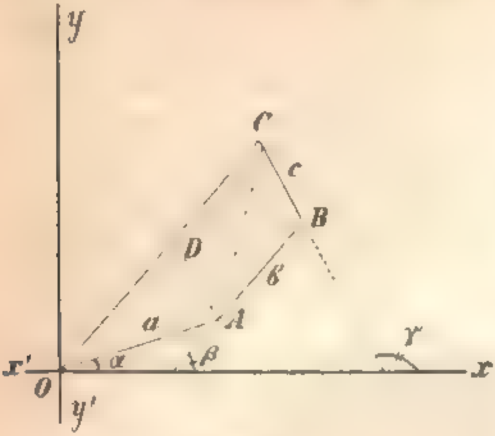
Черт. 45.

Такъ, если требуется сложить два комплекса a_α и b_β, чертимъ линію $OM = a$ подъ угломъ α съ положительнымъ направленіемъ оси $x'x$, затѣмъ наносимъ отъ точки M линію $MR = b$ подъ угломъ β съ тою же осью, и соединяемъ точки O и R. Линія OR по величинѣ и направленію и выразитъ искомую сумму.

Три точки O, M и R, вообще, лежатъ не на одной прямой, образуя треугольникъ MOR; замѣчая, что въ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ, но больше ихъ разности, находимъ, что: *модуль суммы двухъ комплексовъ меньше или равенъ суммѣ модулей слагаемыхъ, и больше или равенъ ихъ разности.*

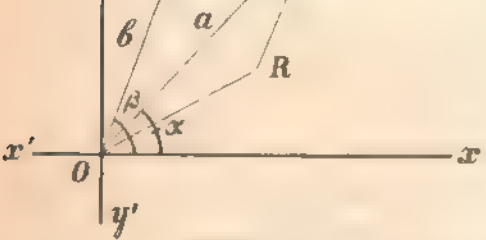
Поступая такимъ же образомъ съ нѣсколькими комплексами a_α, b_β, c_γ, найдемъ ихъ сумму, выражаемую по величинѣ и направленію линией OC, соединяющей начало 1-го комплекса съ концомъ послѣдняго. (Черт. 45.

Когда всѣ вершины многоугольнаго контура OABC находятся не на одной прямой, то OC, якъ прямая, будетъ меньше ломаной OABC; если же всѣ вершины O, A, B, C, будутъ на одной прямой, то OC будетъ меньше или равна суммѣ сторонъ контура. Итакъ *модуль суммы нѣсколькихъ комплексовъ равенъ или меньше суммы модулей слагаемыхъ.*



Черт. 46.

422. Законъ перемѣстительный въ сложеніи. Возьмемъ тѣ же три комплекса a_α, b_β, c_γ. Чтобы построить сумму $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$, проводимъ послѣдовательно прямыя $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$ подъ углами α, β и γ съ OX. Сумма выразится линией OC. Чтобы построить сумму $a_\alpha + c_\gamma + b_\beta$, проведемъ изъ точки A прямую AD, равную и параллельную BC, и соединимъ D съ C; изъ равенства и параллельности сторонъ AD и BC слѣдуетъ, что фигура ADCB есть параллелограмъ, сл. DC и AB равны и параллельны, такимъ образомъ, прямая AD представляетъ комплексъ c_γ, а DC—комплексъ b_β. Видимъ, что конецъ послѣдняго слагаемаго суммы $a_\alpha + c_\gamma + b_\beta$ находится въ той же точкѣ C, какъ и конецъ послѣдняго слагаемаго суммы $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma$ обѣ суммы, слѣдоват., равны



Черт. 47.

423. Законъ сочетательный въ сложеніи. Разсмотримъ тѣ же три комплекса: $a_\alpha = OA$, $b_\beta = AB$ и $c_\gamma = BC$. (Черт.46). Ихъ сумма равна OC. Но $AC = b_\beta + c_\gamma$, и OC можно разсматривать какъ сумму комплексовъ OA и AC. Слѣд.

$$a_\alpha + b_\beta + c_\gamma = a_\alpha + (b_\beta + c_\gamma),$$

т. е. *комплексы сочетательны въ сложеніи.*

424. Вычитаніе комплексовъ. Вычитаніе опредѣляется какъ дѣйствіе, обратное сложенію. Легко видѣть, что *вычитаніе комплекса a_α сводится къ приданію противоположнаго комплекса $a_{\alpha+\pi}$.* Въ самомъ дѣлѣ, сумма двухъ противоположныхъ комплексовъ a_α и $a_{\alpha+\pi}$, какъ не трудно убѣдиться, равна нулю. Слѣдов.

$$m_\mu + a_{\alpha+\pi} + a_\alpha = m_\mu + (a_{\alpha+\pi} + a_\alpha) = m_\mu + 0 = m_\mu.$$

Такимъ образомъ, $m_\mu + a_{\alpha+\pi}$ есть результатъ вычитанія $m_\mu - a_\alpha$, потому что этотъ результатъ, сложенный съ a_α, даетъ m_μ.

Пусть (черт. 47) изъ комплекса OM = a_α нужно вычесть комплексъ OM' = b_β. Согласно вышеприведенному правилу вычитанія, должно къ OM придать комплексъ, противоположный комплексу OM', т.-е. изъ точки M провести линію MR, параллельную OM' и равную b, но въ противоположномъ направленіи. Сумма OM и MR, т.-е. OR и представитъ искомую разность.

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что такъ какъ точки O, M, R, вообще, составляютъ треугольникъ, то *модуль разности двухъ комплексовъ не больше суммы модулей обоихъ комплексовъ и не меньше ихъ разности.*

425. Умноженіе комплексовъ. Распространяя опредѣленіе умноженія на комплексы, мы должны разумѣть подъ этимъ дѣйствіемъ слѣдующее: *умножить комплексъ b_β на a_α значитъ произвести надъ множимымъ тѣ же дѣйствія, какія нужно произвести надъ положительной единицей для составленія изъ нея множителя.* Но чтобы изъ +1 или изъ 1_0 составить a_α, надо: 1) помножить абсолютную единицу на a и помѣстить a на OX, вслѣдствіе чего получится a_0; 2) повернуть a_0 на уголъ α. Слѣд., чтобы умножить b_β на a_α, нужно сначала помножить модуль множимаго на a, вслѣдствіе чего получится ba_β, затѣмъ этотъ комплексъ повернуть на уголъ α, т.-е. къ аргументу β множимаго придать аргументъ множителя. Итакъ, *перемножить комплексы значитъ перемножить ихъ модули и сложить аргументы.* $b_\beta \cdot a_\alpha = (ba)_{\beta+\alpha}$.

Въ этомъ опредѣленіи заключаются, какъ частные случаи, опредѣленія умноженія абсолютныхъ чиселъ и противоположныхъ. Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$(+a)\cdot(+b) = a_0 \cdot b_0 = (ab)_0 = +ab.$$

$$(-a)\cdot(+b) = a_\pi \cdot b_0 = (ab)_{\pi+0} = (ab)_\pi = -ab.$$

$$(+a)\cdot(-b) = a_0 \cdot b_\pi = (ab)_\pi = -ab.$$

$$(-a)\cdot(-b) = a_\pi \cdot b_\pi = (ab)_{2\pi} = (ab)_0 = +ab.$$

426. Свойства произведенія. Изъ опредѣленія умноженія комплексовъ прямо выводимъ:

I. $a_\alpha \cdot b_\beta = (ab)_{\alpha+\beta}$; но $ab = ba$ и $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, слѣд., $(ab)_{\alpha+\beta} = (ba)_{\beta+\alpha}$, или, по опредѣленію умноженія, $b_\beta \cdot a_\alpha$. Итакъ

$$a_\alpha \cdot b_\beta = b_\beta \cdot a_\alpha,$$

т.-е. *произведеніе двухъ множителей не измѣняется отъ перемѣны ихъ порядка.*

II. $a_\alpha(b_\beta c_\gamma) = a_\alpha[(bc)_{\beta+\gamma}] = (abc)_{\alpha+\beta+\gamma} = a_\alpha b_\beta c_\gamma$.

т.-е. *для умноженія комплекса a_α на произведеніе двухъ другихъ, b_β и c_γ, нужно a_α умножить послѣдовательно на каждый изъ комплексовъ b_β и c_γ.* Въ этомъ заключается *законъ сочетательный въ умноженіи.*

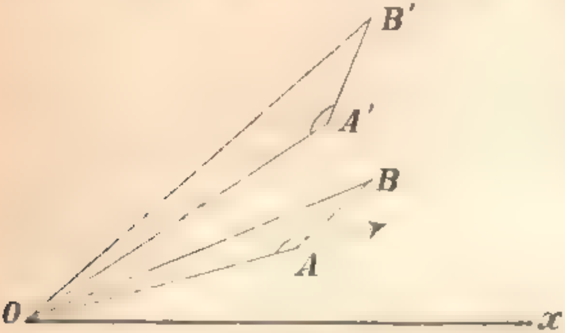
Основываясь на этихъ двухъ положеніяхъ, не трудно доказать законъ перемѣстительный для какого угодно числа множителей.

III. Докажемъ равенство

$$a_\alpha(b_\beta + c_\gamma) = a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma.$$

выражающее *законъ распредѣлительный* въ умноженіи. Комплексы b_β и c_γ, подлежащіе сложенію, образуютъ между собою нѣкоторый уголъ $\gamma - \beta$, дополнительный до π къ углу A треугольника OAB. Послѣдній вполнѣ опредѣляется этимъ угломъ и сторонами b и c. Третья сторона выражаетъ по величинѣ и направленію ихъ сумму $b_\beta + c_\gamma$.

Если каждую изъ величинъ b_β и c_γ помножимъ на a_α, то модули ихъ умножатся на a и слѣд. сохранятъ то же самое численное отношеніе. Аргументы β и γ получатъ одно и то же приращеніе α, слѣд., сохранятъ ту же разность. Поэтому, если составить сумму частныхъ произведеній $a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$, то получится треугольникъ OA'B' подобный OAB, такъ какъ углы A и A' равны и заключающія ихъ стороны пропорціональны. Слѣд. OB' будетъ имѣть модулемъ OB, умноженное на a, аргументъ же комплекса OB' будетъ AOX + BOA = AOX + AOA + BOA = BOX + A'OA = BOX + α, т.-е. прежнему аргументу, сложенному съ α. Итакъ, сумма $a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$ произведенію $a_\alpha (b_\beta + c_\gamma)$.



Черт. 47.

IV. $a_\alpha \cdot 0 = a_\alpha \cdot 0_0 = (a \cdot 0)_{\alpha + 0} = 0_\alpha = 0.$

Слѣд., *произведеніе двухъ комплексовъ равно нулю, когда модуль одного изъ нихъ равенъ нулю.*

V. $a_\alpha \cdot 1 = a_\alpha \cdot 1_0 = (a \cdot 1)_\alpha = a_\alpha.$

Слѣд., *умноженіе комплекса на 1 не измѣняетъ его.*

427. Дѣленіе. Сохраняя прежнее опредѣленіе этого дѣйствія, находимъ, что частное отъ раздѣленія $a_\alpha : b_\beta$ равно

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ это частное на дѣлителя, имѣемъ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta} \cdot b_\beta = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)_{\alpha-\beta+\beta} = a_\alpha,$$

т.-е. дѣлимое. Итакъ: чтобы раздѣлить одинъ комплексъ на другой, надо: *модуль дѣлимаго раздѣлить на модуль дѣлителя, а изъ аргумента дѣлимаго вычесть аргументъ дѣлителя.*

428. Возвышеніе въ степень. Пусть показатель степени n — число цѣлое и положительное; по опредѣленію возвышенія въ степень имѣемъ:

$(a_\alpha)^n = a_\alpha \cdot a_\alpha \cdot \cdot \cdot a_\alpha$ (n разъ); отсюда, по правилу умноженія:

$$a_\alpha^n = (a \cdot a \cdot \cdot \cdot a)_{\alpha + \alpha + \cdot \cdot \cdot + \alpha} = a^n_{n\alpha}.$$

Пусть показатель степени будетъ цѣлое отрицательное число $-n$. По свойству такого показателя, имѣемъ:

$$(a_\alpha)^{-n} = \frac{1}{(a_\alpha)^n} = \frac{1}{a^n_{\alpha n}} = \frac{1}{a^n_{\alpha n}} = \left(\frac{1}{a^n}\right)_{0-\alpha n} = a^{-n}_{-\alpha n}.$$

Итакъ, *чтобы возвысить комплексъ въ цѣлую степень, нужно модуль возвысить въ эту степень, а аргументъ умножить на показателя степени.*

429 Извлеченіе корня. Пусть требуется извлечь корень порядка m (гдѣ m — цѣлое положительное число) изъ комплекса r_α, и пусть искомый корень выраженъ комплексомъ ρ_ω, такъ что

$$\sqrt[m]{r_\alpha} = \rho_\omega.$$

По опредѣленію корня, мы должны имѣть $r_\alpha = (\rho_\omega)^m$, или $r_\alpha = \rho^m_{\omega m}$. Этому равенству удовлетворимъ, полагая, что модули обѣихъ частей равны, а аргументы разнятся на число кратное 2π, такъ что для опредѣленія ρ и ω имѣемъ ур—нія:

$$\rho^m = r, \quad m\omega = 2k\pi + \alpha,$$

гдѣ k — цѣлое положит. или отрицат. число; но r есть число положительное, а какъ и ρ существенно положительно, какъ модуль, то оно равно ариѳметическому корню изъ r. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\rho = \sqrt[m]{r}, \quad \omega = \frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}.$$

Итакъ

$$\sqrt[m]{r_\alpha} = (\sqrt[m]{r})_{\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Опредѣлимъ, сколько различныхъ значеній получится для $\sqrt[m]{r_\alpha}$. Если въ формулѣ (1) дать k два какія-нибудь значенія, разнящіяся между собою на число кратное m, то получимъ два угла, разнящіеся кратнымъ 2π, но поворотъ комплекса на уголъ кратный 2π не измѣняетъ величины комплекса. Слѣд. чтобы получить всѣ значенія $\sqrt[m]{r_\alpha}$ достаточно числу k дать m цѣлыхъ послѣдовательныхъ значеній, напр. значенія

$$0, 1, 2, 3, \ldots, m-1.$$

Такимъ образомъ получимъ корни, которыхъ аргументы будутъ

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \ldots, (m-1) \cdot \frac{2\pi}{m} + \frac{\alpha}{m};$$

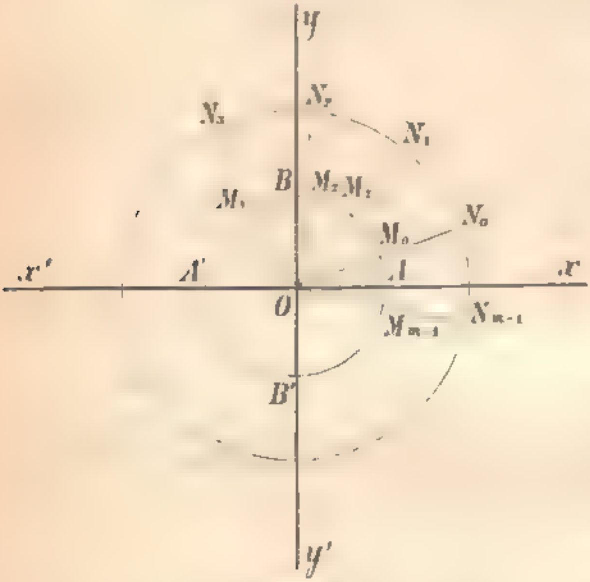
крайніе углы разнятся на $(m-1) \cdot \frac{2\pi}{m}$, т.-е. менѣе чѣмъ на 2π, слѣд. два какие угодно изъ этихъ аргументовъ имѣютъ разность, меньшую 2π, и потому даютъ *различные* комплексы. Отсюда заключаемъ, что

Всякое количество, дѣйствительное или мнимое, имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, и только m

Представимъ эти m корней геометрически. Возьмемъ перпендикулярныя оси $x'x$ и $y'y$, и опишемъ изъ начала 0, какъ центра, окружность радиусомъ равнымъ линейной единицѣ; пусть A будетъ точка пересѣченія этой окружности съ положительною частью Ox оси $x'x$. Отложимъ на этой окружности, начиная отъ точки A, въ прямомъ направленіи, дугу AM_0, равную по величинѣ и по знаку дугѣ $\frac{\alpha}{m}$; затѣмъ, отъ M_0 раздѣлимъ окружность на m равныхъ частей; пусть M_0, M_1, M_2, ... M_{m-1} будутъ точки дѣленія. Если соединить начало O съ этими m точками дѣленія, то m радіусовъ OM_0, OM_1, ..., OM_{m-1} будутъ комплексы модуля 1, а аргументы этихъ комплексовъ будутъ

$$\frac{\alpha}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m},\quad \frac{\alpha}{m}+2\cdot\frac{2\pi}{m},\ \ldots\ldots\ \frac{\alpha}{m}+(m-1)\cdot\frac{2\pi}{m}.$$

Затѣмъ, на каждомъ изъ этихъ радіусовъ отложимъ, начиная отъ точки O, длину, равную $\sqrt[m]{r}$; новые комплексы ON_0, ON_1, ..., ON_{m-1} представятъ m корней m-го порядка изъ даннаго количества r_α, а изъ построенія видно, что ихъ концы расположены на окружности центра O и радіуса $\sqrt[m]{r}$, образуя на этой окружности вершины правильнаго m—угольника.



Черт. 48.

Изъ этого построенія непосредственно видно, что при m четномъ, m корней попарно равны и противоположны по знаку, и что не можетъ быть больше двухъ дѣйствительныхъ корней, и только при m четномъ.

Изслѣдованіе. I. Пусть данное количество будетъ *дѣйствительное* и *положительное;* оно будетъ равно своему модулю r, аргументъ же, какъ кратный 2π, всегда можно принять равнымъ 0. Такимъ образомъ

$$\sqrt[m]{r_0} = \left(\sqrt[m]{r}\right)_{\frac{2k\pi}{m}}$$

Чтобы получился дѣйствительный положительный корень, необходимо, чтобы аргументъ $\frac{2k\pi}{m}$ равнялся четному кратному π, т.-е. $\frac{2k\pi}{m} = 2h\pi$, откуда $k = mh$; а такъ какъ k положительно и меньше m, то необходимо, чтобы $h = 0$, и слѣд., чтобы $k = 0$; стало быть въ числѣ корней будетъ одинъ положительный, и только одинъ.

Чтобы получился корень дѣйствительный отрицательный, нужно, чтобы аргументъ $\frac{2k\pi}{m}$ равнялся нечетному кратному отъ π, т.-е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m} = (2h+1)\pi, \quad \text{откуда} \quad k = \frac{(2h+1)m}{2};$$

но k — цѣлое, $2h+1$ — нечетное число, слѣд. при m нечетномъ равенство невозможно. Если же m — четное, то какъ k меньше m, необходимо, чтобы h было нулемъ, и тогда $k = \frac{m}{2}$, слѣд. при m четномъ, и только въ этомъ случаѣ, имѣется дѣйствительный отрицательный корень, по абсолютной величинѣ равный дѣйствительному положительному корню.

Чтобы два корня аргументовъ $\frac{2k\pi}{m}$ и $\frac{2k'\pi}{m}$, гдѣ k отлично отъ k', были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равнялась четному кратному отъ π,

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{2k'\pi}{m} = 2h\pi, \quad \text{откуда} \quad k + k' = mh,$$

а такъ какъ k и k' положительны, различны и меньше m, необходимо, чтобы h равнялось 1, и чтобы

$$k + k' = m.$$

Отсюда видно, что всякому значенію k, за исключеніемъ нулевого и равнаго $\frac{m}{2}$, если m четно, т. е. за исключеніемъ случая дѣйствительныхъ корней, соотвѣтствуетъ значеніе k' отличное отъ k: слѣд., всѣ *мнимые* корни попарно сопряжены.

Итакъ: *Если m нечетно, всякое дѣйствительное положительное количество имѣетъ одинъ, и только одинъ, корень m-го порядка положительный, и $m-1$ корней мнимыхъ попарно сопряженныхъ.— Если m четно, всякое дѣйствительное положительное количество имѣетъ два корня m-го порядка дѣйствительныхъ, равныхъ и противоположныхъ по знаку, и $m-2$ корня мнимыхъ попарно сопряженныхъ.*

Геометрическое представленіе этихъ m корней m-го порядка положительнаго количества приводитъ къ предыдущимъ результатамъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\alpha = 0$, то вершина M_0 совпадаетъ съ точкой A, т. е. точка A_0 находится, положимъ, на Ox, и слѣд. существуетъ дѣйствительный корень OA_0. Если m четно, то будетъ другой дѣйствительный корень, противоположный, равный предыдущему, но съ противоположнымъ знакомъ; его не будетъ при m нечетномъ; въ обоихъ случаяхъ всѣ остальные корни мнимы; и такъ какъ многоугольникъ симметриченъ относительно Ox, эти мнимые корни попарно сопряжены.

Пусть данное количество будетъ *дѣйствительно*, но *отрицательно*, оно равно своему модулю, но съ противоположнымъ знакомъ; всегда можно положить, что его аргументъ α равенъ π, такъ что количество это будетъ r_π или $-r$, и

$$\sqrt[m]{r_\pi} = \sqrt[m]{-r} = (\sqrt[m]{r})_{\frac{(2k+1)\pi}{m}}.$$

Чтобы могъ быть дѣйствительный положительный корень, необходимо, чтобы его аргументъ былъ равенъ четному кратному отъ π, т. е. чтобы $\frac{(2k+1)\pi}{m} = 2h\pi$, откуда $2k+1 = 2mh$, что невозможно, потому что $2k+1$ нечетно, $2mh$ четно; и такъ, въ данномъ случаѣ, не существуетъ ни одного дѣйствит. положит. корня.

Чтобы могъ быть дѣйствительный отрицательный корень, нужно, чтобы его аргументъ $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ былъ равенъ нечетному кратному отъ π, $\frac{(2k+1)\pi}{m} = (2h+1)\pi$, откуда $2k+1 = (2h+1)m$, это равенство невозможно, если m четно, слѣд. при четномъ m не существуетъ ни одного дѣйствит. отрицат. корня.

Положимъ, что m нечетно; въ этомъ случаѣ, такъ какъ k меньше m, нужно чтобы h было нулемъ, и тогда $k = \frac{m-1}{2}$; слѣд., если m нечетно, будетъ одинъ дѣйствит. отрицат. корень, и только одинъ.

Чтобы два корня аргументовъ $\frac{(2k+1)\pi}{m}$, $\frac{(2k'+1)\pi}{m}$, гдѣ k' отлично отъ k, были сопряженны, необходимо и достаточно, чтобы сумма ихъ аргументовъ равнялась четному кратному отъ π,

$$\frac{(2k+1)\pi}{m}+\frac{(2k'+1)\pi}{m}=2h\pi,$$

откуда

$$k+k'=mh-1,$$

а такъ какъ k и k' положительны, различны и меньше m, необходимо, чтобы h равнялось 1, и сл. чтобы

$$k+k'=m-1.$$

Отсюда видно, что всякому значенію k, кромѣ $\frac{m-1}{2}$ при m нечетномъ, соотвѣтствуетъ одно значеніе k' отличное отъ k, и только одно; слѣд. всѣ мнимые корни попарно сопряженны.

Итакъ: *Если m нечетно, то дѣйствительное отрицательное количество имѣетъ одинъ m-й отрицательный корень, и только одинъ, и $m-1$ m-хъ корней мнимыхъ попарно сопряженныхъ. Если m четно, дѣйствительное отрицательное количество не имѣетъ дѣйствительныхъ m-хъ корней, но имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка мнимыхъ и попарно сопряженныхъ.*

Геометрическое представленіе корней приводитъ къ тѣмъ же заключеніямъ; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $\frac{\alpha}{m}=\frac{\pi}{m}$, и каждое дѣленіе M_0M_1, M_1M_2, . . . равно $\frac{2\pi}{m}$, а потому вершины M_0 и M_{m-1} симметричны относительно діаметра $x'Ox$; точки N_0 и N_{m-1} имѣютъ тоже свойство, и вершины $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_{m-1}$ попарно симметричны относительно $x'Ox$, отсюда видно, что корни — мнимы и попарно сопряжены.

Затѣмъ, на положительный полуоси Ox не м. б. ни одной вершины, на отрицательной же полуоси Ox' будетъ вершина только при m нечетномъ; сл. если m — четно, то не существуетъ ни одного дѣйствительнаго m-го корня; при m — нечетномъ есть одинъ дѣйствительный корень отрицательный; всѣ же мнимые корни попарно сопряжены.

III. Пусть, наконецъ, данное количество r_α — мнимое; аргументъ его уже не будетъ кратнымъ π. Легко видѣть, что ни одинъ m-й корень изъ r_α не м. б. дѣйствительнымъ; въ самомъ дѣлѣ, для этого нужно бы было, чтобы

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}=h\pi,\quad \text{откуда}\quad \alpha=(mh-2k)\pi,$$

т.-е. нужно, чтобы α было кратнымъ π, и слѣдовательно, чтобы данное количество было дѣйствительнымъ.

Затѣмъ, не м. б. двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней, ибо для этого нужно, чтобы сумма ихъ аргументовъ была четнымъ кратнымъ π, т.-е. чтобы

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}+\frac{2k'\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}=2h\pi,\quad \text{или}\quad \alpha=(mh-k-k')\pi,$$

а это требуетъ, чтобы данное количество было дѣйствительнымъ.

Слѣдовательно: *всякій комплексъ имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка также комплексныхъ и не сопряженныхъ.*

Геометрическое представленіе корней показываетъ, что въ этомъ случаѣ m корней суть m радіусовъ правильнаго полигона, не имѣющаго ни одной вершины на оси $x'Ox$, и не имѣющаго радіусовъ симметричныхъ относительно $x'Ox$; а этимъ снова доказывается, что m корней комплексны и не сопряжены.

Примѣчаніе. Если взять два мнимыхъ сопряженныхъ комплекса r_α и $r_{-\alpha}$, то каждый изъ нихъ, какъ мы видѣли, имѣетъ m различныхъ корней m-го порядка, комплексныхъ и не сопряженныхъ. Можно показать, что m корней m-го порядка изъ r_α соотвѣтственно сопряжены m корнямъ m-го порядка изъ $r_{-\alpha}$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sqrt[m]{r_\alpha} = (\sqrt[m]{r})_{\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}}, \quad \sqrt[m]{r_{-\alpha}} = (\sqrt[m]{r})_{\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}}.$$

Но очевидно, для того чтобы два комплекса были сопряжены, необходимо и достаточно, чтобы модули ихъ были равны, а сумма аргументовъ была кратна 2π; но всѣ величины $\sqrt[m]{r_\alpha}$ и $\sqrt[m]{r_{-\alpha}}$ имѣютъ одинъ и тотъ же модуль, слѣд. достаточно показать, что аргументу $\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}$ какого-ниб. m-го корня изъ r_α соотвѣтствуетъ аргументъ $\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}$ m-го корня изъ $r_{-\alpha}$ такой, что

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}+\frac{2k'\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}=2h\pi,$$

или что $k'+k=mh$; но если давать k и k' только значенія $0, 1, \ldots, m-1$, то нужно взять $h=1$, и тогда $k'=m-k$. Отсюда видно, что всякому значенію k соотвѣтствуетъ только одно значеніе k'; слѣд.: *если два комплекса сопряжены, то m корней m-го порядка перваго соотвѣтственно сопряжены m корнямъ m-го порядка втораго.*

430. Изъ предыдущаго видно, что всѣ дѣйствія надъ комплексами приводятъ къ выраженіямъ того же вида; поэтому весь количественный матеріалъ алгебры, надъ которымъ она производитъ дѣйствія и въ формѣ котораго получаетъ результаты, выражается въ слѣдующей общей формѣ:

$$a+bi \quad \text{или} \quad r_\alpha,$$

частными видами которой являются: $+a$ (или a_0), $-a$ (или a_π), $+ai$ (или $a_{\frac{\pi}{2}}$), $-ai$ (или $a_{\frac{3\pi}{2}}$), гдѣ a и b — числа дѣйствительныя, цѣлыя, дробныя или ирраціональныя. Существенный характеръ этихъ величинъ тотъ, что полное опредѣленіе ихъ требуетъ знанія не только ихъ *модулей*, но еще и *направленія*. Поэтому ихъ называютъ также величинами *директивными*. Однѣ изъ этихъ величинъ имѣютъ только два противоположныя направленія, вслѣдствіе чего геометрически онѣ представляются прямыми, наносимыми на неограниченной оси, отъ нѣкотораго постояннаго начала, то въ одну, то въ другую сторону, смотря по ихъ направленію. Ихъ называютъ поэтому *діодами*. Другія величины могутъ быть изображаемы прямыми, проводимыми на плоскости изъ начала въ какомъ угодно направленіи. Ихъ называютъ *плоскими полодами*; діоды — ихъ частный случай. Наконецъ, есть величины, въ представленіе о которыхъ не входитъ идея направленія; поэтому ихъ изображаютъ прямыми, наносимыми на оси въ одну сторону отъ начала. Ихъ называютъ *монодами* (изученіемъ ихъ занимается ариѳметика). Всѣ эти величины подчиняются тѣмъ основнымъ законамъ, обобщенію которыхъ и была посвящена эта глава.

Въ виду сказаннаго, цѣль алгебры можно опредѣлить такъ: *это есть наука, занимающаяся изученіемъ дѣйствій надъ плоскими полодами, и рѣшеніемъ всякихъ задачъ, относящихся къ этимъ величинамъ.*

Величины, имѣющія въ пространствѣ какое угодно направленіе (какъ силы въ механикѣ, прямыя, воображаемыя въ пространствѣ) не подчиняются тѣмъ же законамъ, какъ плоскіе полоды, въ правилахъ умноженія и дѣленія; поэтому ихъ изученіе выходитъ изъ рамокъ алгебры.

ГЛАВА XXX.

Рѣшеніе квадратныхъ уравненій.—Изслѣдованіе корней.—Вычисленіе корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, когда коэффиціентъ a весьма малъ.

431. Опредѣленія. Уравненіе называется *квадратнымъ*, если, будучи *раціональнымъ* и *цѣлымъ* относительно неизвѣстнаго, не содержитъ членовъ съ степенями неизвѣстнаго, высшими второй. Такое ур. имѣетъ трояваго рода члены: съ квадратомъ неизвѣстнаго, съ первою степенью его и извѣстные члены; *общій видъ* его будетъ, слѣдовательно,

$$ax^2+bx+c=0,$$

гдѣ a, b и c суть нѣкоторыя числа, положительныя или отрицательныя; b и c могутъ быть вмѣстѣ или порознь нулями, и тогда ур. называется *неполнымъ*; когда a, b и c отличны отъ нуля, оно называется *полнымъ*.

432. Рѣшеніе неполныхъ ур—ній. I. Когда $b=0$, уравненіе будетъ

$$ax^2+c=0.$$

Раздѣливъ обѣ части на a, и положивъ для краткости $-\frac{c}{a}=A$, можемъ дать этому ур—нію видъ

$$x^2-A=0.$$

Замѣчая, что $A=(\sqrt{A})^2$, получимъ:

$$x^2-(\sqrt{A})^2=0, \quad \text{или} \quad (x-\sqrt{A})(x+\sqrt{A})=0.$$

Но чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ былъ равенъ нулю. Приравнивая перваго множителя нулю: $x-\sqrt{A}=0$, находимъ отсюда $x=+\sqrt{A}$, причемъ второй множитель обращается въ конечное количество $2\sqrt{A}$. Приравнявъ второго множителя нулю: $x+\sqrt{A}=0$, имѣемъ отсюда $x=-\sqrt{A}$, причемъ другой множитель даетъ конечную величину $-2\sqrt{A}$. Итакъ, имѣемъ два рѣшенія: $x'=+\sqrt{A}$, $x''=-\sqrt{A}$; ихъ условились, ради краткости, писать вмѣстѣ:

$$x=\pm\sqrt{A}$$

и читать: x равенъ плюсъ или минусъ $\sqrt{A}$.

Если $A>0$, оба корня дѣйствительны; при $A<0$, оба мнимы.

Примѣры. 1. Рѣшить уравненіе $3x^2-75=0$.

Перенеся 75 во вторую часть, и раздѣливъ обѣ части на 3, получимъ ур.: $x^2=25$, откуда $x=\pm\sqrt{25}=\pm5$. Итакъ:

$$x'=+5; \quad x''=-5.$$

2. Рѣшить уравненіе $3x^2+75=0$.

Выводимъ изъ него: $x^2 = -25$; откуда $x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$, т.-е.

$$x' = +5i;\quad x'' = -5i.$$

II. Положивъ въ уравненіи $ax^2 + bx + c = 0$ извѣстный членъ $c = 0$, получаемъ уравненіе

$$ax^2 + bx = 0.$$

Выводя x за скобки, дадимъ ур—нію видъ $x(ax + b) = 0$. Приравнивая перваго множителя нулю, т.-е. полагая $x = 0$, и замѣчая, что при этомъ второй множитель обращается въ конечную величину b, заключаемъ, что одинъ изъ корней ур—нія равенъ 0. Полагая затѣмъ $ax + b = 0$, откуда $x = -\frac{b}{a}$, замѣчаемъ, что и при этомъ значеніи x ур—ніе обращается въ тождество.

Итакъ, ур—ніе $ax^2 + bx = 0$ имѣетъ два корня

$$x' = 0,\quad x'' = -\frac{b}{a}.$$

Примѣчаніе. Если бы, въ видахъ упрощенія, мы сократили первоначально ур. на x, то, рѣшивъ полученное ур—ніе, нашли бы только одинъ корень $x = -\frac{b}{a}$; другой корень $x = 0$ потеряли бы при сокращеніи. Но едва ли не лишнее снова напоминать, что не позволительно дѣлить ур. на множителя, который можетъ обратиться въ нуль.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 7x = 0$.

Давъ ему видъ $x(3x - 7) = 0$, по предыдущему, находимъ два корня:

$$x' = 0;\quad x'' = \frac{7}{3}.$$

III. Если $b = c = 0$, то ур. принимаетъ видъ

$$ax^2 = 0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то произведеніе ax^2 можетъ обратиться въ нуль только при $x = 0$. И въ этомъ случаѣ можно сказать, что ур. имѣетъ два корня

$$x' = 0 \quad \text{и} \quad x'' = 0,$$

равныхъ между собою.

433. Рѣшеніе полнаго квадратнаго уравненія. Рѣшимъ теперь квадратное уравненіе общаго вида

$$ax^2 + bx + c = 0\ .\ .\ .\ (1).$$

Первый пріемъ. Принимая a отличнымъ отъ нуля, выносимъ a за скобки, вслѣдствіе чего получимъ ур.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}\right) = 0\ .\ .\ .\ (2)$$

Замѣчая, что $\frac{b}{a} \cdot x$ можно представить въ видѣ $2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$, разсматриваемъ x^2 какъ квадратъ перваго члена x нѣкотораго бинома, а $2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$ какъ удвоенное произведеніе перваго члена (x) искомаго бинома на второй, который равенъ, поэтому, $\frac{b}{2a}$. Такимъ образомъ, если въ скобкахъ ур—нія (2) прибавимъ и вычтемъ квадратъ второго члена $\frac{b}{2a}$ бинома, то составимъ ур—ніе эквивалентное (2):

$$a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}\ x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Первые три члена въ скобкахъ составляютъ квадратъ бинома $x + \frac{b}{2a}$. Поэтому послѣднее ур. можно написать въ видѣ:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0\ .\ .\ .\ (3).$$

Каковъ бы ни былъ знакъ разности $b^2 - 4ac$, мы всегда можемъ разсматривать $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ какъ квадратъ дроби $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, и дать уравненію (3) видъ

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0$$

или, по разложеніи на множители, видъ

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}\right) = 0.$$

Но какъ a отлично отъ нуля, то, чтобы первая часть была нулемъ, необходимо и достаточно, чтобы тотъ или другой изъ остальныхъ двухъ множителей былъ нулемъ. Итакъ, послѣднему, а потому и *эквивалентному* ему *данному* уравненію, мы удовлетворимъ, положивъ

либо $x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$, откуда $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

либо $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$, откуда $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Итакъ, квадратному ур—нію удовлетворяютъ *два* значенія неизвѣстнаго, *два корня*. Для краткости оба корня пишутъ въ одной формулѣ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

изъ которой выводимъ слѣдующее

Правило. Чтобы найти значенія неизвѣстнаго, удовлетворяющія полному квадр. ур—нію, нужно: выраженіе, составленное изъ коэффиціента при неизвѣстномъ въ 1-й степени, взятаго съ обратнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ квадратный корень изъ квадрата того же коэф-

фиціента безъ учетвереннаго произведенія крайнихъ коэффиціентовъ, раздѣлить на удвоенный первый коэффиціентъ.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $99x^2-37x-10=0$.

Сравнивая это уравненіе, которому можно дать видъ

$$99x^2+(-37)x+(-10)=0$$

съ общимъ, замѣчаемъ, что нужно положить

$$a=99,\quad b=-37,\quad c=-10.$$

Вставляя въ общую формулу эти числа, найдемъ:

$$x=\frac{37\pm\sqrt{(-37)^2-4\,.\,99\,.\,(-10)}}{2\,.\,99}=\frac{37\pm\sqrt{5329}}{198}=\frac{37\pm73}{198},$$

и наконецъ:

$$x'=\frac{37+73}{198}=\frac{5}{9};\quad x''=\frac{37-73}{198}=-\frac{2}{11}.$$

434. Второй пріемъ. Умножая обѣ части уравненія (1) на $4a$, что позволительно, *если a не равно нулю*, получимъ уравненіе

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

равносильное данному, или, перенеся $4ac$ во вторую часть:

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Разсматривая $4a^2x^2$ и $4abx$ какъ два первые члена квадрата бинома, у котораго первый членъ $=2ax$, а второй b, и придавая къ обѣимъ частямъ ур-нія по b^2, находимъ уравненіе $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$, котораго первая часть есть ничто иное какъ $(2ax+b)^2$. Приведя такимъ образомъ ур. къ виду

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac,$$

замѣчаемъ, что $2ax+b$ есть алгебранч. квадр. корень изъ b^2-4ac, т.-е.

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

откуда

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

формула, совершенно одинаковая съ найденной въ § 433.

435. Третій пріемъ. Найдемъ формулу корней при помощи введенія неопредѣленнаго количества. Имѣя ур.

$$ax^2+bx+c=0,$$

положимъ $x = z + k$, гдѣ z новое неизвѣстное, а k нѣкоторое произвольное количество, и подставимъ въ ур. вмѣсто x сумму $z + k$. Найдемъ ур-ніе

$$a(z + k)^2 + b(z + k) + c = 0;$$

раскрывъ въ немъ скобки и расположивъ по степенямъ z, получимъ

$$az^2 + (2ak + b)z + ak^2 + bk + c = 0 \quad . \; . \; . \; (2)$$

Воспользуемся произволомъ количества k для того, чтобы уничтожить членъ съ первою степенью z, $(2ak + b)z$, и получить такимъ образомъ неполное уравненіе; очевидно, для k надо выбрать такое значеніе, чтобы $2ak + b = 0$, откуда $k = -\frac{b}{2a}$.

Подставивъ это значеніе k къ ур. (2), имѣемъ

$$az^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0, \text{ или } az^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0,$$

$$\text{откуда } z^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \text{ и слѣд. } z = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Такимъ образомъ: $x = z + k = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Этотъ способъ, состоящій въ уничтоженіи 2-го члена, предложенъ *Карданомъ* (1501—1576).

436. Замѣчанія относительно примѣненія предыдущихъ формулъ.

1. Когда коэффиціенты a, b и c числа цѣлыя и b число четное, формула корней допускаетъ упрощеніе. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $b = 2b'$, имѣемъ

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

по сокращеніи на 2.

Напр., если дано уравненіе

$$77x^2 + 50x + 8 = 0,$$

то, полагая въ послѣдней формулѣ $a = 77$, $b' = 25$ и $c = 8$, найдемъ

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 77 \cdot 8}}{77},$$

откуда

$$x' = -\frac{2}{7}, \quad x'' = -\frac{4}{11}.$$

2. Когда коэффиціентъ при x^2 равенъ 1, и ур. имѣетъ видъ

$$x^2 + px + q = 0,$$

то, полагая въ общей формулѣ $a = 1$, $b = p$ и $c = q$, получимъ

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Если при этомъ p — четное число, то для удобства вычисленій выгоднѣе этой формулѣ дать видъ

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Напримѣръ, въ уравненіи $x^2 - 10x + 21 = 0$ имѣемъ: $p = -10$, слѣд. $\frac{p}{2} = -5$, и $q = 21$; примѣняя послѣднюю формулу, найдемъ

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2; \quad \text{слѣд.} \quad x' = 7, \quad x'' = 3.$$

437 Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ на примѣненіе выведенныхъ формулъ.

1. Рѣшить уравненіе $3x^2 - 7x - 2 = 0$.

Примѣняемъ первую формулу, полагая въ ней $a = 3$, $b = -7$, $c = -2$, и находимъ

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{6},$$

откуда

$$x' = \frac{7 + \sqrt{73}}{6} = 2{,}591, \text{ съ точностью до } 0{,}001 \text{ по избытку;}$$

$$x'' = \frac{7 - \sqrt{73}}{6} = -0{,}257, \text{ съ точностью до } 0{,}001 \text{ по недостатку.}$$

2. Рѣшить уравненіе $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

Примѣняя первую формулу, находимъ

$$x = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}}{2ab}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - b^2)}{2ab}.$$

Отдѣляя корни, имѣемъ

$$x' = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{b}, \quad x'' = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{2ab} = \frac{b}{a}.$$

3. Рѣшить уравненіе

$$\frac{a}{x - a} + \frac{b}{x - b} + \frac{c}{x - c} = 3 \quad . \quad . \quad (1)$$

Перенеся 3 влѣво, напишемъ:

$$\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0,$$

или

$$\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}+\frac{x}{x+c}=0,$$

или

$$x\left[\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}\right]=0.$$

Приравнивая нулю 1-й множитель, имѣемъ

$$x'=0\ .\ .\ .\ (2).$$

Приравнивая нулю 2-й множитель, по приведеніи къ общему знаменателю и по упрощеніи числителя, найдемъ

$$\frac{3x^2+2(a+b+c)x+bc+ca+ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}=0\ .\ .\ .\ (3).$$

Приравнявъ числителя нулю, имѣемъ: ур.

$$3x^2+2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0\ .\ .\ .\ (4)$$

корни котораго будутъ требуемые, если убѣдимся, что они не обращаютъ знаменателя въ 0; въ противномъ случаѣ, ихъ слѣдуетъ принять только тогда, когда истинное значеніе неопредѣленности $\frac{0}{0}$, въ которую обратится 1-ая часть ур—нія (3), будетъ $=0$. Корни (4) суть

$$-\frac{1}{3}\left[a+b+c\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}\right]\ .\ .\ .\ (5).$$

Они не обращаютъ въ нуль $x+a$, $x+b$, $x+c$; сл. удовлетворяютъ ур—нію (3), а слѣд. и (4), которое так. обр. имѣетъ три корня: (2) и (5).

Оба корня (5), какъ легко видѣть, дѣйствительны, такъ какъ подрадикальное выраженіе приводится къ виду

$$\frac{1}{2}\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right].$$

4. Рѣшить уравненіе

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x(x+1)}=\frac{x-2}{x(x-1)}.$$

Собравъ всѣ члены въ первую часть, приведя къ общему знаменателю $x(x+1)(x-1)$ и сдѣлавъ приведеніе въ числителѣ, дадимъ уравненію видъ

$$\frac{-x^2-4x-3}{x(x+1)(x-1)}=0\ .\ .\ .\ (1).$$

Приравнявъ числителя нулю, рѣшаемъ ур—ніе

$$-x^2 + 4x - 3 = 0,$$

и находимъ, что корни его суть: $x = 3$ и $x = 1$.

Первый корень не обращаетъ знаменателя въ нуль, а потому удовлетворяетъ данному уравненію. Второй же, обращая знаменателя въ нуль, даетъ первой части уравненія (1) видъ $\frac{0}{0}$. Опредѣляя истинное значеніе этой неопредѣленности, имѣемъ

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)(3-x)}{(x-1)x(x+1)} = \frac{3-x}{x(x+1)};$$

эта дробь при $x = 1$ обращается въ 1, а ур—ніе (1) въ $1 = 0$. Заключаемъ, что корень $x = 1$ не удовлетворяетъ данному ур—нію.

Кромѣ корня, равнаго 3, данное ур—ніе имѣетъ еще корень ∞, ибо степень знаменателя выше степени числителя.

438. Рѣшая квадратное уравненіе, мы нашли два корня; болѣе двухъ корней оно имѣть не можетъ: въ самомъ дѣлѣ, если бы ур—ніе $ax^2 + bx + c = 0$ имѣло болѣе двухъ различныхъ корней, оно было бы тождествомъ, такъ какъ цѣлый по буквѣ x квадратный полиномъ, обращающійся въ нуль болѣе нежели при двухъ различныхъ значеніяхъ x, тождественно равенъ нулю.

Изслѣдованіе корней квадратнаго уравненія.

439. Рѣшая общее уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$, мы нашли два корня:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вычисленіе корней зависитъ, такимъ образомъ, отъ извлеченія квадратнаго корня изъ разности $b^2 - 4ac$, которая можетъ быть положительною, нулемъ, или отрицательною. Опредѣленіе природы корней въ каждомъ изъ этихъ случаевъ; указаніе, что значенія корней въ каждомъ случаѣ соотвѣтствуютъ формѣ уравненія, которому они удовлетворяютъ; наконецъ, опредѣленіе знаковъ дѣйствительныхъ корней,—все это составляетъ *цѣль изслѣдованія корней*.

Относительно разности $b^2 - 4ac$, которую будемъ называть *реализантомъ* уравненія, можетъ быть три предположенія: она можетъ быть положительною, нулемъ и отрицательною:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad b^2 - 4ac = 0, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

При этомъ условимся коэффиціентъ a считать положительнымъ; когда $a < 0$, то умноживъ уравненіе на -1, сдѣлаемъ этотъ коэффиціентъ положительнымъ.

440. Первый случай:

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Въ формулахъ корней подрадикальное количество будетъ, такимъ образомъ, положительное, слѣдовательно, *оба корня дѣйствительные*. Вычитая изъ перваго второй, найдемъ

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a};$$

такъ какъ при данномъ условіи выраженіе это отлично отъ нуля, то заключаемъ, что корни *не равны* между собою.

Далѣе замѣчаемъ, что количество $b^2 - 4ac$ представляетъ или *сумму* или *разность ариѳметическую*, смотря по тому, будетъ ли c *отрицательно* или *положительно*.

1 . $c > 0$.

Такъ какъ по условію и $a > 0$, то $4ac > 0$, вычитаніе положительнаго количества ведетъ къ уменьшенію, слѣд.

$$b^2 - 4ac < b^2,$$

а потому ариѳметическая величина $\sqrt{b^2 - 4ac}$ меньше ариѳмет. величины $\sqrt{b^2}$ или количества b. Означимъ абсолютную величину коэффиціента b буквою β, въ такомъ случаѣ:

Если $b > 0$, то $b = + \beta$, и корни можно написать въ видѣ:

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

такъ какъ $a > 0$, то знаки корней зависятъ отъ числителей: второй числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно-отрицательныхъ членовъ, отрицателенъ; въ первомъ — абсолютная величина отрицательнаго члена больше чѣмъ положительнаго, слѣд. и этотъ числитель отрицателенъ. Значитъ *при b положительномъ оба корня отрицательны*.

Если $b < 0$, то $b = - \beta$, и корни будутъ

$$x' = \frac{+\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{+\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, какъ состоящій изъ двухъ существенно-положительныхъ членовъ, положителенъ; во второмъ абсолютная величина положительнаго члена больше, нежели отрицательнаго, слѣд. и второй — положителенъ. Такимъ образомъ, *при b отрицательномъ оба корня положительны*.

Итакъ: *при $c > 0$ дѣйствительные корни имѣютъ знаки одинаковые, противоположные знаку коэффиціента b*.

2 . $c < 0$.

Тогда какъ $a > 0$, то $4ac < 0$; отсюда заключаемъ: во-первыхъ, что при $c < 0$ выраженіе $b^2 - 4ac$ представляетъ количество существенно-положительное, и слѣд. корни безусловно дѣйствительны; во-вторыхъ, что

$$b^2 - 4ac > b^2,$$

и слѣд. абсолютная величина $\sqrt{b^2 - 4ac}$ больше абсолютной $\sqrt{b^2}$, т.-е. абсолютной величины количества b.

Если $b > 0$, т.-е. $b = +\beta$, то

$$x' = \frac{-\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Отсюда видно, что первый числитель имѣетъ большій по абсолютной величинѣ членъ положительный, слѣд. $x' > 0$; во второмъ числителѣ оба члена существенно отрицательны, слѣд. $x'' < 0$. Итакъ: *знаки корней различны*. При этомъ абсолютная величина числителя корня x' есть разность

$$\sqrt{b^2 - 4ac} - \beta,$$

абсолютная величина числителя корня x'' есть сумма

$$\sqrt{b^2 - 4ac} + \beta$$

тѣхъ же количествъ, и слѣд. больше абс. вел. числителя корня x'; так. обр. *большую абсолютную величину имѣетъ тотъ корень, знакъ котораго противоположенъ знаку* b.

Если $b < 0$, то $b = -\beta$, и

$$x' = \frac{\beta + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{\beta - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Первый числитель, очевидно, положителенъ, слѣд. $x' > 0$; у второго отрицательный членъ имѣетъ большую абсолютную величину, чѣмъ положительный, слѣд. $x'' < 0$; *знаки корней* опять *различны*. При этомъ, абсолютная величина числителя положительнаго корня равна суммѣ

$$\sqrt{b^2 - 4ac} + \beta,$$

а отрицательнаго—разности тѣхъ же количествъ,

$$\sqrt{b^2 - 4ac} - \beta,$$

т.-е. опять *большую абсолютную величину имѣетъ тотъ корень, котораго знакъ противоположенъ знаку коэффиціента* b.

Резюмируя сказанное, заключаемъ, что: *когда* $b^2 - 4ac > 0$, *уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и неравные; при этомъ* (полагая $a > 0$), *если свободный членъ положителенъ, знаки корней одинаковы и противоположны знаку коэффиціента* b; *если же свободный членъ отрицателенъ, знаки корней различны, и знакъ корня, большаго по абсолютной величинѣ, противоположенъ знаку* b.

441. Примѣры. I. Изслѣдовать корни ур—нія $8x^2 + 57x + 10 = 0$.

Такъ какъ $b^2 - 4ac = 57^2 - 320 = +2929 > 0$, то корни дѣйствительные и неравные; при $a > 0$ здѣсь и $c > 0$, сл. знаки корней одинаковы; $b > 0$, слѣд. оба корня отрицательны.

II. Изслѣдовать корни ур—нія $8x^2 - 57x - 10 = 0$.

Здѣсь при $a > 0$ имѣемъ $c < 0$, слѣд., не составляя разности $b^2 - 4ac$, заключаемъ, что корни — дѣйствительные и неравные; знаки ихъ различны, ибо $c < 0$; большій корень, имѣя знакъ противоположный коэффиціенту b, положителенъ.

442. Докажемъ теперь, что при условіи $b^2 - 4ac > 0$ изъ самой формы уравненія вытекаетъ, что оно можетъ быть удовлетворено двумя различными дѣйствительными значеніями x.

Выводя въ ур—ніи a за скобки, имѣемъ:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0.$$

Изъ условія $b^2 - 4ac > 0$ имѣемъ $4ac < b^2$, откуда, раздѣливъ обѣ части неравенства на существенно-положительное количество $4a^2$, находимъ:

$$\frac{c}{a}<\frac{b^2}{4a^2}, \quad \text{и слѣд.} \quad \frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-K^2,$$

гдѣ K^2 должно быть существенно-положительнымъ количествомъ, и слѣд. K — дѣйствительнымъ. Ур—ніе принимаетъ видъ

$$a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-K^2\right\}=0, \quad \text{или} \quad a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-K^2\right\}=0,$$

или, наконецъ, разложивъ выраженіе въ скобкахъ на множители:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-K\right)\left(x+\frac{b}{2a}+K\right)=0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то этому уравненію удовлетворимъ, полагая

$$\text{или } x+\frac{b}{2a}-K=0, \quad \text{откуда} \quad x=-\frac{b}{2a}+K;$$

$$\text{или } x+\frac{b}{2a}+K=0, \quad \text{откуда} \quad x=-\frac{b}{2a}-K,$$

откуда и видно, что ур—ніе удовлетворяется *двумя дѣйствительными неравными* значеніями x.

443. Второй случай.

$$b^2-4ac=0.$$

При этомъ условіи подрадикальное количество въ формулахъ корней обращается въ нуль, слѣд. радикальные члены исчезаютъ, и получается

$$x'=-\frac{b}{2a} \quad \text{и} \quad x''=-\frac{b}{2a},$$

т.-е. оба корня *дѣйствительные и равные*, а общая величина ихъ есть $-\frac{b}{2a}$.

Хотя въ данномъ случаѣ ур—ніе имѣетъ только одинъ корень, но говорятъ, что оно имѣетъ *два*, но *равныхъ* между собою *корня*. Чтобы оправдать такое условное выраженіе, достаточно предположить, что количество $b^2 - 4ac$ сначала положительно, и что оно постепенно уменьшается до нуля; тогда неравные корни будутъ болѣе и болѣе приближаться къ равенству, и наконецъ, когда разность ихъ, выражаемая формулою $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$, дѣлается нулемъ, оба корня становятся равными.

Примѣръ. Уравненіе $9x^2 + 12x + 4 = 0$ имѣетъ корни дѣйствительные равные, ибо $b'^2 - ac = 6^2 - 9 \times 4 = 0$; а общая величина ихъ равна

$$-\frac{b'}{a} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}.$$

444. Что равенство корней при условіи $b^2 - 4ac = 0$ обусловливается самою формою ур—нія, легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Давъ ур—нію видъ

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

и замѣчая, что изъ условія $b^2 - 4ac = 0$ сперва имѣемъ $4ac = b^2$, а затѣмъ, раздѣливъ обѣ части на $4a^2$, получаемъ $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$, подставивъ вмѣсто $\frac{c}{a}$ его величину въ ур—ніе, найдемъ

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0, \quad \text{или} \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Такъ какъ a отлично отъ нуля, то очевидно, что этому ур—нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \quad \text{откуда} \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

445. Третій случай.

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Такъ какъ квадратный корень изъ отрицательнаго количества $b^2 - 4ac$ есть выраженіе мнимое, то изъ самой формулы корней видно, что оба корня будутъ *мнимые*.

Имъ можно дать видъ $A + Bi$. Въ самомъ дѣлѣ, $b^2 - 4ac = (4ac - b^2).(-1)$; слѣд. $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4ac - b^2}.\sqrt{-1} = \sqrt{4ac - b^2}.\,i$, гдѣ количество $\sqrt{4ac - b^2}$ дѣйствительно, такъ какъ $4ac - b^2 > 0$.

Корни берутъ видъ

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.\,i, \quad x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.\,i,$$

откуда видно, что это—*мнимыя сопряженныя количества*.

Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $7x^2-3x+2=0$.
$b^2-4ac=3^2-4\times7\times2=-47$, слѣдов. корни *мнимые*. По предыдущимъ формуламъ имѣемъ:

$$x'=\frac{3}{14}+\frac{\sqrt{47}}{14}\cdot i,\quad x''=\frac{3}{14}-\frac{\sqrt{47}}{14}\cdot i.$$

446. Покажемъ изъ самой формы ур—нія, что при условіи $b^2-4ac<0$ ему нельзя удовлетворить *никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ* x.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія $b^2-4ac<0$ имѣемъ $\frac{c}{a}>\frac{b^2}{4a^2}$, а это неравенство можно замѣнить равенствомъ $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}+K^2$, гдѣ K^2 существенно положительное количество, не могущее обратиться въ нуль. Внося это выраженіе вмѣсто $\frac{c}{a}$ въ уравненіе

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0,$$

даемъ ему видъ

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+K^2\right)=0,\quad \text{или}\quad a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+K^2\right\}=0.$$

Отсюда очевидно, что ур—ніе не м. б. удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x, потому что сумма двухъ положительныхъ количествъ можетъ обратиться въ нуль только тогда, когда каждое изъ нихъ въ отдѣльности обращается въ нуль, но мы знаемъ, что K^2 не м. б. нулемъ.

Изъ формулъ корней видно, что въ данномъ случаѣ ур. м. б. удовлетворено мнимыми значеніями неизвѣстнаго.

447. Задача. *Опредѣлить параметръ* t *такъ, чтобы ур—ніе*

$$x^2-4bx+4ab+t^2-2tx=0$$

имѣло корни равные.

Написавъ ур—ніе въ видѣ

$$x^2-2(2b+t)x+4ab+t^2=0,$$

замѣчаемъ, что должно быть $b'^2-ac=0$, т.-е. $(2b+t)^2-(4ab+t^2)=0$, или $b+t-a=0$, откуда $t=a-b$.

448. Задача. *Въ уравненіи* $5x^2-4x+\lambda=0$ *опредѣлить параметръ* λ *такъ, чтобы первая часть уравненія представляла:*

1) сумму двухъ квадратовъ;

2) разность двухъ квадратовъ;

3) точный квадратъ.

1) Первое требованіе равносильно условію $b'^2-ac<0$, или $4-5\lambda<0$, откуда $\lambda>\frac{4}{5}$. Слѣдовательно, когда λ больше $\frac{4}{5}$, первая часть ур—нія представляетъ сумму двухъ квадратовъ; корни ур—нія будутъ мнимые.

2) Второе требованіе равносильно условію $b'^2-ac>0$; найдемъ: $\lambda<\frac{4}{5}$, и корни ур—нія будутъ дѣйствительные неравные.

3) Третье требованіе равносильно условію $b'^2-ac=0$, откуда $\lambda=\frac{4}{5}$, и ур—ніе будетъ имѣть равные корни.

449 Теорема. *Если уравненіе $ax^2+bx+c=0$, въ которомъ коэффиціенты a, b и c соизмѣримы, удовлетворяется несоизмѣримымъ корнемъ $\alpha+\sqrt{\beta}$, то другой его корень будетъ несоизмѣримое количество $\alpha-\sqrt{\beta}$, сопряженное первому.*

Въ самомъ дѣлѣ, по условію, $\alpha+\sqrt{\beta}$ есть корень даннаго уравненія, слѣд. имѣемъ тождество

$$a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0,$$

или, раскрывъ скобки и собравъ въ отдѣльныя группы соизмѣримые и несоизмѣримые члены, найдемъ

$$(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)+(2a\alpha+b)\sqrt{\beta}=0\;.\;.\;.\;(1).$$

Первая часть этого тождества имѣетъ видъ $M+N\sqrt{\beta}$, гдѣ M и N соизмѣримы. Въ силу (1) это выраженіе должно равняться нулю; но можно доказать, что оно можетъ равняться нулю только тогда, когда $M=0$ и $N=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, *пока N отлично отъ нуля*, мы можемъ обѣ части раздѣлить на N и отъ этого получимъ равенство

$$\sqrt{\beta}=-\frac{M}{N}\;.\;.\;.\;(2)$$

эквивалентное ур—нію $M+N\sqrt{\beta}=0$; но равенство (2) невозможно, ибо оно выражаетъ, что несоизмѣримое количество $\sqrt{\beta}$ равно соизмѣримому $-\frac{M}{N}$. Итакъ, необходимо, чтобы N было нулемъ; но тогда изъ равенства $M+N\sqrt{\beta}=0$ слѣдуетъ, что и $M=0$.

Такимъ образомъ, тождество (1) ведетъ за собою слѣдствія

$$\left.\begin{aligned}a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c=0\\2a\alpha+b=0\end{aligned}\right\}\;(3)$$

Если теперь въ триномѣ ax^2+bx+c замѣнимъ x выраженіемъ $\alpha-\sqrt{\beta}$, то найдемъ

$$(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)-(2a\alpha+b)\sqrt{\beta},$$

но это выраженіе, въ силу (3), равно нулю, т.-е. триномъ обращается въ нуль при $x=\alpha-\sqrt{\beta}$; слѣдов., послѣднее выраженіе служитъ корнемъ даннаго уравненія.

450. Теорема. *Если ур—ніе $ax^2+bx+c=0$, въ которомъ a, b и c числа цѣлыя, имѣетъ соизмѣримый корень, выражающійся въ видѣ* *несократимой дроби* $\frac{\alpha}{\beta}$, *то* α *служитъ дѣлителемъ* c, *а* β*—дѣлителемъ* a.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{\alpha}{\beta}$ есть корень даннаго уравненія, то имѣемъ тождество

$$a\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}+b\cdot\frac{\alpha}{\beta}+c=0,\quad \text{или}\quad a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2=0.$$

Но $a\alpha^2+b\alpha\beta$ дѣлится на α, слѣд. и $c\beta^2$ должно дѣлиться на α; но α есть число первое съ β и β^2, слѣд. c должно дѣлиться на α. Такимъ же образомъ докажемъ, что β, будучи дѣлителемъ суммы $b\alpha\beta+c\beta^2$, дѣлитъ непремѣнно и a.

Слѣдствіе. *Уравненіе* $x^2+px+q=0$, *въ которомъ* p *и* q*—числа цѣлыя, не можетъ имѣть соизмѣримыхъ дробныхъ корей.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что ур—ніе имѣетъ такой корень $\frac{\alpha}{\beta}$, на основаніи предыдущей теоремы нашли бы, что цѣлое число β дѣлитъ коэффиціентъ при x^2, т.-е. 1.

Изъ этого слѣдуетъ, что наше уравненіе можетъ имѣть дѣйствительные корни: или цѣлые, и тогда оба они цѣлые, или же оба несоизмѣримые.

451. Теорема. *Если уравненіе* $ax^2+bx+c=0$, *въ которомъ коэффиціенты* a, b *и* c *дѣйствительны, имѣетъ мнимый корень, то другой его корень есть мнимое количество, сопряженное съ первымъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha+\beta i$ есть корень даннаго уравненія; въ такомъ случаѣ имѣемъ тождество

$$a(\alpha+\beta i)^2+b(\alpha+\beta i)+c=0,$$

или, группируя дѣйствительные и мнимые члены, находимъ:

$$(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+(2a\alpha\beta+b\beta)i=0\ .\ \ .\ \ .\ (1)$$

Первая часть имѣетъ видъ $A+Bi$, гдѣ A и B дѣйствительны; но такое выраженіе можетъ равняться нулю только тогда, когда одновременно $A=0$ и $B=0$. Итакъ, *два условія необходимыя и достаточныя* для того, чтобы $\alpha+\beta i$ было корнемъ даннаго уравненія, суть

$$\left.\begin{aligned} a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c&=0\\ 2a\alpha\beta+b\beta&=0\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Замѣняя въ триномѣ ax^2+bx+c количество x выраженіемъ $\alpha-\beta i$, найдемъ

$$(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)-(2a\alpha\beta+b\beta)i,$$

а въ силу условій (2) это выраженіе обращается въ нуль. Итакъ, предложенное уравненіе, въ которомъ *коэффиціенты дѣйствительны*, имѣя мнимый корень $\alpha+\beta i$, имѣетъ и сопряженный ему корень $\alpha-\beta i$.

Изслѣдованіе частныхъ случаевъ.

452. До сихъ поръ мы предполагали, что коэффиціенты отличны отъ нуля. Положимъ теперь, что:

I. **Коэффиціентъ a равенъ нулю.** При рѣшеніи квадратнаго уравненія намъ приходилось или дѣлить, или множить уравненіе на выраженіе, содержащее a; но мы знаемъ, что это дѣйствіе непозволительно, когда $a = 0$, ибо можетъ повести къ уравненію, неэквивалентному данному. Поэтому является необходимость въ изслѣдованія, представляютъ ли найденныя формулы для x' и x'' рѣшенія уравненія и въ случаѣ когда $a = 0$.

Обращаясь къ формуламъ корней:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

и полагая въ нихъ $a = 0$, найдемъ:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{0}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{0},$$

гдѣ $\sqrt{b^2}$ есть *абсолютное значеніе* числа b. Слѣдовательно, различаемъ два случая.

1. $b > 0$. Имѣемъ: $\sqrt{b^2} = |b| = b$. При $a = 0$ найдемъ:

$$x' = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0}; \quad x'' = \frac{-b - b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty.$$

Такимъ образомъ, первый корень принимаетъ неопредѣленный видъ, а второй обращается въ ∞. Чтобы раскрыть неопредѣленность, множимъ числителя и знаменателя дроби x' на $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, количество сопряженное числителю, и находимъ:

$$x' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ab})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} =$$

$$= \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}.$$

Отсюда видно, что неопредѣленность корня x' зависитъ отъ присутствія въ числителѣ и знаменателѣ общаго множителя $2a$, который при $a = 0$ обращается въ нуль. Сокративъ на $2a$, имѣемъ

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

и, положивъ здѣсь $a = 0$, найдемъ:

$$x' = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b},$$

количество опредѣленное.

. $b < 0$. Имѣемъ: $\sqrt{b^2} = |b| = -b$. При $a = 0$ будетъ

$$x' = \frac{-b-b}{0} = \frac{-2b}{0} = \infty,$$

слѣд. когда a приближается къ 0, корень x' стремится къ ∞. Что касается x'', то числитель этого корня при $a = 0$ есть $-b + b = 0$, и x'' принимаетъ форму $\frac{0}{0}$. Для опредѣленія истиннаго значенія этой неопредѣленности поступаемъ по предыдущему и находимъ

$$x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

что при $a = 0$ даетъ

$$x'' = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b};$$

слѣд. въ этомъ случаѣ второй корень $= -\frac{c}{b}$, а первый обращается въ ∞.

Итакъ, *при $a = 0$ одинъ изъ корней обращается въ ∞, а другой равенъ корню уравненія первой степени $bx + c = 0$, въ которое обращается квадратное уравненіе при $a = 0$.*

453. Обратимся теперь къ самому уравненію, и посмотримъ, что оно даетъ при $a = 0$.

Уравненію можно дать видъ

$$bx + c = -ax^2;$$

и какъ оно не удовлетворяется при $x = 0$, ибо обращается въ $c = 0$, между тѣмъ какъ c отлично отъ нуля, то можно раздѣлить обѣ части на x^2, вслѣдствіе чего получимъ уравненіе, *эквивалентное данному:*

$$\left(b + \frac{c}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = -a.$$

Такъ какъ, по условію, $a = 0$, то произведеніе множителей $b + \frac{c}{x}$ и $\frac{1}{x}$ должно быть нулемъ; а для этого необходимо, чтобы либо тотъ, либо другой множитель обращался въ нуль. Положивъ

$$b + \frac{c}{x} = 0, \quad \text{откуда} \quad x = -\frac{c}{b},$$

замѣчаемъ, что при этомъ другой множитель $\frac{1}{x}$ равенъ $-\frac{b}{c}$, т.-е. конеченъ. Поэтому $x = -\frac{c}{b}$ *есть корень даннаго уравненія.*

Положивъ

$$\frac{1}{x} = 0, \quad \text{откуда} \quad x = \infty,$$

находимъ, что другой множитель обращается въ b, и слѣд. конеченъ. Поэтому $x = \infty$ *есть также корень уравненія.* Эти результаты вполнѣ согласуются съ выводомъ, полученнымъ изъ формулъ корней; поэтому, послѣднія приложимы и къ случаю $a = 0$.

Примѣръ. *Во что обращаются корни ур—нія*

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2(2a^2 - b^2)x + 4a^2 - b^2 = 0$$

при $a = b$?

Такъ какъ при $a = b$ коэффиціентъ при x^2 обращается въ нуль, то одинъ изъ корней обращается въ ∞, а другой принимаетъ значеніе дроби $\frac{4a^2 - b^2}{2(2a^2 - b^2)}$ при $a = b$, т.-е. $= \frac{3}{2}$.

Это можно провѣрить и общими формулами корней, которыя даютъ

$$x' = \frac{2a - b}{a - b}, \quad x'' = \frac{2a + b}{a - b}.$$

454. II. **Коэффиціенты a и b одновременно равны нулю.** Обращаясь къ формуламъ корней, находимъ, что при $a = b = 0$ оба корня принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$.

Чтобы раскрыть неопредѣленность, преобразуемъ формулы корней такимъ же точно образомъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ; найдемъ:

$$x' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Положивъ здѣсь $a = 0$ и $b = 0$, имѣемъ

$$x' = \frac{2c}{0} = \infty, \quad x'' = \frac{2c}{0} = \infty.$$

Итакъ, *при $a = b = 0$ оба корня безконечны.*

Обращаясь къ уравненію, даемъ ему видъ

$$\frac{1}{x}\left(b + \frac{c}{x}\right) = -a,$$

или, такъ какъ $a = b = 0$, видъ

$$\frac{c}{x^2} = 0.$$

Такъ какъ c конечно, то этому ур—нію можно удовлетворить единственнымъ способомъ, положивъ $x = \infty$.

Примѣръ. *Каковы корни уравненія*

$$(a - b)^2x^2 - (a^2 - ab - 2b^2)x + (2a^2 - 3ab + b^2) = 0$$

при $a = -b$?

Когда $a = -b$, коэффиціенты $(a+b)^2$ и $(a^2 - ab - 2b^2)$ при x^2 и x обращаются въ нули, между тѣмъ какъ свободный членъ въ $6b^2$; заключаемъ, что при $a = -b$ оба корня безконечны.

То же можно видѣть и изъ формулъ корней; рѣшая данныя ур—нія, имѣемъ

$$x' = \frac{a-b}{a+b};\quad x'' = \frac{2a-b}{a+b};$$

сдѣлавъ $a = -b$, имѣемъ

$$x' = \frac{-2b}{0} = \infty;\quad x'' = \frac{-3b}{0} = \infty.$$

455. III. **Всѣ три коэффиціента** a, b **и** c **равны нулю.** Изъ формулъ корней убѣдимся, что онѣ представляютъ дѣйствительную неопредѣленность.

Обращаясь къ уравненію, замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0,$$

и слѣдовательно удовлетворяется всякимъ значеніемъ x; это—тождество.

Вычисленіе корней уравненія $ax^2 + bx + c = o$, когда коэффиціентъ a весьма малъ.

456. Когда коэффиціентъ a весьма малъ, то изъ предыдущаго изслѣдованія (§ 452) видно, что одинъ изъ корней будетъ, по абсолютной величинѣ, весьма великъ, другой же близокъ къ $-\frac{c}{b}$. Общія формулы корней

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

въ данномъ случаѣ будутъ неудобны для вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, $b^2 - 4ac$ вообще не есть точный квадратъ, и слѣд. $\sqrt{b^2 - 4ac}$ придется вычислять приблизительно. Ошибку, сдѣланную при вычисленіи $\sqrt{b^2 - 4ac}$ нужно будетъ раздѣлить на $2a$ для нахожденія ошибки x' или x''; и если a весьма мало, напр. $=\frac{5}{100000}$, то $2a = \frac{1}{10000}$; а потому ошибка ε, сдѣланная при вычисленіи $\sqrt{b^2 - 4ac}$, поведетъ за собою погрѣшность, равную 10000ε въ величинахъ x' и x''. Такъ что, если бы мы пожелали вычислить корни уравненія съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, то должны бы были $\sqrt{b^2 - 4ac}$ найти съ точностью до $\frac{1}{10000} \times \frac{1}{10^n}$, т.-е. съ 4 лишними десятичными знаками.

Отсюда понятно, что сложность вычисленій будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ меньше a.

Несравненно легче, при маломъ a, вычислять корни особымъ способомъ, называемымъ *методомъ послѣдовательныхъ приближеній*. Этимъ способомъ достаточно вычислить одинъ изъ корней; въ самомъ дѣлѣ, сумма корней извѣстна и равна $-\frac{b}{a}$ (въ чемъ убѣдимся, сложивъ формулы x' и x''), и если будетъ вычисленъ корень x', то другой найдемъ, вычтя изъ суммы извѣстный корень: $x'' = -\frac{b}{a} - x'$.

Нужно разсмотрѣть два случая: корни одинаковаго знака, и корни разнаго знака. Если черезъ a, b и c означимъ абсолютныя числа, то уравненіе съ положительными корнями будетъ вида: $ax^2 - bx + c = 0$; съ отрицательными: $ax^2 + bx + c = 0$. Достаточно указать вычисленіе положительныхъ корней, т.-е. ур—нія $ax^2 - bx + c = 0$; ибо, если оба корня отрицательны, то перемѣнивъ у b знакъ $+$ на $-$, получимъ ур—ніе съ положительными корнями, вычисливъ которые и перемѣнивъ у нихъ знакъ, получимъ корни ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$.

457. *1-й случай.* **Знаки корней одинаковы.** Итакъ, разсмотримъ уравненіе съ положительными корнями, т.-е. вида

$$ax^2 - bx + c = 0, \ . \ . \ . \ (1)$$

гдѣ a, b и c—абсолютныя числа, и слѣд. знаки окончательные.

Меньшій корень этого уравненія есть

$$x' = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \ . \ . \ . \ (2).$$

Этотъ корень мы и вычислимъ.

Рѣшая ур. (1) относительно bx, находимъ

$$bx = c + ax^2,$$

откуда

$$x = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot x^2 \ . \ . \ . \ (3)$$

Такъ какъ a весьма мало, b величина конечная, x представляетъ въ этой формулѣ меньшій корень, имѣющій также конечную величину, то и $\frac{a}{b}x^2$ будетъ весьма мало. Поэтому, откинувъ членъ $\frac{a}{b}x^2$, мы сдѣлаемъ небольшую ошибку, и слѣд. первымъ приближеніемъ корня x' будемъ имѣть

$$x_1 = \frac{c}{b}.$$

Это приближеніе *меньше* настоящей величины x', ибо откинули положительный членъ $\frac{a}{b}x^2$.

Если теперь въ формулѣ (3) замѣнимъ во второй части x величиною $\frac{c}{b}$ меньшею чѣмъ x, то получимъ второе приближеніе

$$x_2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_1)^2 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

которое опять меньше настоящей величины x', но больше чѣмъ x_1 на $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2$.

Замѣнивъ снова въ ур. (3) во второй части x черезъ x_2, найдемъ третье приближеніе

$$x_3 = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2,$$

снова меньшее истинной величины x', ибо x_2 меньше x'. Но x_3 будетъ больше x_2; въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что $x_2 > x_1$; возвысивъ обѣ части послѣдняго неравенства въ квадратъ, помноживъ на $\frac{a}{b}$ и придавъ по $\frac{c}{b}$, получимъ

$$\frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} + \frac{a}{b}(x_1)^2$$

то-есть $x_3 > x_2$ и т. д.

Итакъ, послѣдовательныя приближенія идутъ все увеличиваясь, но всегда остаются меньше x', сл. они приближаются къ x'. Докажемъ теперь, что разница между x' и приближеніями стремится къ нулю, и сл. можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою.

Разность между x' и первымъ приближеніемъ x_1, т.-е. *погрѣшность* перваго приближенія мы выразимъ изъ уравненія (3), которое даетъ (замѣтивъ, что $\frac{c}{b} = x_1$):

$$x' - x_1 = \frac{a}{b}(x')^2.$$

Но x', на основаніи (2), равняется $\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$, и слѣд. x' меньше $\frac{2c}{b}$; написавъ неравенство

$$x' < \frac{2c}{b},$$

возвысивъ обѣ его части въ квадратъ и умноживъ на $\frac{a}{b}$, найдемъ

$$\frac{a}{b}(x')^2 < \frac{a}{b} \times \frac{4c^2}{b^2};$$

замѣнивъ первую часть равною ей величиною $x' - x_1$, которую обозначимъ черезъ ε_1, имѣемъ:

$$\varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b}.$$

Эта формула даетъ предѣлъ погрѣшности 1-го приближенія.

Вообще, погрѣшность n-го приближенія

$$\varepsilon_n = x' - x_n = \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b}x'^2\right) - \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot x^2{}_{n-1}\right) = \frac{a}{b}(x'^2 - x^2{}_{n-1})$$

$$= \frac{a}{b}(x' + x_{n-1})(x' - x_{n-1}).$$

Но

$$x' - x_{n-1} = \varepsilon_{n-1}; \quad \text{а} \quad x' + x_{n-1} < 2x'$$

ибо $x_{n-1} < x'$; но $x' < \frac{2c}{b}$, откуда $2x' < \frac{4c}{b}$, а потому и подавно

$$x' - x_{n-1} < \frac{4c}{b}.$$

Слѣдовательно

$$\varepsilon_n < \frac{4ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{n-1}$$

Дѣлая въ этой формулѣ послѣдовательно $n = 2, 3, 4, \ldots, n$ и приписавъ формулу для 1-го приближенія, имѣемъ

$$\begin{cases} \varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^2} \times \frac{c}{b} \\ \varepsilon_2 < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_n < \frac{4ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1} \end{cases}$$

Перемножая почленно эти неравенства, сокращая обѣ части на общаго множителя

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{n-1},$$

получимъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n \cdot \frac{c}{b}.$$

Но корни дѣйствительные, слѣд.

$$b^2 - 4ac > 0.$$

откуда

$$\frac{4ac}{b^2} < 1.$$

Если количество, меньшее 1, возвышать въ возрастающія степени, то степени эти приближаются къ нулю, если же $\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$ приближается къ нулю, то и произведеніе его на конечную величину $\frac{c}{b}$, также стремится къ 0.

Итакъ, *количеству n всегда можно дать такую величину, чтобы ε_n было какъ угодно мало.*

Итакъ, указаннымъ способомъ всегда можно найти приближенную величину [illegible] корня съ какою угодно точностью; причемъ, останавливаясь на приближеніи x_n, дѣлаемъ ошибку меньшую

$$\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{b}.$$

Этотъ способъ приложимъ всякій разъ, когда $\frac{4ac}{b^2} < 1$, т.-е. когда корни дѣйствительные; но практически пригоденъ тогда, когда $\frac{4ac}{b^2}$ весьма малая дробь сравнительно съ 1, ибо только въ этомъ случаѣ $x_1, x_2, \ldots x_n$ достаточно быстро приближаются къ x'.

Примѣръ. Дано ур.

$$3x^2 - 7640x + 400 = 0.$$

Имѣемъ:

$$a = 3;\quad b = 7640;\quad c = 400.$$

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 400}{58369600} = \frac{4800}{58369600} = \frac{48}{583696} \ldots (1)$$

если бы имѣли дробь $\frac{48}{480000} \ldots (1')$, то по сокращеніи она дала бы $\frac{1}{10000}$; но (1) имѣетъ такого же числителя какъ (1'), но большаго знаменателя, слѣд. (1) или

$$\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}.$$

Эта дробь весьма мала сравнительно съ 1, слѣд. наша метода приложима.

Первое приближеніе для меньшаго корня есть

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{400}{7640} = \frac{40}{764};$$

его ошибка

$$\varepsilon_1 < \frac{4ac}{b^4} \times \frac{c}{b};$$

но $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$; а $\frac{c}{b}$, по обращеніи въ десятичную дробь, даетъ

$$\frac{c}{b} = 0{,}05235602 \ldots$$

слѣд.

$$\frac{c}{b} < 0{,}06.$$

Поэтому

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{10000} \times \frac{6}{100}, \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 < \frac{6}{1000000}$$

сл. ε_1 навѣрное меньше $\frac{1}{100000}$.

Слѣд., взявъ для x' число 0,05235, получимъ меньшій корень съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{100000}$; итакъ

$$x_1 = 0{,}05235.$$

Вычислимъ еще второе приближеніе; оно будетъ

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_1)^2.$$

Ошибка этого приближенія $\varepsilon_2 = \frac{4ac}{b^2} \cdot \varepsilon_1$; но мы видѣли, что $\frac{4ac}{b^2} < \frac{1}{10000}$, а $\varepsilon_1 < \frac{6}{1000000}$; значитъ

$$\varepsilon_2 < \frac{6}{10000000000}.$$

Вычисляя $\frac{c}{b}$ и $\frac{a}{b}\left(x_1\right)^2$ съ 10-ю дес. знаками, имѣемъ

$$\frac{c}{b} = 0{,}0523560209 \ldots$$

$$\frac{a}{b}\left(x_1\right)^2 = \underline{0{,}0000010763 \ldots}$$

$$0{,}0523570972.$$

Удерживая 9 десятичныхъ мѣстъ, имѣемъ:

$$x_2 = 0{,}052357097$$

съ ошибкою $< \frac{1}{10^9}$.

Чтобы вычислить другой корень, нужно изъ суммы корней, равной $\frac{7640}{3}$ вычесть найденный; взявъ въ $\frac{7640}{3}$ девять десятичныхъ мѣстъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 2546{,}666666666 \\ -\quad 0{,}052357097 \\ \hline 2546{,}614309569, \end{array} \text{ съ точн. до } \frac{1}{10^9}.$$

458. *2-й случай.* Знаки корней различны.

Если знаки корней различны, что будетъ, когда c отрицательно, то, назвавъ абсолютныя величины коэффиціентовъ черезъ a, b и c, уравненіе будетъ одного изъ слѣдующихъ видовъ:

$$ax^2 + bx - c = 0, \quad ax^2 - bx - c = 0.$$

Въ первомъ уравненіи меньшій корень положителенъ, во второмъ отрицателенъ; но если во второе вм. x подставимъ $-x$, то превратимъ его въ первый видъ, т.-е. меньшій корень сдѣлаемъ положительнымъ.

Поэтому разсмотримъ, какъ найти положит. корень уравненія

$$ax^2 + bx - c = 0$$

по способу послѣдовательныхъ приближеній.

Опредѣляя bx, находимъ

$$bx = c - ax^2,$$

а отсюда

$$x = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^2.$$

Послѣдовательныя приближенія будутъ:

$$x_1 = \frac{c}{b}; \quad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_1)^2; \quad x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2; \quad x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_3)^2;$$

. . . .

и вообще

$$x_n = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot (x_{n-1})^2.$$

Искомый меньшій корень выражается формулою

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2 \quad . \quad . \quad . \ (1)$$

Очевидно, что

$$x_1 > x' \quad . \quad . \quad . \ (2)$$

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ и затѣмъ умножая на $\frac{a}{b}$, найдемъ

$$\frac{a}{b}(x_1)^2 > \frac{a}{b}(x')^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства $\frac{c}{b} = \frac{c}{b}$, получ.

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1)^2 < \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2;$$

первая часть есть x_2, а вторая есть x', слѣд.

$$x_2 < x'.$$

Возвышая обѣ части этого неравенства въ квадратъ, затѣмъ умножая на $\frac{a}{b}$, имѣемъ

$$\frac{a}{b}(x_2)^2 < \frac{a}{b} \cdot (x\ )^2;$$

вычитая это неравенство изъ равенства $\frac{c}{b} - \frac{c}{b}$, имѣемъ:

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x\ )^2;$$

первая часть есть x_3, а вторая $= x'$, слѣд.

$$x_3 > x';$$

и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, убѣдимся, что всѣ приближенія нечетнаго порядка больше настоящей величины x', а четнаго — меньше x.

Кромѣ того, если выпишемъ всѣ четныя, затѣмъ всѣ нечетныя приближенія, получимъ два ряда:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{c}{b} & x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1)^2 \\ x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_2)^2 & x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_3)^2 \\ x_5 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_4)^2 & x_6 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_5)^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Разсматривая первую пару нечетныхъ приближеній, замѣчаемъ, что, очевидно:

$$x_3 < x_1.$$

Обращаясь затѣмъ къ первой парѣ четныхъ приближеній, и взявъ ихъ разность, имѣемъ

$$x_4 - x_2 = \frac{a}{b}(x_1{}^2 - x_3{}^2); \quad \text{но} \quad x_3 < x_1, \text{ слѣд.}$$

$$x_4 > x_2.$$

Переходя ко второй парѣ нечетныхъ приближеній и взявъ ихъ разность, находимъ:

$$x_3 - x_5 = \frac{a}{b}(x_4{}^2 - x_2{}^2); \quad \text{но} \quad x_4 > x_2, \quad \text{слѣд.}$$

$$x_5 < x_3.$$

Взявъ разность второй пары четныхъ приближеній:

$$x_6 - x_4 = \frac{a}{b}(x_3{}^2 - x_5{}^2); \quad \text{но} \quad x_5 < x_3, \text{ слѣд.}$$

$$x_6 > x_4; \text{ и т. д.}$$

Заключаемъ, что приближенія нечетнаго порядка, оставаясь всегда больше x', идутъ постепенно уменьшаясь и слѣд. приближаются къ x'; приближенія же четнаго порядка, всегда оставаясь меньше x', идутъ увеличиваясь, и слѣд. также приближаются къ x'.

Докажемъ, что разность между тѣми и другими приближеніями и x' стремится къ нулю, и слѣд. м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

Возьмемъ приближеніе нечетнаго порядка x_{2p+1}, которое больше x', и назовемъ погрѣшность этого приближенія, т.-е. разность между нимъ и x', черезъ ε_{2p+1}; имѣемъ:

$$\varepsilon_{2p+1} = x_{2p+1} - x' = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_{2p}^{\,2}\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2\right)$$

$$= \frac{a}{b}\left(x'^2 - x_{2p}^{\,2}\right) = \frac{a}{b}(x' + x_{2p})(x' - x_{2p}) = \frac{a}{b}(x' + x_{2p}) \,.\, \varepsilon_{2p}$$

Но, по (2), $x' < x_1$ или $\frac{c}{b}$; x_{2p}, какъ приближеніе четнаго порядка, меньше x', а сл. и подавно $< x_1$ или $\frac{c}{b}$; итакъ

$$x' < \frac{c}{b}$$

$$x_{2p} < \frac{c}{b}$$ складывая, имѣемъ

$$x' + x_{2p} < \frac{2c}{b}$$

слѣд.

$$\varepsilon_{2p-1} < \frac{2ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{2p}.$$

Кромѣ того

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{b} \cdot x'^2, \quad \text{но} \quad x' < \frac{c}{b}, \quad \text{сл.} \quad x'^2 < \frac{c^2}{b^2},$$

поэтому

$$\varepsilon_1 < \frac{a}{b} \times \frac{c^2}{b^2}$$

или множа и дѣля вторую часть на 2:

$$\varepsilon_1 < \frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b}$$

Выразимъ теперь предѣлъ погрѣшности приближенія четнаго порядка, напримѣръ x_{2p}. Имѣемъ

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2p} &= x' - x_{2p} = \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2\right) - \left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x^2_{2p-1}\right)\\ &= \frac{a}{b}\left(x^2_{2p-1} - x'^2\right) = \frac{a}{b}(x_{2p-1} + x')(x_{2p-1} - x')\\ &= \frac{a}{b}(x_{2p-1} + x') \cdot \varepsilon_{2p-1}.\end{aligned}$$

Но x_{2p-1} и x' меньше x_1 или $\frac{c}{b}$, сл.

$$\varepsilon_{2p} < \frac{2ac}{b^2} \cdot \varepsilon_{2p-1}$$

Итакъ, предѣлъ погрѣшности четнаго и нечетнаго порядка выражается одинаково: произведеніемъ $\frac{2ac}{b^2}$ на погрѣшность предшествующаго приближенія. Слѣд., будетъ ли n четное или нечетное, всегда

$$\varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1}.$$

Полагая въ этой формулѣ $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots, n$, получимъ формулы погрѣшностей 2-го, 3-го, . . . приближеній; присоединивъ сюда формулу погрѣшности 1-го приближенія, имѣемъ:

$$\varepsilon_1 < \frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b}$$

$$\varepsilon_2 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_2$$

$$\begin{matrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & & . & & . \end{matrix}$$

$$\varepsilon_n < \frac{2ac}{b^2} \times \varepsilon_{n-1};$$

Перемножая и сокращая общихъ множителей, найдемъ

$$\varepsilon_n < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}.$$

Отсюда видно, что если $\frac{2ac}{b^2}$ будетъ < 1, или, что все равно, если

$$a < \frac{b^2}{2c},$$

то всегда можно взять n достаточно большимъ, чтобы сдѣлать $\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}$ меньше данной величины; и сл. чтб. погрѣшность ε_n, и подавно, была меньше той же величины.

Но и въ этомъ случаѣ метода удобна только тогда, когда $\frac{2ac}{b^2}$ будетъ *значительно* меньше 1, ибо только при такомъ условіи x_1, x_2, x_3, . . . будутъ быстро приближаться къ искомой величинѣ. Останавливаясь на приближеніи нечетнаго порядка, получимъ величину ошибочную по избытку; останавливаясь на приближеніи четнаго порядка, имѣемъ величину съ ошибкою по недостатку; въ обоихъ случаяхъ высшій предѣлъ сдѣланной погрѣшности узнаемъ, вычисливъ

$$\left(\frac{2ac}{b^2}\right)^n \times \frac{c}{2b}.$$

Примѣръ. $5x^2 + 140x - 7 = 0$. Здѣсь

$$a = 5; \quad b = 140; \quad c = 7;$$

$\frac{2ac}{b^2} = \frac{70}{140^2} = \frac{1}{280}$; это число значительно < 1, поэтому метода приложима. Первое приближеніе

$$x_1 = \frac{c}{b} = \frac{7}{140} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Погрѣшность этого приближенія, ε_1, будетъ меньше $\frac{2ac}{b^2} \times \frac{c}{2b} = \frac{1}{280} \times \frac{1}{40}$ $= \frac{1}{11200}$, а сл. и подавно, $< \frac{1}{10000}$.

Второе приближеніе

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x_1^2 = 0,05 - \frac{1}{28} \times 0,0025 = 0,0499107.$$

Ошибка $\varepsilon_2 < \left(\frac{2ac}{b^2}\right)^2 \times \frac{c}{2b}$, или $< \frac{1}{(280)^2} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{3136000}$, а потому и подавно меньше $\frac{1}{3} \times \frac{1}{1000000}$.

Значитъ, положительный корень, съ ошибкою меньшею одной полу-милліонной, равенъ

$$0,049911.$$

Сумма корней $= -28$, сл. отриц. корень, съ тою же точностью, равенъ

$$-27,950089.$$

ГЛАВА XXXI.

Связь между коэффиціентами и корнями квадратнаго уравненія.—Приложенія.—Построеніе корней квадратнаго уравненія.

459. Теорема. *Каковы бы ни были корни уравненія*

$$ax^2 + bx + c = 0:$$

1) ихъ сумма равна взятому съ обратнымъ знакомъ частному отъ раздѣленія второго коэффиціента на первый, т.-е.

$$-\frac{b}{a};$$

2) а произведеніе равно частному отъ раздѣленія третьяго коэффиціента на первый, т.-е.

$$\frac{c}{a}.$$

Повѣрка. Мы знаемъ, что во всѣхъ случаяхъ корни даннаго уравненія выражаются формулами

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

складывая которыя, находимъ

$$x' + x'' = -\frac{b}{a};$$

а перемножая, находимъ

$$x' \,.\, x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\,(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2};$$

замѣчая, что числитель представляетъ произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность, и слѣд. равенъ разности ихъ квадратовъ, имѣемъ:

$$x' \,.\, x'' = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Первое доказательство. Такъ какъ корни x' и x'', при подстановкѣ въ уравненіе, обращаютъ его въ тождество, то имѣемъ два тождества

$$ax'^2+bx'+c=0, \quad ax''^2+bx''+c=0.$$

Принимая за неизвѣстныя—коэффиціенты a, b и c, видимъ, что они удовлетворяютъ двумъ ур—мъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи неопредѣленна. Но если оба равенства раздѣлимъ на a:

$$x'^2+\frac{b}{a}x'+\frac{c}{a}=0, \quad x''^2+\frac{b}{a}x''+\frac{c}{a}=0,$$

то, принимая за неизвѣстныя—отношенія $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, находимъ, что эти отношенія должны удовлетворять двумъ уравненіямъ, и потому задача объ ихъ нахожденіи опредѣленна. Эти два ур—нія и дадутъ намъ величины $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ въ функціи корней. Для исключенія $\frac{c}{a}$ вычитаемъ 2-е ур—ніе изъ 1-го и находимъ

$$(x'^2-x''^2)+\frac{b}{a}(x'-x'')=0.$$

Положимъ, что $x' \lessgtr x''$; въ такомъ случаѣ позволительно сократить ур—ніе на количество $x'-x''$ (какъ неравное нулю), и получится

$$x'+x''+\frac{b}{a}=0, \quad \text{откуда} \quad x'+x''=-\frac{b}{a}.$$

Внеся вмѣсто $\frac{b}{a}$ равную ему величину $-(x'+x'')$ въ первое уравненіе, найдемъ

$$x'^2-(x'+x'')x'+\frac{c}{a}=0, \quad \text{или} \quad -x'x''+\frac{c}{a}=0,$$

откуда

$$x'x''=\frac{c}{a}.$$

Теорема доказана; но опредѣленіе $\frac{b}{a}$ сдѣлано въ предположеніи, что корни неравны. Остается доказать, что теорема справедлива и въ случаѣ равныхъ корней. Мы знаемъ, что если корни равны, то каждый изъ нихъ $=-\frac{b}{2a}$, слѣд., ихъ сумма $=-\frac{b}{a}$; а отсюда, какъ и выше, найдемъ, что $x'x''=\frac{c}{a}$.

Второе доказательство. Такъ какъ x' и x'' суть корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то триномъ ax^2+bx+c обращается въ нуль при подстановкѣ въ него x' и x'' вмѣсто x, и слѣд. дѣлится какъ на $x-x'$, такъ и на $x-x''$; слѣд., если x' не равно x'', то этотъ триномъ, на основ. теоремы § 65, дѣлится и на произведеніе $(x-x')(x-x'')$, а какъ дѣлитель—одинаковой степени съ дѣлимымъ, то частное будетъ нулевой степени относительно x, и потому приводится къ одному члену, именно къ частному отъ раздѣленія перваго члена, ax^2, дѣлимаго на первый членъ x^2 дѣлителя, что даетъ a. Итакъ

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x''),$$

или, раскрывъ вторую часть и расположивъ по степенямъ буквы x, находимъ тождество

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x'';$$

а отнявъ отъ обѣихъ частей по ax^2,

$$bx+c=-a(x'+x'')x+ax'x''.$$

Отсюда, по теоремѣ § 71, имѣемъ

$$b=-a(x'+x'') \quad \text{и} \quad c=ax'x'';$$

выражая изъ 1-го равенства $x'+x''$, а изъ 2-го $x'x''$, находимъ:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}; \quad x'x''=\frac{c}{a}.$$

И это доказательство предполагаетъ, что $x' \lessgtr x''$. Но нужно замѣтить, что если найденныя соотношенія вѣрны, когда корни различны, то они приложимы и тогда, когда корни разнятся между собою какъ угодно мало, а потому справедливы и для равныхъ корней.

460. *Примѣчаніе.* Если уравненіе имѣетъ видъ

$$x^2+px+q=0,$$

то, чтобы перейти къ нему отъ уравненія $ax^2+bx+c=0$, надо положить: $a=1$, $b=p$, $c=q$.

Тогда формулы соотношеній примутъ видъ:

$$x'x''=\frac{q}{1}=q; \quad x'+x''=-\frac{p}{1}=-p;$$

слѣд., *сумма корней уравненія $x^2+px+q=0$ равна коэффиціенту при первой степени неизвѣстнаго, взятому съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно извѣстному члену.*

461. Слѣдствія. I. Вычислить разность корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, не рѣшая уравненія.

Обозначивъ разность корней буквою z, можемъ выразить z^2 по суммѣ и произведенію корней; въ самомъ дѣлѣ:

$$z^2 = (x' - x'')^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = x'^2 + x''^2 + 2x'x'' - 4x'x'' =$$

$$(x' + x'')^2 - 4x'x'' = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

откуда

$$z = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

Тотъ же результатъ нашли бы и прямымъ вычитаніемъ корней.

II. Когда извѣстенъ одинъ изъ корней квадратнаго уравненія, то другой можно найти, не рѣшая уравненія, а: 1) раздѣливъ произведеніе корней $\frac{c}{a}$ на извѣстный корень, или: 2) вычтя извѣстный корень изъ суммы корней, т.-е. изъ $-\frac{b}{a}$.

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}$. Прямо видно, что уравненіе имѣетъ корень $x = a$, ибо при $x = a$ обѣ части дѣлаются тождественными.

Для нахожденія второго корня приводимъ уравненіе къ цѣлому виду:

$$(2a + b)x^2 + (b^2 - 2a^2)x - ab(a + b) = 0;$$

и раздѣливъ произведеніе корней $-\frac{ab(a+b)}{2a+b}$ на извѣстный корень a, найдемъ другой корень

$$x'' = -\frac{b(a+b)}{2a+b}.$$

Можно рѣшить это ур—ніе и другимъ пріемомъ; напишемъ его въ видѣ

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{x+b} - \frac{1}{a+b} = 0, \quad \text{или} \quad (a - x)[(x + b)(a + b) + ax] = 0.$$

Приравнивая нулю первый множитель, находимъ одинъ корень $x' = a$; приравнивая нулю второй множитель, получаемъ ур—ніе первой степени

$$(x + b)(a + b) + ax = 0,$$

откуда и найдемъ второй корень.

III. *Когда коэффиціенты уравненія соизмѣримы, то дѣйствительные корни или оба соизмѣримы, или оба несоизмѣримы*, потому что ихъ сумма, напр., соизмѣрима; *и когда они несоизмѣримы, то сопряженны.*

IV. — *Когда коэффиціенты ур—нія дѣйствительны, то или оба корня дѣйствительны, или оба мнимы*, ибо ихъ сумма дѣйствительна, *и когда они мнимы, то сопряженны.*

Переходимъ къ изученію приложеній теоремы § 459.

462. *Приложенiе I.* **Изслѣдованiе, à priori, корней квадратнаго уравненiя.**

Опредѣленiе.—Изслѣдовать à priori квадратное уравненiе значитъ: не рѣшая его, опредѣлить, будутъ ли корни его дѣйствительные или мнимые; когда они дѣйствительны, узнать равные они, или неравные; въ случаѣ ихъ равенства, указать ихъ общую величину, въ случаѣ же неравенства указать—одинаковаго они знака, или имѣютъ знаки противоположные; если имѣютъ общiй знакъ, то указать—какой именно; если же знаки корней различны, то указать знакъ корня, имѣющаго большую абсолютную величину.

I. Если окажется, что

$$b^2-4ac<0,$$

то корни уравненiя будутъ *мнимые сопряженные.*

II. Если

$$b^2-4ac=0,$$

то мы знаемъ, что корни уравненiя *дѣйствительные равные,* и общая величина ихъ есть

$$-\frac{b}{2a},$$

откуда видно, что оба корня *положительны,* когда $\frac{b}{a}<0$, оба *отрицательны,* когда $\frac{b}{a}>0$, и оба равны *нулю,* когда $\frac{b}{a}=0$.

III. Наконецъ, если окажется, что

$$b^2-4ac>0,$$

то заключаемъ, что уравненiе имѣетъ корни *дѣйствительные неравные.* При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что для опредѣленiя знака разности b^2-4ac не всегда необходимо вычислять эту разность, а именно *если $ac<0$, т.-е. a и c имѣютъ знаки противоположные, то разность b^2-4ac необходимо положительна.* Въ самомъ дѣлѣ, если $ac<0$, то можно положить $4ac=-\alpha^2$, гдѣ $-\alpha^2$ количество существенно-отрицательное, и слѣд. $b^2-4ac=b^2-(-\alpha^2)=b^2+\alpha^2$, а сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ существенно положительна. Значитъ, *при $ac<0$ корни уравненiя безусловно дѣйствительны.*

Когда уравненiе имѣетъ корни дѣйствительные и неравные, то:

1) Если $\frac{c}{a}>0$, т.-е. произведенiе корней *положительно,* оба корня имѣютъ *одинаковые знаки.* Но если знаки корней одинаковы, то общiй знакъ будетъ такой, какъ у ихъ суммы, которая равна $-\frac{b}{a}$.

Отсюда:

Если $\frac{b}{a}>0$, то $-\frac{b}{a}$ будетъ количество *отрицательное,* и слѣд. оба корня *отрицательны.*

Если $\frac{b}{a}<0$, то $-\frac{b}{a}$ *положительно,* и потому оба корня *положительны.*

Предположенiе $\frac{b}{a}=0$ невозможно, ибо изъ него слѣдовало бы, что корни равны и ***противоположны по знаку***, что противно предположенію $\frac{c}{a} > 0$, которое требуетъ, чтобы знакъ корней былъ одинаковъ.

2) Если $\frac{c}{a} < 0$, т.-е. произведеніе корней отрицательно, то знаки корней противоположны. Но въ такомъ случаѣ сумма ихъ имѣетъ такой знакъ, какой у корня съ большею абсолютною величиной. Отсюда:

Если $\frac{b}{a} > 0$, то сумма корней $-\frac{b}{a}$ будетъ *отрицательна*, и слѣд. большій, по абсолютной величинѣ, корень *отрицателенъ*.

Если $\frac{b}{a} < 0$, и слѣд. $-\frac{b}{a} > 0$, то большій, по абсолютному значенію, корень *положителенъ*.

Наконецъ, если $\frac{b}{a} = 0$, то сумма корней $=$ *нулю*, сл. корни равны по величинѣ и противоположны по знаку.

3) Если $\frac{c}{a} = 0$, то одинъ корень $=$ *нулю*. Что касается другого, то:

Когда $\frac{b}{a} > 0$, сумма корней *отрицательна*, а, слѣд., другой корень *отрицателенъ*.

Когда $\frac{b}{a} < 0$, сумма *положительна*, и другой корень *положителенъ*.

Гипотеза $\frac{b}{a} = 0$ не имѣетъ мѣста, ибо въ этомъ случаѣ выходило бы $b = 0$, $c = 0$, а слѣдовательно вышло бы и $b^2 - 4ac = 0$, что противорѣчитъ условію $b^2 - 4ac > 0$.

Изслѣдованіе можно резюмировать такъ:

I. $b^2 - 4ac < 0$, корни уравненія мнимые сопряженные.

Первую часть уравненія можно представить въ формѣ суммы двухъ квадратовъ.

II. $b^2 - 4ac = 0$. Корни дѣйствительные равные.
- $\frac{b}{a} < 0$, корни положительны.
- $\frac{b}{a} > 0$, корни отрицательны.
- $\frac{b}{a} = 0$, корни равные нулю.

Первую часть уравненія можно представить въ формѣ полнаго квадрата.

III. $b^2 - 4ac > 0$. Корни дѣйствительные неравные.
- $\frac{c}{a} > 0$ . . . Знаки корней одинаковы
  - $\frac{b}{a} < 0$, оба корня положительны.
  - $\frac{b}{a} > 0$, оба корня отрицательны.
- $\frac{c}{a} < 0$ . . . знаки корней различны
  - $\frac{b}{a} > 0$, корень съ большою абсолютною величиною отрицателенъ.
  - $\frac{b}{a} < 0$, большій по абсолютн. величинѣ корень положителенъ.
  - $\frac{b}{a} = 0$, корни равны и противоположны по знаку.
- $\frac{c}{a} = 0$ . . . одинъ корень $=$ нулю.
  - $\frac{b}{a} < 0$, другой корень положителенъ.
  - $\frac{b}{a} > 0$, другой корень отрицателенъ.

Первую часть уравненія можно представить въ формѣ разности двухъ квадратовъ.

Примѣры. I. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$7x^2 + 3x + 5 = 0;$$

въ данномъ случаѣ $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 7 \times 5 = -131$, т.-е. количеству отрицательному, слѣд. корни—*мнимые*.

II. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$9x^2 - 12x + 4 = 0.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x четный, то составляемъ разность $b'^2 - ac$; имѣемъ $b'^2 - ac = 6^2 - 9 \cdot 4 = 0$, а потому корни ур—нія *дѣйствительные равные*. Общая величина ихъ $= -\frac{b}{a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

III. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$b'^2 - ac = 4^2 - 3 \times 4 = +4$, слѣд. корни *дѣйствительные неравные*. Произведеніе корней $= +\frac{4}{3}$, т.-е. положительно, слѣд. знаки корней одинаковы. Сумма корней $= +\frac{8}{3}$, т.-е. > 0, слѣд. оба корня положительны.

IV. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$8x^2 + 57x + 10 = 0;$$

$b^2 - 4ac = 57^2 - 4 \times 8 \times 10 = +2929$, количеству положительному, потому корни—*дѣйствительные неравные*. Произведеніе ихъ, равное $+\frac{10}{8}$, положительно, слѣд. знаки корней одинаковы. Сумма корней, равная $-\frac{57}{8}$, отрицательна, слѣд. оба корня отрицательны.

V. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$3x^2 - 8x - 3 = 0;$$

a и c имѣютъ знаки противоположные, слѣд. корни *дѣйствительные неравные*. Произведеніе ихъ, равное -1, отрицательно, потому знаки корней различны. Сумма корней, равная $+\frac{8}{3}$, положительна, слѣд. большій по абсолютной величинѣ корень положителенъ.

VI. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$3x^2 + 8x - 3 = 0;$$

a и c — разнаго знака, сл. опять корни ур—нія *дѣйствительные, неравные* и разнаго знака. Сумма ихъ, равная $-\frac{8}{3}$, отрицательна, слѣд. большій по абсолютной величинѣ корень отрицателенъ.

463. *Приложеніе II.* Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное уравненіе, корнями котораго были бы количества α и β. Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0;$$

нужно опредѣлить коэффиціенты p и q; соотношенія между коэффиціентами и корнями даютъ:

$$p=-(\alpha+\beta),\quad q=\alpha\,.\,\beta;$$

искомое ур—ніе такимъ образомъ есть

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

Примѣры. I. *Составить ур—ніе, котораго корни были бы:* $\frac{2}{5}$ и $-\frac{3}{4}$.

Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0,$$

причемъ должно быть:

$$p=-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{20},\quad q=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{6}{20};$$

слѣд. искомое ур—ніе будетъ:

$$x^2+\frac{7}{20}x-\frac{6}{20}=0,\quad \text{или}\quad 20x^2+7x-6=0.$$

II. *Составить ур—ніе, корнями котораго были бы* $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a-b}$;

Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0,$$

гдѣ $p=-\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)=-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2};\quad q=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{ab}{a^2-b^2};$

слѣд. ур—ніе будетъ

$$x^2-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x+\frac{ab}{a^2-b^2}=0,\ \text{или}\ (a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$$

III. *Составить квадратное уравненіе, съ соизмѣримыми коэффиціентами, которое имѣло бы корень* $5+3\sqrt{7}$.

Искомое ур—ніе должно быть вида

$$x^2+px+q=0;$$

такъ какъ, по условію, p и q должны быть *соизмѣримы*, и мы доказали, что ур—ніе съ соизмѣримыми коэффиціентами, имѣющее корень $5-3\sqrt{7}$, имѣетъ другой корень сопряженный съ первымъ; слѣд. второй корень будетъ $5+3\sqrt{7}$; поэтому

$$p=-(5-3\sqrt{7}+5+3\sqrt{7})=-10;$$
$$q=(5-3\sqrt{7})(5+3\sqrt{7})=-38;$$

слѣд. искомое уравненіе есть

$$x^2-10x-38=0.$$

Примѣчаніе. — Задача эта опредѣленна только тогда, когда существуетъ условіе, чтобы коэффиціенты искомаго уравненія были соизмѣримы; если этого требованія нѣтъ, то задача неопредѣленна, ибо существуетъ безчисленное множество квадратныхъ уравненій, имѣющихъ данный корень: такъ, уравненія, имѣющія корень $5-3\sqrt{7}$ (называя другой корень буквою λ), суть

$$x^2-(\lambda+5-3\sqrt{7})x+\lambda(5-3\sqrt{7})=0,$$

гдѣ λ—произвольное количество.

Въ § 449 мы видѣли, что условіе, чтобы квадратное ур—ніе *съ соизмѣримыми коэффиціентами* удовлетворялось несоизмѣримымъ значеніемъ $a+\sqrt{3}$ неизвѣстнаго, выражалось двумя соотношеніями между коэффиціентами. Взявъ эти соотношенія, мы имѣли бы два ур—нія, изъ которыхъ могли бы получить уже найденныя значенія для p и q.

IV. *Составить квадратное ур—ніе, съ дѣйствительными коэффиціентами, имѣющее корень* $2+3i$.

Искомое ур—ніе имѣетъ видъ

$$x^2+px+q=0;$$

для опредѣленія p и q замѣчаемъ, что ур. *съ дѣйствительными коэффиціентами*, имѣющее корень $2+3i$, имѣетъ другимъ корнемъ мнимое сопряженное выраженіе $2-3i$. Отсюда

$$p=-(2+3i+2-3i)=-4,\quad q=(2+3i)(2-3i)=13;$$

и искомое ур—ніе будетъ $x^2-4x+13=0$.

Примѣчаніе. Задача эта опредѣленна потому только, что на коэффиціенты наложено ограниченіе, чтобы они были *дѣйствительны*. Если этого ограниченія нѣтъ, задача неопредѣленна: называя буквою λ совершенно произвольное количество, дѣйствительное или мнимое, получимъ уравненіе

$$x^2-(\lambda+2+3i)x+\lambda(2+3i)=0$$

необходимо имѣющее одинъ изъ корней, равный $2+3i$.

Если бы мы прямо выразили, что $2+3i$ удовлетворяетъ ур—нію $x^2+px+q=0$, то (см. § 451) въ случаѣ дѣйствительныхъ p и q нашли бы два ур—нія для опредѣленія p и q, именно:

$$4-9+q+2p=0,\quad 12+3p=0,$$

откуда нашли бы $p=-4$, $q=13$.

464. *Приложеніе III.* **Преобразованіе корней квадратнаго уравненія.**

Задача I. *Дано квадратное уравненіе $ax^2+bx+c=0$; составить другое уравненіе, котораго корни отличались бы отъ корней даннаго только знаками.*

Искомое уравненіе будетъ вида

$$x^2+px+q=0,$$

если корни даннаго ур—нія обозначимъ буквами x' и x'', то корни новаго должны равняться $-x'$ и $-x''$: подъ этимъ условіемъ и нужно опредѣлить p и q. Итакъ

$$p=-(-x'-x'')=x'+x''=-\frac{b}{a};\quad q=(-x')\cdot(-x'')=x'x''=\frac{c}{a}.$$

Слѣд. искомое уравненіе будетъ

$$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\quad\text{или}\quad ax^2-bx+c=0.$$

Легко видѣть, что *мы его получимъ прямо изъ даннаго, подставивъ въ послѣднее $-x$ вмѣсто x.*

Задача II. *Дано квадратное ур—ніе $ax^2+bx+c=0$; составить другое ур—ніе, корни котораго были бы обратны корнямъ даннаго.*

Пусть корни даннаго уравненія будутъ x' и x''. Мы хотимъ составить уравненіе $x^2+px+q=0$, корнями котораго были бы $\frac{1}{x'}$ и $\frac{1}{x''}$; слѣдовательно

$$p=-\left(\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}\right)=-\frac{x'+x''}{x'x''}=-\left(-\frac{b}{a}:\frac{c}{a}\right)=\frac{b}{c};$$

$$q=\frac{1}{x'}\cdot\frac{1}{x''}=\frac{1}{x'x''}=1:\frac{c}{a}=\frac{a}{c}.$$

Такимъ образомъ, искомое ур—ніе будетъ

$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0,\quad\text{или}\quad cx^2+bx+a=0.$$

Этотъ же результатъ мы найдемъ, если въ данное ур—ніе подставимъ $\frac{1}{x}$ вмѣсто x; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c=0,\quad\text{или}\quad cx^2+bx+a=0.$$

Итакъ: *уравненіе съ обратными величинами корней выводится изъ даннаго замѣною x обратнымъ ему количествомъ* $\frac{1}{x}$.

Задача III. *По данному уравненію* $ax^2+bx+c=0$ *составить другое, корни котораго равнялись бы корнямъ даннаго, сложеннымъ съ даннымъ количествомъ* λ.

Пусть корни даннаго уравненія будутъ x' и x''; требуется составить уравненіе $x^2+px+q=0$, корни котораго были бы $x'+\lambda$ и $x''+\lambda$. Слѣдовательно

$$p=-(x'+x''+2\lambda)=-\left(-\frac{b}{a}+2\lambda\right)=\frac{b}{a}-2\lambda;$$

$$q=(x'+\lambda)(x''+\lambda)=x'x''+(x'+x'')\lambda+\lambda^2=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\lambda+\lambda^2.$$

Требуемое уравненіе есть, слѣдовательно,

$$x^2+\left(\frac{b}{a}-2\lambda\right)x+\left(\lambda^2-\frac{b}{a}\lambda+\frac{c}{a}\right)=0,$$

или

$$ax^2+(b-2a\lambda)x+(a\lambda^2-b\lambda+c)=0.$$

Этотъ результатъ мы нашли бы, если бы въ данное ур—ніе вмѣсто x подставили $x-\lambda$; въ самомъ дѣлѣ, подстановка эта даетъ

$$a(x-\lambda)^2+b(x-\lambda)+c=0,$$

или, раскрывая скобки и приводя члены въ порядокъ,

$$ax^2+(b-2a\lambda)x+(a\lambda^2-b\lambda+c)=0.$$

Итакъ: *уравненіе съ корнями даннаго, сложенными съ* λ, *выводится изъ даннаго замѣною* x *биномомъ* $x-\lambda$.

Примѣръ. *Составить уравненіе, котораго корни были бы больше корней ур—нія* $3x^2-5x-4=0$ *на 2.*

Замѣнивъ въ данномъ уравненіи x разностью $x-2$, имѣемъ:

$$3(x-2)^2-5(x-2)-4=0, \quad \text{или} \quad 3x^2-17x+18=0.$$

465. Эта задача важна по своему отношенію къ слѣдующимъ двумъ вопросамъ, встрѣчающимся при изслѣдованіи задачъ второй степени.

Вопросъ I. *Выразить, что оба корня квадратнаго уравненія*

$$ax^2+bx+c=0$$

больше даннаго количества λ.

Если корни уравненія назовемъ буквами x' и x'', то, по условію, должно быть

$$x'>\lambda \text{ и } x''>\lambda, \quad \text{или, что то же,} \quad x'-\lambda>0 \text{ и } x''-\lambda>0\ .\ .\ .\ (1).$$

Если теперь по данному уравненію мы составимъ такое, котораго корни равнялись бы $x'-\lambda$ и $x''-\lambda$, то найдемъ требуемыя условія, выразивъ, что корни новаго уравненія должны быть положительны (въ силу 1).

Для составленія новаго уравненія нужно въ данномъ замѣнить x суммою $x+\lambda$; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$ax^2+(b+2a\lambda)x+(a\lambda^2+b\lambda+c)=0\ .\ \ .\ \ .\ (2)$$

Чтобы корни этого ур—нія были положительны, необходимо, чтобы: 1) ихъ произведеніе было положительно; 2) ихъ сумма была положительна. Итакъ, требуемыя условія будутъ:

1) $\frac{a\lambda^2+b\lambda+c}{a}>0$, или, умноживъ обѣ части на a^2:

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0;$$

2) $-\frac{b+2a\lambda}{a}>0$, или, умноживъ обѣ части на $-a^2$:

$$a(b+2a\lambda)<0.$$

Примѣчаніе. Чтобы выразить, что корни даннаго ур—нія оба меньше λ, необходимо выразить, что корни ур—нія (2) оба отрицательны; сдѣлавъ это, получимъ условія:

$$a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0;\quad a(b+2a\lambda)>0.$$

Вопросъ II. *Выразить, что данное количество λ заключается между корнями ур—нія $ax^2+bx+c=0$.*

Пусть корни даннаго уравненія будутъ x' и x'', причемъ $x'<x''$.

По условію должно быть:

$$x'<\lambda \text{ и } x''>\lambda, \quad \text{или} \quad x'-\lambda<0 \text{ и } x''-\lambda>0\ .\ \ .\ \ .\ (1)$$

Ур—ніе, имѣющее корни $x'-\lambda$ и $x'-\lambda$, есть

$$ax^2+(b+2a\lambda)x+(a\lambda^2+b\lambda+c)=0.$$

Въ силу неравенствъ (1) корни этого ур—нія должны имѣть противоположные знаки, слѣд., необходимо и достаточно, чтобы ихъ произведеніе было отрицательно, т.-е. чтобы

$$\frac{a\lambda^2+b\lambda+c}{a}<0, \quad \text{или} \quad a(a\lambda^2+b\lambda+c)<0.$$

466. *Приложеніе IV.* **Найти соотношеніе между коэффиціентами квадратнаго уравненія подъ условіемъ, чтобы между корнями уравненія существовала данная зависимость.**

Задача I. *Какая связь должна существовать между коэффиціентами уравненія $ax^2+bx+c=0$, чтобы его корни x' и x'' удовлетворяли условію $px'-qx''=r$?*

Рѣшивъ данное уравненіе и подставивъ найденные корни въ равенство $px'-qx''=r$, найдемъ требуемое условіе. Но обыкновенно требуется дать искомое условіе, не рѣшая ур—нія; этого достигнемъ слѣдующимъ пріемомъ.

Говоря, что x' и x'' суть корни даннаго ур—нія, мы выражаемъ этимъ, что они удовлетворяютъ ур—ямъ:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}\quad\text{и}\quad x'x''=\frac{c}{a},$$

и наоборотъ. Слѣд., задачу можно формулировать такъ:

Какова должна быть связь между коэффиціентами даннаго ур—нія, чтобы x' и x'' удовлетворяли тремъ ур—ямъ.

$$px'-qx''=r,\quad x'+x''=-\frac{b}{a},\quad x'x''=\frac{c}{a}.$$

Очевидно, рѣшивъ два изъ этихъ ур—ній (и проще первыя два, какъ ур—нія 1-й степени), мы найдемъ требуемое условіе, подставивъ найденныя рѣшенія въ 3-е. Первыя два даютъ:

$$x'=\frac{ar-bq}{a(p+q)},\quad x''=-\frac{bp+ar}{a(p+q)};$$

подставляя въ третье, найдемъ:

$$-\frac{(ar-bq)(ar+bp)}{a^2(p+q)^2}=\frac{c}{a},\quad\text{или}\quad(ar-bq)(ar+bp)+ac(p+q)^2=0.$$

Это и есть требуемое соотношеніе.

Задача II. *Опредѣлить λ такъ, чтобы корни x' и x'' уравненія*

$$(2\lambda-1)x^2+(5\lambda+1)x+(3\lambda+1)=0$$

имѣли отношеніе $\frac{3}{2}$.

Согласно условію, корни должны удовлетворять уравненіямъ

$$2x'=3x'',\quad x'+x''=-\frac{5\lambda+1}{2\lambda-1},\quad x'x''=\frac{3\lambda+1}{2\lambda-1}.$$

Рѣшая первыя два, находимъ

$$x'=-\frac{3(5\lambda+1)}{5(2\lambda-1)},\quad x''=-\frac{2(5\lambda+1)}{5(2\lambda-1)};$$

внося въ третье уравненіе, имѣемъ

$$\frac{6(5\lambda+1)^2}{25(2\lambda-1)^2}=\frac{3\lambda+1}{2\lambda-1},\quad\text{или}\quad 6(5\lambda+1)^2-25(3\lambda+1)(2\lambda-1)=0:$$

это и есть соотношеніе, которому должно удовлетворять λ; располагая по степенямъ λ, имѣемъ

$$0\times\lambda^2+85\lambda+31=0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \infty, \quad \lambda_2 = -\frac{31}{85}.$$

Провѣримъ, дѣйствительно ли эти значенія λ суть требуемыя.

Во-первыхъ, посмотримъ, каковы корни даннаго ур—нія при $\lambda = \infty$; для этого выносимъ λ за скобки:

$$\lambda\left[\left(2 - \frac{1}{\lambda}\right)x^2 + \left(5 + \frac{1}{\lambda}\right)x + \left(3 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0;$$

отсюда видно, что когда λ приближается къ безконечности, корни даннаго ур—нія стремятся къ предѣламъ, удовлетворяющимъ ур—нію $2x^2 + 5x + 3 = 0$ откуда $x' = -\frac{3}{2}$ и $x'' = -1$; отношеніе $x' : x''$ дѣйствительно $= 3 : 2$.

Во-вторыхъ, при $\lambda = -\frac{31}{85}$ данное ур—ніе беретъ видъ $147x^2 + 70x + 8 = 0$, откуда $x' = -\frac{2}{7}$, $x'' = -\frac{4}{21}$; дѣйствительно $x' : x'' = 3 : 2$.

467. *Приложеніе V.* **Какому условію должны удовлетворять коэффиціенты двухъ квадратныхъ уравненій**

$$ax^2 + bx + c = 0\ .\ .\ .\ (1) \quad a'x^2 + b'x + c' = 0\ .\ .\ .\ (2),$$

чтобы эти ур—нія имѣли одинъ общій корень?

Первое рѣшеніе. Пусть корни ур—нія (1) суть α и β; ур—нія (2) α и β', гдѣ α — общій корень; мы имѣемъ 4 уравненія

$$(7)\left\{\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b}{a}\ .\ .\ .\ (3) \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a}\ .\ .\ .\ (4) \\ \alpha + \beta' &= -\frac{b'}{a'}\ .\ .\ .\ (5) \\ \alpha\beta' &= \frac{c'}{a'}\ .\ .\ .\ (6) \end{aligned}\right.$$

Докажемъ, что для того, чтобы данныя ур—нія имѣли одинъ общій корень, необходимо и достаточно, чтобы ур—нія (7) съ тремя неизвѣстными α, β и β' имѣли по крайней мѣрѣ одно общее рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Если ур—нія (1) и (2) имѣютъ общій корень α, то ур—нія системы (7) будутъ удовлетворены этимъ корнемъ α и двумя не общими корнями β и β'.

2) Если ур—нія (7) имѣютъ общее рѣшеніе (α, β и β'), то: корни α и β, удовлетворяя ур—мъ (3) и (4), служатъ корнями (1), а α и β', удовлетворяя (5) и (6), будутъ корнями ур—нія (2); т.-е. α и будетъ общимъ корнемъ данныхъ ур—ній.

Итакъ, искомое условіе есть условіе, при которомъ система (7) имѣетъ общее рѣшеніе: это условіе найдемъ, исключивъ α, β и β' изъ ур—ній системы (7). Комбинируя (3) и (5), имѣемъ

$$\beta - \beta' = \frac{ab' - ba'}{aa'};\ .\ .\ .\ (8).$$

комбинируя (4) съ (6), получимъ

$$\alpha(\beta-\beta')=\frac{ca-ac'}{aa'}\quad . \;\; . \;\; . \; (9).$$

Отсюда:

$$\alpha=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}.$$

Слѣд. изъ (4) имѣемъ

$$\beta=\frac{c(ab'-ba')}{a(ca'-ac')}.$$

Подставляя эти величины въ (3), и найдемъ искомое условіе:

$$\frac{ca-ac'}{ab'-ba'}+\frac{c(ab'-ba')}{a(ca'-ac')}+\frac{b}{a}=0,$$

что не трудно привести къ виду

$$(ca'-ac')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0.$$

Второе рѣшеніе. Полагая a и a' отличными отъ нуля и умноживъ ур. (1) на a', а (2) на a, замѣнимъ ихъ двумя слѣдующими, имъ эквивалентными:

$$aa'x^2+ba'x+ca'=0\;\; . \;\; . \;\; . \; (10), \qquad aa'x^2+ab'x+ac'=0, \;\; . \;\; . \;\; . \; (11),$$

изъ которыхъ тотчасъ выводимъ слѣдующія замѣчанія:

1) Если $ab'-ba'=0$, то ур—нія не могутъ имѣть никакого общаго рѣшенія, если въ то же время не будетъ и $ac'-ca'=0$; но въ такомъ случаѣ оба ур—нія дѣлаются тождественными, иначе говоря, имѣютъ *два* общихъ корня.

2) Если $ac'-ca'=0$, то ур—нія не могутъ имѣть ни одного общаго корня, если при этомъ не будетъ и $ab'-ba'=0$; но тогда опять оба ур—нія будутъ тождественны.

3) Изъ сопоставленія этихъ замѣчаній выводимъ то заключеніе, что если два квадратныя ур—нія имѣютъ *одинъ только* общій корень, то разности $ab'-ba'$ и $ac'-ca'$ отличны отъ нуля; слѣд. по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ c и c' не есть нуль.

Зная это, вычтемъ изъ (10) ур—ніе (11); найдемъ

$$(ab'-ba')x+ac'-ca'=0, \;\; . \;\; . \;\; . \; (12).$$

По извѣстному принципу, система (1) и (2) эквивалентна системѣ (1) и (12); слѣд., общій корень м. б. найденъ изъ послѣдней системы; а какъ ур. (12) есть ур—ніе 1-й степени и слѣд. имѣетъ только одинъ корень, значитъ, если данныя ур—нія имѣютъ общій корень, онъ долженъ быть

$$x=-\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Будучи общимъ корнемъ системы (1) и (12), онъ долженъ удовлетворять ур—нію (1); такъ что искомое условіе найдемъ, подставивъ найденное для x значеніе въ ур—ніе (1). Итакъ

$$\frac{a(ac'-a'c)^2}{(ab-a'b)^2}-\frac{b(ac'-a'c)}{ab'-a'b}+c=0,$$

что легко привести къ виду

$$(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0, \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Соотношеніе это просто, симметрично и легко удерживается въ памяти.

Его можно представить въ другой формѣ. Раскрывъ скобки и умноживъ всѣ члены на 4, найдемъ:

$$4a^2c'^2+4c^2a'^2-8aca'c'-4ab'bc'-4ba'cb'+4b^2a'c'+4b'^2ac=0,$$

или, придавъ и вычтя $b^2b'^2$, можемъ дать ему видъ:

$$b^2b'^2+4a^2c'^2+4c^2a'^2-4bb'ac'-4bb'ca'+8ac'ca'-b^2b'^2+4acb'^2+$$
$$+4a'c'b^2-16aca'c'=0,$$

или

$$(bb'-2ac'-2ca')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')=0 \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Примѣчаніе I. Общій корень раціоналенъ; слѣд., онъ не м. б. мнимымъ. Слѣд., когда два квадратныя ур—нія имѣютъ одинъ общій корень, всѣ ихъ корни дѣйствительны и потому

$$b^2-4ac>0 \quad \text{и} \quad b'^2-4a'c'>0.$$

Это же можно видѣть и непосредственно. Если квадратное ур—ніе имѣетъ корень $\alpha+\beta i$, то другой его корень будетъ $\alpha-\beta i$; а слѣд. если два ур—нія имѣютъ одинъ общій мнимый корень, то они имѣютъ два общихъ корня и слѣд. тождественны.

Примѣчаніе II. Мы замѣтили, что два квадратныхъ ур—нія не могутъ имѣть общаго корня, если $ac'-ca'=0$, и притомъ $ab'-ba'$ отлично отъ нуля. Слѣдуетъ прибавить: *исключая случая, когда* $c=c'=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $ac'-ca'=0$ и ур—нія будутъ

$$ax^2+bx=0, \quad a'x^2+b'x=0;$$

очевидно, что они имѣютъ общій корень $x=0$ и что два другіе корня, опредѣляемые ур—ми

$$ax+b=0, \quad a'x+b'=0$$

различны, ибо, по положенію, $ab'-ba'$ не равно нулю.

Замѣтимъ, что соотношеніе (13) удовлетворяется и при $c=c'=0$; слѣд., оно *общее* и примѣнимо и къ исключительному случаю, о которомъ идетъ рѣчь.

468. *Приложеніе VI.* Условіе, при которомъ два квадратныхъ ур—нія имѣютъ два общихъ корня.

I. Называя общіе корни уравненій $ax^2 + bx + c = 0$ и $a'x^2 + b'x + c' = 0$ буквами α и β, будемъ имѣть

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},\quad \alpha + \beta = -\frac{b'}{a'},\quad \alpha\beta = \frac{c}{a},\quad \alpha\beta = \frac{c'}{a'};$$

откуда необходимо, чтобы

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b}{a'} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = \frac{c}{a'},$$

что можно представить въ видѣ

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \;.\;.\;.\;(1)$$

Эти условія, будучи необходимы, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны, ибо, какъ скоро они выполнены, то, называя общую величину равныхъ отношеній (1) буквою K, имѣемъ: $a' = aK$, $b = bk$, $c = cK$ и потому второе уравнене беретъ видъ $K(ax^2 + bx + c) = 0$ или $ax^2 + bx + c = 0$, т.-е. ничѣмъ не отличается отъ перваго, а слѣд. имѣетъ тѣ же корни, какъ и первое. Итакъ:

Чтобы два квадратныхъ уравненія имѣли два общихъ корня, необходимо и достаточно, чтобы ихъ коэффиціенты были пропорціональны.

II. Можно это условіе вывести иначе. Выше мы видѣли (§ 467), что, полагая a и a' отличными отъ нуля, можно одно изъ данныхъ уравненій замѣнить ур—ніемъ

$$(ab' - ba')x + (ac' - ca') = 0.$$

Слѣдоват., если данныя ур—нія имѣютъ два общихъ корня, то полиномъ $(ab' - ba')x + (ac' - ca')$, будучи *первой степени*, долженъ обращаться въ нуль при *двухъ* различныхъ значеніяхъ x, а потому (§ 68) онъ долженъ быть тождественно равенъ нулю, а для этого (§ 70) необходимо и достаточно, чтобы его коэффиціенты равнялись нулю, т.-е. чтобы

$$ab' - ba' = 0 \quad \text{и} \quad ac' - ca' = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

469. *Приложеніе VII.* Найти два числа, зная ихъ сумму S и произведеніе P.

Очевидно, искомыя числа суть корни уравненія

$$x^2 - Sx + P = 0 \;.\;.\;.\;(1);$$

въ самомъ дѣлѣ, сумма корней этого ур—нія равна S, а произведеніе P.

Примѣръ. Найти два числа, которыхъ сумма равнялась бы 13, а произведеніе 40.

Искомыя числа суть корни ур—нія $x^2 - 13x + 40 = 0$; рѣшая его, находимъ: $x' = 8$, $x'' = 5$. И въ самомъ дѣлѣ: $8 + 5 = 13$, $8 \times 5 = 40$.

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы ур. (1) имѣло корни дѣйствительные, т.-е. чтобы разность $S^2 - 4P$ была положительна или нуль:

$$S^2 - 4P \geqslant 0;$$

отсюда

$$P \leqslant \left(\frac{S}{2}\right)^2,$$

т.-е. *наибольшая величина* (maximum) *произведенія двухъ чиселъ, положительныхъ или отрицательныхъ, имѣющихъ постоянную сумму, равна квадрату ихъ полусуммы.*

Если бы требовалось *найти два числа, зная ихъ разность* δ *и произведеніе* P, то задачу эту можно бы было свести къ предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, если искомыя числа будутъ x' и y', то по условію задачи имѣемъ

$$x' - y' = \delta \quad \text{и} \quad x'y' = P;$$

но положивъ $-y' = x''$, дадимъ этимъ ур—ямъ видъ

$$x' + x'' = \delta, \quad x'x' = -P,$$

слѣд. x' и x'' суть корни уравненія

$$x^2 - \delta x - P = 0.$$

Если δ *положительно*, слѣд. $x' - y' > 0$, то для x' нужно взять большій корень ур—нія, а другой корень, взятый съ обратнымъ знакомъ, дастъ y'. Если δ *отрицательно*, нужно сдѣлать наоборотъ.

Условіе возможности задачи выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\delta^2}{4} + P \geqslant 0,$$

откуда видно, что при P положительномъ задача всегда возможна, ибо $\frac{\delta^2}{4} + P$ будетъ представлять сумму двухъ существенно положительныхъ количествъ.

470. *Приложеніе VIII.* **Найти сумму одинаковыхъ степеней корней квадратнаго уравненія** $ax^2 + bx + c = 0$.

Пусть корни будутъ x_1 и x_2; требуется вычислить $x_1{}^m + x_2{}^m$, не рѣшая ур—нія. Сумму эту для краткости будемъ обозначать знакомъ S_m.

I. Во-первыхъ, мы имѣемъ

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

II. Чтобы найти S_2, возьмемъ тождества

$$ax_1{}^2 + bx_1 + c = 0 \;.\;.\;.\;(1), \quad ax_2{}^2 + bx_2 + c = 0 \;.\;.\;.\;(2),$$

сложивъ ихъ, найдемъ

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0, \quad \text{откуда} \quad S_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Этотъ результатъ можно найти иначе, замѣчая, что

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}.$$

III. Чтобы найти S_3, помножимъ ур. (1) на x_1, ур. (2) на x_2 и сложимъ ихъ почленно, что дастъ:

$$aS_3+bS_2+cS_1=0,\quad \text{откуда}\quad S_3=-\frac{bS_2+cS_1}{a},$$

или, замѣняя S_2 и S_1 ихъ величинами:

$$S_3=-\frac{b(b^2-3ac)}{a^3}.$$

Этотъ результатъ можно найти иначе, замѣчая, что

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}.$$

IV. Помножая тождества (1) и (2) соотвѣтственно на x_1^2 и x_2^2 и складывая, найдемъ

$$aS_4+bS_3+cS_2=0,\quad \text{откуда}\quad S_4=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}.$$

Иначе найдемъ этотъ результатъ, замѣчая, что

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)^2-\frac{2c^2}{a^2}.$$

Вообще, легко найти S_m, зная суммы S_{m-1} и S_{m-2}; ибо, помноживъ тождества: (1) на x_1^{m-2}, (2) на x_2^{m-2}, и сложивъ, имѣемъ соотношеніе

$$aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0,$$

въ которомъ и содержится общее рѣшеніе задачи: при ея помощи можно по порядку вычислять S_2, S_3, S_4, . . .

Такъ, полагая $m=2$, имѣемъ уравненіе $aS_2+bS_1+cS_0=0$, въ которомъ $S_1=-\frac{b}{a}$, $S_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2$; слѣд.

$$S_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}.$$

Положивъ $m=3$, имѣемъ $aS_3+bS_2+cS_1=0$, откуда

$$S_3=-\frac{b}{a}\cdot S_2-\frac{c}{a}S_1=-\frac{b}{a}\times\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)-\frac{c}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}\quad \text{и т. д.}$$

471. Пусть требуется *найти сумму одинаковыхъ степеней обратныхъ величинъ корней квадратнаго уравненія.*

Называя эту сумму через S_{-m}, имѣем

$$S_{-m}=\left(\frac{1}{x_1}\right)^m+\left(\frac{1}{x_2}\right)^m=\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m}=\frac{x_1^m+x_2^m}{x_1^m x_2^m}=\frac{S_m}{\left(\frac{c}{a}\right)^m},$$

или

$$S_{-m}=\frac{a^m}{c^m}\cdot S_m.$$

Такъ, напр., отсюда найдемъ:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{c};\quad \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2};\quad \frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=-\frac{b(b^2-3ac)}{c^3};$$

$$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}\text{ и т. д.}$$

472. Построеніе корней квадратнаго уравненія.

Рѣшая геометрическій вопросъ съ помощью алгебры, всегда получаемъ уравненія *однородныя*, если только всѣ линіи вопроса изображены *буквами*, а не числами. Такія ур—нія мы и будемъ разсматривать.

1. Уравненіе вида $x^2=m\,.\,n$ даетъ пропорцію $m:x=x:n$; слѣд., построеніе линіи x приводится къ нахожденію средней пропорціональной между линіями m и n.

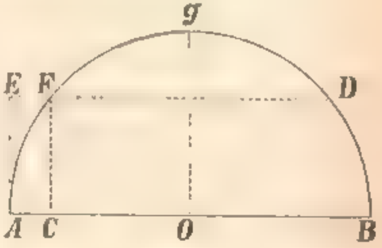
2. Полное уравненіе. Обозначая буквами p и k отношенія двухъ данныхъ линій къ линейной единицѣ, а буквою x отношеніе къ той же единицѣ линіи искомой, имѣемъ четыре вида ур—ній:

$$x^2+px+k^2=0;\quad x^2-px+k^2=0;\quad x^2+px-k^2=0;\quad x^2-px-k^2=0.$$

Такъ какъ первое выводится изъ второго, а третье изъ четвертаго перемѣною x на $-x$, то достаточно построить корни 2-го и 4-го.

Представивъ 2-е въ видѣ $x(p-x)=k^2$, замѣчаемъ, что вопросъ приводится къ построенію сторонъ x и $p-x$ прямоугольника, равновеликаго квадрату стороны k, зная сумму измѣреній прямоугольника.

Для этого на прямой $\mathrm{AB}=p$ описываемъ полуокружность; въ точкѣ A возставляемъ къ линіи AB перпендикуляръ $\mathrm{AE}=k$ и черезъ точку E проводимъ прямую ED параллельно AB, пересѣкающую окружность въ D и F. Легко видѣть, что прямая $\mathrm{EF}=\mathrm{AC}$ изображаетъ одинъ корень ур—нія, а линія $\mathrm{DE}=\mathrm{BC}$—другой. Въ самомъ дѣлѣ:



Черт. 50.

$$\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\mathrm{AB}=p,$$

$$\mathrm{AC}\times\mathrm{BC}=\mathrm{CF}^2=\mathrm{AE}^2=k^2.$$

Для возможности задачи необходимо, чтобы прямая ED встрѣчала окружность; слѣд., задача невозможна, когда $\mathrm{AE}>\mathrm{OG}=\frac{\mathrm{AB}}{2}$, или когда $k>\frac{p}{2}$, потому что при этомъ условіи ED не встрѣчаетъ окружности. Когда $AE = OG = \frac{AB}{2}$, или $k = \frac{p}{2}$, прямая ED касается окружности въ точкѣ G, и корни получаются равные, $AO = OB = \frac{p}{2}$. Наконецъ, когда $AE < OG = \frac{AB}{2}$, или $k < \frac{p}{2}$, прямая ED пересѣкаетъ окружность, и корни получаются неравные: AC и CB. Все это вполнѣ согласно съ тѣмъ, что при условіи $k^2 > \frac{p^2}{4}$ корни уравненія мнимы, при $k^2 = \frac{p^2}{4}$ дѣйствительные равные, а при $k^2 < \frac{p^2}{4}$ — дѣйствительные неравные.

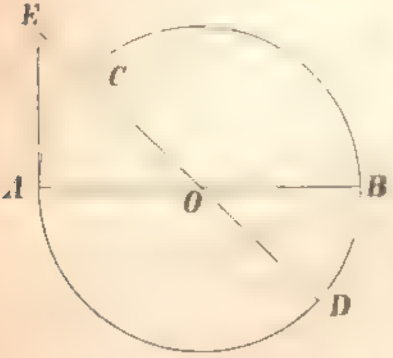
Четвертое ур—ніе приводится къ виду $x(x - p) = k^2$ и соотвѣтствуетъ вопросу: построить измѣренія прямоугольника, равновеликаго данному квадрату, по разности p этихъ измѣреній. На прямой $AB = p$, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность; въ точкѣ A проводимъ къ ней касательную $AE = k$ и изъ точки E проводимъ сѣкущую ECD черезъ центръ. Имѣемъ

$$ED = x',\ EC = -x'',$$

ибо

$$DE - CE = DC = AB = p,$$

$$EC \times ED = AE^2 = k^2.$$



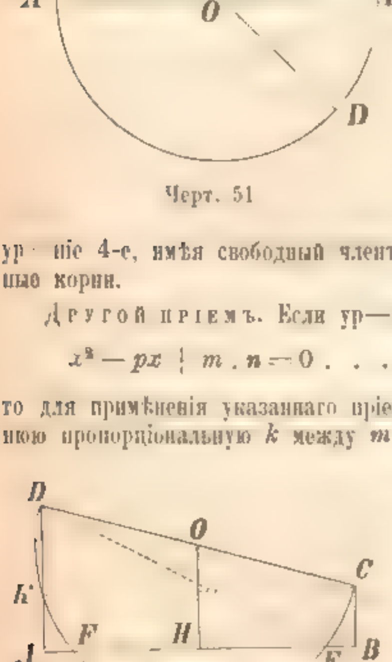
Черт. 51

Очевидно, построеніе всегда возможно, такъ какъ точка E всегда будетъ находиться внѣ круга; и это обстоятельство вполнѣ согласно съ тѣмъ, что ур—ніе 4-е, имѣя свободный членъ отрицательный, всегда имѣетъ дѣйствительные корни.

Другой пріемъ. Если ур—нія 2-е и 4-е имѣютъ видъ

$$x^2 - px + m \,.\, n = 0 \;.\;.\;.\; (2) \qquad x^2 - px - m \,.\, n = 0 \;.\;.\;.\; (4),$$

то для примѣненія указаннаго пріема слѣдовало бы предварительно найти среднюю пропорціональную k между m и n; нижеслѣдующее построеніе позволяетъ избѣжать этого предварительнаго построенія, давая, къ тому же, способъ, примѣнимый во всѣхъ случаяхъ.



Черт. 52.

Для построенія корней ур—нія (2) беремъ $AB = p$; въ точкѣ A возставляемъ къ ней перпендикуляръ $AD = m$, въ точкѣ B перпендикуляръ $BC = n$, проводя ихъ въ одну сторону отъ прямой AB.

Проведя прямую CD, описываемъ на ней, какъ на діаметрѣ, окружность, которая, вообще, пересѣчетъ AB въ двухъ точкахъ E, F; искомыя линіи будутъ AE и EB, или AF и FB. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ DAE и ECB имѣемъ: $AE : CB = AD : EB$, откуда $AE \times EB = m \,.\, n$; кромѣ того, по построенію, $AE + EB = AB = p$.

Перпендикуляръ, опущенный изъ средины O линіи DC на AB, пересѣкаетъ хорду FE въ ея срединѣ H: отсюда выходитъ, что AF = EB и, слѣд., AE = FB.

Для возможности задачи нужно, чтобы окружность CD встрѣчала AB, а это требуетъ, чтобы OH было не больше $\frac{CD}{2}$.

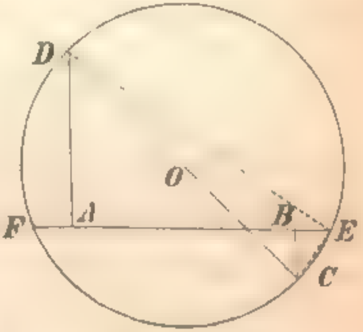
Но $OH = \frac{m+n}{2}$; $CD^2 = CK^2 + DK^2 = AB^2 + (m-n)^2$; отсюда легко видѣть, что условіе возможности будетъ $mn \leqslant \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Примѣчаніе. Если $m = n$, CD будетъ параллельна AB, AD — касательна къ окружности въ D, и перевернувъ чертежъ, найдемъ обыкновенное построеніе.

Для построенія корней (4), къ AB, равной данной разности p, возставляемъ въ точкахъ A и B перпендикуляры $AD = m$ и $BC = n$ по разныя стороны отъ AB; на прямой CD, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность, пересѣкающую прямую AB въ точкахъ E и F. Корни будутъ

$$x' = AE, \quad x'' = -BE.$$

Въ самомъ дѣлѣ, разность абсолютныхъ величинъ этихъ линій (или ихъ алгебраическая сумма) есть $AE - BE = AB = p$, а произведеніе ихъ $= m \,.\, n$, ибо подобные треугольники ADE и BCE даютъ:
$AD : AE = BE : BC$, или $AE \times BE = AD \times BC = m \,.\, n$.



Черт. 54.

Задача всегда возможна, ибо всегда имѣетъ мѣсто пересѣченіе прямой AB съ окружностью DC, такъ какъ послѣдняя, по самому построенію, имѣетъ точки C и D по обѣ стороны прямой AB.

Такимъ образомъ, измѣняя направленіе перпендикуляра, соотвѣтствующаго тому изъ множителей m и n, который отрицателенъ, мы тѣмъ же самымъ построеніемъ находимъ оба корня ур—нія, при чемъ отрицательный корень приходится на продолженіи AB: противоположности въ знакѣ соотвѣтствуетъ противоположность направленія.

Примѣчаніе. Если m и n равны, средина прямой AB будетъ въ центрѣ окружности; если на AB, какъ на діаметрѣ, описать окружность концентричную первой, BC будетъ касательною къ ней, и какъ OC = OE, найдемъ обыкновенное построеніе.

ГЛАВА XXXII.

Квадратный триномъ; разложеніе его на множители первой степени; теорема объ измѣненіи знака.—Приложенія.

473. Квадратный триномъ. Если въ полиномѣ $ax^2 + bx + c$ подъ a, b и c разумѣть *постоянныя* количества, а подъ x —*перемѣнное*, измѣняющееся въ области дѣйствительныхъ чиселъ (отъ $-\infty$ до 0, и отъ 0 до $+\infty$), то полиномъ этотъ, называемый *квадратнымъ триномомъ*, будетъ измѣняться по величинѣ и знаку. Такъ, при $x=0$ онъ $=c$; при $x=1$, равенъ $a+b+c$; при $x=-10$, равенъ $100a-10b+c$; и т. д. Между этими величинами однѣ могутъ быть положительны, другія отрицательны. Тѣ значенія x, при которыхъ триномъ обращается въ нуль, называются *корнями тринома*; ихъ мы найдемъ, приравнявъ триномъ нулю и рѣшивъ квадратное ур—ніе

$$ax^2+bx+c=0.$$

Квадратный триномъ обладаетъ замѣчательными свойствами, изъ числа которыхъ въ этой главѣ мы изучимъ: 1) разложеніе тринома на множители; 2) измѣненіе его знака, и затѣмъ займемся приложеніями этихъ свойствъ.

Разложеніе квадратнаго тринома на множители первой степени.

474. Теорема. *Квадратный триномъ равенъ произведенію коэффиціента при x^2 на два двучленныхъ множителя, равныхъ разностямъ между x и каждымъ изъ корней тринома.*

Первое доказательство. Обозначивъ триномъ буквою y и вынеся за скобки a, найдемъ

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right);$$

дополнимъ квадратъ бинома, первые два члена котораго суть: $x^2+\frac{b}{a}x$; принимая x за первый членъ бинома, второй найдемъ, раздѣливъ $\frac{b}{a}x$ на $2x$, что дастъ $\frac{b}{2a}$; прибавляя въ скобки и вычитая $\frac{b^2}{4a^2}$, получимъ

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Различаемъ три случая: $b^2-4ac>0$, $b^2-4ac=0$, $b^2-4ac<0$.

I. $b^2-4ac>0$. Въ этомъ случаѣ дробь $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ положительна, а потому $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ величина *дѣйствительная;* триномъ беретъ видъ

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Примѣняя сюда формулу разложенія $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$, найдемъ:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\quad\ldots(1),$$

причемъ *всѣ три множителя дѣйствительны.*

Этому разложенію можно дать видъ:

$$y = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

и замѣчая, что

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

суть корни ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$, или, что то же, корни тринома, можемъ, назвавъ эти корни черезъ x' и x'', дать триному видъ

$$y = a(x - x')(x - x'') \;.\;.\;.\; (1'),$$

гдѣ всѣ множители дѣйствительны.

II. $b^2 - 4ac = 0$. Триномъ (форм. 1) приводится къ виду

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Замѣтивъ, что $x + \frac{b}{2a} = x - \left(-\frac{b}{2a}\right)$, и что $-\frac{b}{2a}$ есть общая величина равныхъ корней при условіи $b^2 - 4ac = 0$, мы, назвавъ эту величину буквою x', можемъ дать триному видъ

$$y = a(x - x')^2.$$

Таково разложеніе тринома въ случаѣ дѣйствительныхъ равныхъ корней.

III. $b^2 - 4ac < 0$. При этомъ условіи триномъ имѣетъ корни мнимые; ему можно дать такой же видъ, какъ и при дѣйствительныхъ неравныхъ корняхъ, т.-е. (1) или (1'), но оба двучленные множители будутъ мнимые.

Впрочемъ, для дальнѣйшихъ изслѣдованій удобнѣе дать триному въ этомъ случаѣ иной видъ. Замѣтивъ, что изъ неравенства $b^2 - 4ac < 0$ слѣдуетъ $4ac - b^2 > 0$, такъ что дробь $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ будетъ положительная, представимъ y въ видѣ

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

и замѣтимъ, что въ квадратныхъ скобкахъ находится *сумма двухъ существенно положительныхъ количествъ.*

475. Второе доказательство. Представивъ триномъ въ видѣ

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

замѣчаемъ, что $\frac{b}{a} = -(x' + x'')$ и $\frac{c}{a} = x'.x''$, гдѣ x' и x'' суть корни тринома. Подстановка дастъ

$$y = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] = a[x^2 - x'x - x'x + x'x''].$$

Вынося въ первыхъ двухъ членахъ за скобки x, а въ двухъ остальныхъ $-x''$, послѣдовательно имѣемъ

$$y = a[(x - x')x - x''(x - x')] = a(x - x')(x - x'').$$

Такъ какъ соотношенія между коэффиціентами и корнями, на которыхъ основано это доказательство, существуютъ и для дѣйствительныхъ и для мнимыхъ корней, то и полученное разложеніе имѣетъ мѣсто для тѣхъ и другихъ.

Когда дѣйствительные корни равны между собою, то, положивъ въ предыдущей формулѣ $x' = x''$, найдемъ

$$y = a(x - x')^2 = [\sqrt{a}\,(x - x')]^2,$$

триномъ представляетъ точный квадратъ выраженія $\sqrt{a}\,(x - x')$.

476. Третье доказательство. Если x' и x'' будутъ корни тринома $ax^2 + bx + c$, то, предполагая, что они различны, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ нуль при подстановкѣ въ него двухъ *различныхъ* значеній x' и x'' вмѣсто x; а потому онъ дѣлится на произведеніе биномовъ $x - x'$ и $x - x''$; слѣд.

$$ax^2 + bx + c = (x - x')(x - x'') \,.\, Q.$$

Q есть цѣлое относительно x частное нулевой степени, ибо дѣлитель одинаковой степени съ дѣлимымъ; слѣд. Q найдемъ, раздѣливъ высшій членъ ax^2 дѣлимаго на высшій членъ x^2 дѣлителя; слѣд. $Q = a$; и потому

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'').$$

Примѣчаніе. Доказательство предполагаетъ, что x' и x'' неравны; но если теорема вѣрна для x' и x'' неравныхъ, то она остается вѣрна, какъ бы мала ни была разность между x' и x''; значитъ она вѣрна и въ предѣльномъ случаѣ, когда корни равны.

Впрочемъ, для случая равныхъ корней можно дать самостоятельное доказательство теоремы. Въ самомъ дѣлѣ, при равныхъ корняхъ $b^2 = 4ac$, откуда $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$; слѣд.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right);$$

но каждый изъ равныхъ корней $= -\frac{b}{2a}$, такъ что и въ данномъ случаѣ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

только здѣсь $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$.

477. Примѣры.—I. Разложить на множители триномъ $y = -3x^2 + 5x - 8$.

Рѣшивъ ур—ніе $-3x^2 + 5x + 8 = 0$, находимъ корни тринома: $x' = -1$, $x'' = \frac{8}{3}$; слѣд.

$$y = -3\,(x + 1)\left(x - \frac{8}{3}\right) = -(x + 1)(3x - 8).$$

II. Разложить на множители триномъ $y = 49x^2 - 70x + 25$.

Рѣшивъ уравненіе $49x^2 - 70x + 25 = 0$, находимъ равные корни: $x' = x'' = \frac{5}{7}$; слѣд.

$$y = 49\left(x - \frac{5}{7}\right)^2 = (7x - 5)^2.$$

III. Разложить триномъ $y = -9x^2 + 6x + 1$.

Корни тринома равны: $x' = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$, $x'' = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$; слѣд

$$y = -9\left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{2}}{3}\right).$$

IV. Разложить триномъ $y = 4x^2 - 12x + 13$.

Корни тринома суть: $x' = \frac{3-2i}{2}$, $x'' = \frac{3+2i}{2}$; слѣд.

$$y = 4\left(x - \frac{3-2i}{2}\right)\left(x - \frac{3+2i}{2}\right) = (2x - 3 + 2i)(2x - 3 - 2i).$$

Такъ какъ корни тринома мнимые, то его нужно представить въ иной формѣ—въ видѣ суммы квадратовъ: найдемъ:

$$y = (2x - 3)^2 + 4.$$

478. *Приложенія.*—I. Составленіе квадратнаго уравненія по даннымъ корнямъ.

Пусть требуется составить квадратное ур—ніе съ корнями $x' = -\frac{3}{5}$, $x'' = \frac{7}{15}$. Оно должно быть вида $(x - x')(x - x'') = 0$; слѣд. найдемъ

$$\left(x + \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{7}{15}\right) = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{2x}{15} - \frac{21}{75} = 0,$$

или

$$75x^2 + 10x - 21 = 0.$$

II. Часто можно примѣнять разложеніе квадратнаго тринома на множители къ сокращенію дробей.

Пусть требуется сократить дробь $\frac{6x^2 - 5x - 6}{4x^3 - 9x}$. Разложивъ на множители числителя, получимъ

$$6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 2);$$

знаменатель $x(4x^2 - 9) = x(2x + 3)(2x - 3)$.

Сокративъ дробь на $2x - 3$, найдемъ $\frac{3x + 2}{2x^2 + 3x}$.

Другой примѣръ: сократить дробь $\frac{x^3 - 19x^2 + 119x - 245}{3x^2 - 38x + 119}$.

Разлагая на множителей знаменателя, найдемъ

$$3x^2 - 38x + 119 = 3(x - 7)\left(x - \frac{17}{3}\right) = (x - 7)(3x - 17);$$

для сокращенія дроби надо попытаться, не дѣлится ли числитель на $x - 7$ или на $3x - 17$; найдемъ

$$x^3 - 19x^2 + 119x - 245 = (x^2 - 12x - 35)(x - 7);$$

сокращая дробь на $x - 7$, получимъ дробь $\frac{x^2 - 12x + 35}{3x - 17}$, не подлежащую дальнѣйшему упрощенію.

Измѣненія знака квадратнаго тринома.

479. Теорема. *Когда корни тринома* $ax^2 + bx + c$ *мнимые, т.-е. когда* $b^2 - 4ac < 0$, *то при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ* x, *триномъ неизмѣнно сохраняетъ знакъ коэффиціента* a. *Когда корни тринома дѣйствительные равные, т.-е. когда* $b^2 - 4ac = 0$, *триномъ сохраняетъ знакъ коэффиціента* a *при всякомъ* x, *кромѣ* $x = -\frac{b}{2a}$, *при каковомъ значеніи* x *триномъ обращается въ нуль. Наконецъ, если корни тринома дѣйствительные неравные, т.-е. если* $b^2 - 4ac > 0$, *то при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго* x, *лежащихъ внѣ корней* (т.-е. меньшихъ меньшаго, а также большихъ большаго корня), *онъ сохраняетъ знакъ коэффиціента* a; *при всѣхъ же значеніяхъ* x, *лежащихъ между корнями, знакъ тринома противоположенъ знаку коэффиціента* a.

I. Когда $b^2 - 4ac < 0$, триномъ имѣетъ мнимые сопряженные корни: слѣд. $x' = \alpha + \beta i$, $x'' = \alpha - \beta i$, гдѣ α и β количества дѣйствительныя. Разложеніе будетъ:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = a\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right].$$

Изъ этой формы тринома видно, что при всякомъ дѣйствительномъ значеніи x, положительномъ или отрицательномъ, выраженіе въ скобкахъ, какъ сумма квадратовъ дѣйствительныхъ количествъ, всегда положительно, а стало быть произведеніе этого выраженія на a всегда будетъ имѣть знакъ количества a, каково бы ни было x. Итакъ, если $a > 0$, триномъ будетъ всегда положителенъ; если $a < 0$, онъ всегда будетъ отрицателенъ.

Можно дать другое доказательство. Изъ неравенства $b^2 - 4ac < 0$ имѣемъ $4ac > b^2$, а раздѣливъ обѣ части на существенно-положительное количество $4a^2$, находимъ: $\frac{c}{a} > \frac{b^2}{4a^2}$. Слѣдовательно, можно положить $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + K^2$, гдѣ K дѣйствительно и отлично отъ нуля. Триномъ беретъ видъ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + K^2\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + K^2\right].$$

аналогичный уже найденному. Далѣе доказательство ведется вышеуказаннымъ способомъ.

II. Пусть $b^2 - 4ac = 0$: корни тринома дѣйствительные равные; означая общую величину ихъ буквою x', имѣемъ

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2.$$

Произведеніе неизмѣнно сохраняетъ знакъ a, каково бы ни было дѣйствительное значеніе x, ибо факторъ $(x-x')^2$ положителенъ при всякомъ дѣйствительномъ x; и только при $x=x'$ оно обращается въ нуль.

Можно вести доказательство еще такъ: изъ $b^2-4ac=0$ имѣемъ $4ac=b^2$; раздѣливъ обѣ части на $4a^2$, находимъ $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$. Представивъ триномъ въ видѣ $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ и замѣнивъ $\frac{c}{a}$ дробью $\frac{b^2}{4a^2}$, получимъ

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

откуда очевидно, что триномъ неизмѣнно сохраняетъ знакъ коэффиціента a при всякомъ дѣйствительномъ x.

III. Пусть, наконецъ, $b^2-4ac>0$: триномъ имѣетъ корни дѣйствительные неравные; пусть они будутъ x' и x'', причемъ $x'<x''$. Триномъ можно представить въ видѣ

$$a(x-x')(x-x'').$$

Разобьемъ скалу возрастающихъ значеній x на три области: 1) отъ $-\infty$ до меньшаго корня x'; 2) отъ меньшаго корня x' до большаго x''; 3) отъ большаго корня x'' до $+\infty$.

$$\underbrace{-\infty\ .\ .\ .\ x'}_{1}\ \underbrace{.\ .\ .\ .\ x''}_{2}\ \underbrace{.\ .\ .\ +\infty}_{3}.$$

Когда x остается въ первой области, т.-е. меньше меньшаго корня x', а слѣдовательно и подавно меньше x'', обѣ разности $x-x'$ и $x-x''$ будутъ отрицательны; произведеніе ихъ положительно, а потому все произведеніе $a(x-x')(x-x'')$ сохраняетъ знакъ коэффиціента a.

Когда x находится во второй области, т.-е. больше x', но меньше x'', тогда $x-x'>0$, а $x-x''<0$; произведеніе разностей отрицательно, а потому все произведеніе $a(x-x')(x-x'')$ имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента a.

Наконецъ, когда x лежитъ въ области (3), т.-е. больше x'', а потому и подавно больше x', оба бинома $x-x'$ и $x-x''$ положительны; ихъ произведеніе положительно, а потому все произведеніе $a(x-x')(x-x'')$ имѣетъ знакъ коэффиціента a.

Такимъ образомъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ два раза мѣняетъ знакъ; причемъ перемѣнѣ знака предшествуетъ обращеніе тринома въ нуль (при $x=x'$ и при $x=x''$).

Резюме.

$$y=ax^2+bx+c,$$

(x' и x''—корни тринома, причемъ $x'<x''$).

$$\begin{array}{lll}
\text{I. } b^2-4ac\leqslant 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & y \text{ имѣетъ знакъ } +a. \\
 & x<x' \ \ldots\ldots & y \text{ имѣетъ знакъ } +a. \\
\text{II. } b^2-4ac>0 & \left\{\begin{array}{l} \\ x'<x<x'' \ \ldots\ldots \\ \\ \end{array}\right. & y \text{ имѣетъ знакъ } -a. \\
 & x>x'' \ \ldots\ldots & y \text{ имѣетъ знакъ } +a.
\end{array}$$

480. Примѣры. I. Триномъ $x^2 - 2x + 3$ имѣетъ корни мнимые, ибо $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 3 < 0$; притомъ коэффиціентъ при x^2 положителенъ, слѣдов. при всѣхъ значеніяхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ остается неизмѣнно положительнымъ.

II. Триномъ $-4x^2 + 12x - 9$ имѣетъ корни дѣйствительные равные, ибо $b^2 - ac = 6^2 - (-4) . (-9) = 0$; притомъ коэффиціентъ при x^2 отрицателенъ, слѣд. при всѣхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ остается неизмѣнно отрицательнымъ..

III. Триномъ $x^2 - 6x + 5$ имѣетъ корни дѣйствительные неравные: $x' = 1$ и $x'' = 5$. Слѣд. при всякомъ значеніи x отъ $-\infty$ до $+1$, а также при всѣхъ x-хъ отъ $+5$ до $+\infty$ триномъ положителенъ; при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ между $+1$ и $+5$, онъ отрицателенъ.

IV. Корни тринома $15 - 2x - 8x^2$ суть $-\frac{5}{4}$ и $+\frac{3}{2}$; слѣд. при всѣхъ x между $-\infty$ и $-\frac{5}{4}$, а также между $+\frac{3}{2}$ и $+\infty$ онъ отрицателенъ; при всякомъ x между предѣлами $-\frac{5}{4}$ и $+\frac{3}{2}$ положителенъ.

481. Слѣдствія.—I. *Если триномъ $ax^2 + bx + c$ мѣняетъ знакъ при подстановкѣ въ него послѣдовательно вмѣсто x сначала количества α, потомъ β, то уравненіе*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имѣетъ корни дѣйствительные неравные и одинъ изъ нихъ, и только одинъ, заключается между α и β.

Во-первыхъ, уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные неравные, ибо въ противномъ случаѣ триномъ при всякомъ x сохранялъ бы знакъ коэффиціента a, что противорѣчитъ условію.

Во-вторыхъ, обозначивъ корни черезъ x' и x'' и полагая $x' < x''$, имѣемъ слѣдующую скалу дѣйствительныхъ значеній x:

$$\underbrace{-\infty\ .\ .\ .}_{1}\ x'\ \underbrace{.\ .\ .\ .}_{2}\ x''\ \underbrace{.\ .\ .\ +\infty}_{3}.$$

Пусть, напр. при $x = \alpha$ триномъ имѣетъ знакъ коэффиціента a, то α заключается внѣ корней, т.-е. или въ (1) или въ (3) области; при $x = \beta$ триномъ, мѣняя знакъ, получитъ знакъ $-a$, а потому β содержится между корнями, т.-е. во (2) области. Такимъ образомъ, если α находится въ (1) области, то между α и β заключается корень x; если же α лежитъ въ области (3), то между α и β будетъ корень x''.

Обратно: *Если между двумя числами α и β заключается корень ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$, и только одинъ, то знаки, принимаемые первою частью ур—нія при подстановкѣ вмѣсто x чиселъ α и β, противоположны.*

По условію, между α и β заключается только одинъ корень: пусть это будетъ меньшій корень x', и пусть $\alpha < \beta$; тогда скала дѣйствительныхъ значеній x будетъ

$$-\infty\ .\ .\ .\ .\ \alpha\ .\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .\ .\ \beta\ .\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .\ .\ +\infty,$$

откуда видно, что при $x = \alpha$, какъ лежащемъ внѣ корней, триномъ имѣетъ знакъ $+a$, а при $x = \beta$, какъ лежащемъ между корнями, знакъ $-a$, противоположный первому.

II. *Когда триномъ $ax^2 + bx + c$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ при подстановкѣ вмѣсто x количествъ α и β, то между α и β заключается четное число* (0 *или* 2) *корней уравненія $ax^2 + bx + c = 0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ имѣетъ два корня, слѣд., между α и β могутъ заключаться 0 или 1, или 2 корня; но въ данномъ случаѣ между α и β не можетъ содержаться только *одинъ* корень, ибо въ этомъ предположеніи, на осн. слѣд. I, обр., результаты подстановокъ α и β вмѣсто x имѣли бы разные знаки, что противорѣчитъ условію. Слѣд. или между α и β заключаются оба корня, или ни одного не содержится.

Приложенія.

482. I. *Когда $ac < 0$, корни ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$ — дѣйствительные, неравные и имѣютъ противоположные знаки.*

Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ вмѣсто x нуль, замѣчаемъ, что триномъ обращается въ c, а слѣд. знакъ его противоположенъ знаку коэффиціента a. Слѣд. ур. имѣетъ корни дѣйствительные, неравные, и такъ какъ 0 заключается между этими корнями, они имѣютъ противоположные знаки.

483. II. *Когда* A *и* B *имѣютъ одинаковые знаки, ур—ніе* $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} = C$ *имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и одинъ изъ нихъ, и только* ***одинъ, заключается между α и β.***

Дадимъ ур—нію цѣлый видъ, собравъ всѣ члены въ первую часть; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$A(x-\beta) + B(x-\alpha) - C(x-\alpha)(x-\beta) = 0.$$

Замѣнивъ x сначала количествомъ α, потомъ β, получимъ результаты: $A(\alpha-\beta)$, $B(\beta-\alpha)$; такъ какъ A и B — одного знака, разности же $\alpha-\beta$ и $\beta-\alpha$ имѣютъ знаки противоположные, то заключаемъ, что оба результата имѣютъ противоположные знаки, а потому: уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и одинъ, и только одинъ изъ нихъ, содержится между α и β.

Рѣшимъ теперь два вопроса, имѣющіе обширное приложеніе въ изслѣдованіи задачъ 2-й степени, въ виду чего совѣтуемъ читателю изучить эти два вопроса возможно тщательнѣе.

484. Вопросъ I.—*Не рѣшая уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, расположить корни этого уравненія* (когда они дѣйствительные и неравные) *и данное число λ въ порядкѣ возрастающихъ значеній.*

Это значитъ, не рѣшая уравненія, опредѣлить, будетъ ли данное число λ меньше меньшаго корня, или оно будетъ заключаться между корнями, или, наконецъ, будетъ больше большаго корня. Притомъ для сокращенія письма первую часть ур—нія, т.-е. триномъ $ax^2 + bx + c$ будемъ обозначать символомъ $f(x)$ (читается: функція x-са), такъ что $f(x) = ax^2 + bx + c$; результатъ же подстановки въ триномъ числа λ вмѣсто x будемъ обозначать знакомъ $f(\lambda)$, такъ что $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Напр. $f(2)$ будетъ означать $4a + 2b + c$; $f(0)$ будетъ означать c и т. п.

Переходимъ къ рѣшенію вопроса. Подставимъ λ вмѣсто x въ первую часть ур—нія и вычислимъ $a\lambda^2 + b\lambda + c$ или $f(\lambda)$; такимъ образомъ мы будемъ знать знакъ $f(\lambda)$. Во-первыхъ, если окажется, что $f(\lambda)$ равняется нулю, то это будетъ значить, что λ есть одинъ изъ корней уравненія; и можно непосредственно узнать, будетъ ли λ большій, или это будетъ меньшій корень уравненія: стоитъ только сравнить λ съ полусуммою корней, $-\frac{b}{2a}$, которая заключается между корнями. Если $\lambda > -\frac{b}{2a}$, то λ есть большій корень, въ противномъ случаѣ, λ будетъ меньшій корень.

Если окажется, что знакъ $f(\lambda)$ противоположенъ знаку коэффиціента a, т.-е. если $a \,.\, f(\lambda) < 0$, то это будетъ служить вѣрнымъ признакомъ того, что корни тринома дѣйствительные и неравные, и что число λ содержится между корнями. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ дѣйствительныхъ равныхъ и въ случаѣ мнимыхъ корней триномъ всегда имѣетъ знакъ одинаковый съ a, слѣд. въ этихъ случаяхъ всегда будетъ $af(\lambda) \geqslant 0$. Значитъ, разъ $af(\lambda) < 0$, корни дѣйствительные и неравные; а въ этомъ случаѣ знакъ $f(\lambda)$ противоположенъ знаку a только для x, лежащихъ между корнями, слѣд. λ содержится между корнями. Назвавъ корни чрезъ x и x', полагая $x' < x''$, будемъ имѣть слѣдующее расположеніе чиселъ x', x'' и λ на скалѣ дѣйствительныхъ чиселъ:

$$. \;.\; . x' . < . \lambda . < x'' . \;.\; . \;.$$

Если же окажется, что знакъ $f(\lambda)$ одинаковъ со знакомъ a, т.-е. если $a \,.\, f(\lambda) > 0$, то мы не знаемъ напередъ, будутъ ли корни дѣйствительные, или они мнимые; поэтому нужно опредѣлить знакъ реализанта $(b^2 - 4ac)$: пусть будетъ $b^2 - 4ac > 0$. Тогда корни ур—нія будутъ дѣйствительные и неравные; назовемъ ихъ, попрежнему, x' и x'', полагая $x' < x''$. Число λ теперь уже не будетъ находиться между корнями; для λ между корнями было бы $a f(\lambda) < 0$. Значитъ, λ находится внѣ корней, т.-е. либо $\lambda < x'$, либо $\lambda > x''$. Чтобы рѣшить, какой изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, нужно сравнить λ *съ какимъ-нибудь числомъ, лежащимъ между корнями;* одно такое число всегда намъ извѣстно, это—полусумма корней, $-\frac{b}{2a}$ (см. § 358). Если окажется при этомъ, что $\lambda < -\frac{b}{2a}$, то, находясь внѣ корней, λ будетъ меньше меньшаго корня, и расположеніе чиселъ на скалѣ восходящихъ дѣйств. чиселъ будетъ такое:

$$-\infty \;.\; . \;.\; \lambda \;.\; . \;.\; x' \;.\; . \;.\; x'' \;.\; . \;.\; +\infty$$

Если же окажется, что $\lambda > -\frac{b}{2a}$, то, будучи внѣ корней, λ будетъ больше большаго корня, и распорядокъ чиселъ x', x'' и λ будетъ таковъ:

$$-\infty \;.\; . \;.\; x' \;.\; . \;.\; x'' \;.\; . \;.\; \lambda \;.\; . \;.\; +\infty$$

Примѣчаніе. Когда корни различны по знаку, то 0 будетъ заключаться между корнями. Слѣдов., если λ есть число положительное, то оно будетъ больше большого корня; если же $\lambda < 0$, то оно будетъ $<$ меньшаго корня.

Примѣръ 1. *Дано уравненіе $x^2 - 22x + 80 = 0$. Требуется расположить въ порядкѣ возрастающихъ значеній корни x' и x' и число 12!*

Подставляя въ первую часть число 12 вмѣсто x, находимъ: $f(12) = 12^2 - 22 \times 12 + 80 = -40$: результатъ подстановки имѣетъ знакъ противоположный знаку коэффиціента при x^2; заключаемъ, что корни ур—нія дѣйствительные и неравные (пусть $x' < x$) и что 12 заключается въ интервалѣ корней:

$$. \; . \; . \; x' < 12 < x'' \; . \; . \; .$$

Примѣръ 2. *Расположить въ порядкѣ возрастающихъ значеній корни x' и x''* (полагая $x' < x$) *того же ур—нія и число 20.*

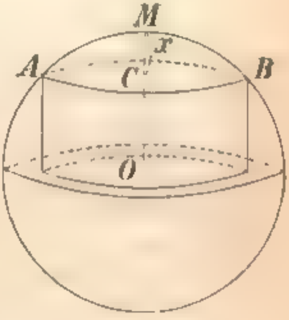
Подстановка 20 вмѣсто x даетъ $f(20) = 20^2 - 22 \times 20 + 80 > 0$, т.-е. одинаковаго знака съ первымъ коэффиціентомъ. Отсюда нельзя заключить, будутъ ли корни дѣйствительные или мнимые; вычисляемъ реалиаантъ; для даннаго ур нія беремъ $b'^2 - ac$ $(11)^2 - 1.80$, что > 0, слѣд. корни дѣйствительные неравные. Такъ какъ $f(20) > 0$, то 20 находится внѣ корней. Далѣе: 20 полусуммы корней (11), слѣд. 20 больше большого корня. Итакъ:

$$x' \; . \; . \; . < \; . \; . \; . \; x'' \; . \; . \; . < . \; 20.$$

Примѣръ 3. *Пересѣчь шаръ радіуса* R *плоскостью такъ, чтобы объемъ сферическаго сегмента* AMB *былъ равновеликъ объему цилиндра, имѣющаго тоже основаніе, а высоту равную разстоянію центра шара отъ этого общаго основанія.* (Черт. 55).

Пусть $MC = x$; ур—віе задачи будетъ

$$\frac{\pi x^2}{3}(3R - x) = \pi(R - x) \, . \, \overline{AC}^2 = \pi(R - x)x(2R - x).$$



Черт. 55.

Одинъ изъ корней, $x = 0$, очевиденъ à priori; раздѣливъ ур. на πx, получимъ

$$3(R - x)(2R - x) - x(3R - x) = 0,$$

или

$$2x^2 - 6Rx + 3R^2 = 0.$$

Чтобы рѣшеніе этого ур—нія служило отвѣтомъ на задачу, нужно, чтобы оно было дѣйствительнымъ, положительнымъ и $< R$.

$b'^2 - ac$ $(3R)^2 - 6R^2 = 3R^2$, — количеству положительному: слѣдоват., корня дѣйствительны. Ихъ произведеніе, равное $\frac{3}{2}R^2$, положительно, слѣд. оба корня имѣютъ одинаковые знаки; сумма ихъ, равная 3R, положительна: сл. оба корня положительны. Подставивъ въ первую часть R вмѣсто x, находимъ въ результатѣ $-R^2$: слѣд, R заключается между корнями, т.-е., называя корни буквами x' и x'', и полагая $x' < x''$, имѣемъ

$$x' < R < x'':$$

заключаемъ, что одинъ изъ корней меньше R, другой больше R.

Такимъ образомъ задача имѣетъ *одно рѣшеніе*, выражаемое меньшимъ корнемъ

$$x' = \frac{R(3 - \sqrt{3})}{3}.$$

Примѣръ 4. *Описать около шара такой конусъ, чтобы отношеніе его полной поверхности къ поверхности шара было равно данному числу m.*

Легко видѣть, что если за неизвѣстное принять высоту конуса x, уравненіе задачи будетъ

$$x^2 - 4mRx + 8mR^2 = 0.$$

Чтобы x, выведенный изъ этого ур—нія, представлялъ рѣшеніе данной задачи, необходимо, чтобы онъ былъ количествомъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и $> 2R$. Корни будутъ дѣйствительны, если $(2Rm)^2 - 8R^2m > 0$, или $m(m-2) > 0$, или, наконецъ, такъ какъ $m > 0$, если $m > 2$. Пусть это условіе удовлетворено. Произведеніе корней положительно, слѣд. они имѣютъ одинаковые знаки; сумма ихъ $(4mR)$ положительна, сл. оба они положительны. Остается разсмотрѣть, какова ихъ величина сравнительно съ $2R$. Подстановка $2R$ вмѣсто x въ первую часть даетъ $-4R^2$, т.-е. результатъ одинаковаго знака съ коэффиціентомъ при x^2 заключаемъ, что $2R$ лежитъ внѣ корней; слѣд. или оба корня $< 2R$, или оба $> 2R$. Полусумма корней $= 2mR$, а какъ $m > 2$, то она не меньше $4R$; но $2R$ меньше этой величины, сл. оба корня больше $2R$, и задача имѣетъ *2 рѣшенія.*

485. Вопросъ II.—*Не рѣшая уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, распредѣлить въ порядкѣ возрастающихъ значеній корни* (если они дѣйствительные неравные) *и два числа λ и μ, полагая $\lambda < \mu$?*

Подставляемъ въ триномъ $ax^2 + bx + c$ вмѣсто x сначала λ, потомъ μ, и вычисляемъ результаты $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ этихъ подстановокъ. Здѣсь нужно различать два случая: 1) $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ имѣютъ одинаковый знакъ; 2) эти числа имѣютъ противные знаки.

1) Пусть $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ имѣютъ знаки разные, что можно записать въ видѣ $f(\lambda) \,.\, f(\mu) < 0$. По § 481 мы знаемъ, что это вѣрный признакъ, что уравненіе имѣетъ корни дѣйствительные и неравные $(x' < x')$, и что только одинъ изъ нихъ заключается между λ и μ; слѣд. будетъ одно изъ двухъ:

$$\text{либо } \lambda < x' < \mu < x'', \quad \text{либо } x' < \lambda < x'' < \mu.$$

Первое будетъ тогда, когда $a \,.\, f(\lambda) > 0$; второе имѣетъ мѣсто тогда, когда $a \,.\, f(\lambda) < 0$. Впрочемъ, о томъ, имѣетъ ли мѣсто первое расположеніе, или второе, можно судить и иначе. Такъ какъ (идя слѣва направо) числа λ, μ и корни расположены въ порядкѣ возрастанія ихъ значеній, то, очевидно, въ первомъ случаѣ $\lambda + \mu < x' + x$, т.-е. $< -\frac{b}{a}$; во второмъ же случаѣ $\lambda + \mu > x' + x$, т.-е. $> -\frac{b}{a}$.

Заключаемъ, что если $\lambda + \mu$ меньше $-\frac{b}{a}$, то имѣетъ мѣсто первый случай; если же $\lambda + \mu$ больше $-\frac{b}{a}$, то имѣетъ мѣсто второй случай.

2) Пусть $f(\lambda)$ и $f(\mu)$ имѣютъ одинаковые знаки, что можно записать такъ: $f(\lambda) \,.\, f(\mu) > 0$. Этотъ случай, въ свою очередь, подраздѣляется на два другіе, смотря потому, имѣетъ ли $f(\lambda)$ знакъ одинаковый съ a, или имѣетъ знакъ противоположный знаку a.

Если $a \,.\, f(\lambda) < 0$, то ур. имѣетъ корни дѣйствительные неравные, и оба числа, λ и μ, находятся между корнями:

$$x' \;.\;.\;.\; \lambda \;.\;.\;.\; \mu \;.\;.\;.\; x''.$$

Если $a \,.\, f(\lambda) > 0$, то еще нужно убѣдиться, имѣетъ ли ур. дѣйствительные неравные корни, и для этого надо опредѣлить знакъ реализанта $b^2 - 4ac$. Пусть оказалось, что $b^2 - 4ac > 0$, и сл., ур. имѣетъ дѣйствительные неравные корни (пусть $x' < x''$). Ни λ, ни μ не содержатся между корнями. Слѣд., возможно одно изъ слѣдующихъ трехъ распредѣленій:

$$x' \;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.\; \lambda \;.\;.\;.\; \mu;$$

либо $$\lambda \;.\;.\;.\; x' \;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.\; \mu;$$

либо $$\lambda \;.\;.\;.\; \mu \;.\;.\;.\; x' \;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.$$

Когда имѣетъ мѣсто то, или другое, или третье распредѣленіе, легко рѣшается сравненіемъ данныхъ чиселъ съ полусуммою корней, $-\frac{b}{2a}$, которая всегда содержится между корнями. Если $-\frac{b}{2a} > \lambda$, то имѣемъ 1-е распредѣленіе; если $\lambda < -\frac{b}{2a} < \mu$, то имѣетъ мѣсто 2-е распредѣленіе, а если $\mu < -\frac{b}{2a}$, то, очевидно, имѣемъ дѣло съ третьимъ.

Примѣръ. *Указать расположеніе чиселъ:* -1 *и* 4 *относительно корней уравненія* $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

Такъ какъ первый и третій коэффиціенты имѣютъ знаки противоположные, то корни ур—нія дѣйствительные и неравные.

Подставляя вмѣсто x послѣдовательно данныя числа, имѣемъ $f(-1) = -$, $f(4) = -$: знаки одинаковые; при этомъ $a \,.\, f(\lambda)$ или $-1 \,.\, f(-1) > 0$, заключаемъ, что числа -1 и $+4$ не находятся между корнями. Полусумма корней, $+\frac{3}{2}$, больше -1, но меньше $+4$; заключаемъ, что меньшій корень больше -1, а большій корень меньше 4, и распредѣленіе корней и чиселъ -1 и $+4$, въ восходящемъ порядкѣ, будетъ таково:

$$.\;.\;.\; -1 \;.\;.\;.\; x' \;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.\; +4 \;.\;.\;.$$

486. Задача. *Дать общую форму условій, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы корни уравненія*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

предполагая, что они дѣйствительны, были оба больше, или оба меньше даннаго количества λ.

Во-первыхъ, согласно требованію, необходимо, чтобы λ лежало внѣ корней, а потому подстановка этого числа на мѣсто x въ триномъ $ax^2 + bx + c$ должна давать результатъ одинаковаго знака съ a, т.-е. должно быть

$$a\,(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0.$$

Это условіе выражаетъ только, что λ не содержится между корнями; остается выразить, что:

1) въ первомъ случаѣ оба корня больше λ, т.-е.

$x' > \lambda$ и $x'' > \lambda$, откуда $x' + x'' > 2\lambda$, или $\frac{x' + x''}{2} > \lambda$, или, наконецъ,

$$-\frac{b}{2a} > \lambda.$$

Итакъ, условія, *необходимыя* для того, чтобы оба корня были больше λ, таковы:

$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0$ и $-\frac{b}{2a} > \lambda$, или короче, $a \,.\, f(\lambda) > 0$ и $-\frac{b}{2a} > \lambda$.

Будучи необходимы, они вмѣстѣ съ тѣмъ и *достаточны*, ибо какъ скоро они выполнены, то изъ перваго слѣдуетъ, что λ не содержится между корнями, а изъ второго должно заключить, что λ меньше каждаго изъ корней, ибо, допустивъ, что корни меньше λ, имѣли бы

$$x' + x'' < 2\lambda, \quad \text{или} \quad -\frac{b}{2a} < \lambda.$$

2) Такимъ же образомъ найдемъ, что условія *необходимыя* и *достаточныя* для того, чтобы оба корня были меньше λ, будутъ:

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) > 0 \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2a} < \lambda, \quad \text{или} \quad a \,.\, f(\lambda) > 0 \quad \text{и} \quad -\frac{b}{2a} < \lambda.$$

487. Задача. *Дать общую форму условія, необходимаго и достаточнаго для того, чтобы данное количество λ содержалось между корнями ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$.*

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки числа λ на мѣсто x въ триномъ $ax^2 + bx + c$ имѣлъ знакъ, противоположный знаку a.

Каковъ бы ни былъ знакъ a, это условіе будетъ

$$a(a\lambda^2 + b\lambda + c) < 0, \quad \text{или} \quad a \,.\, f(\lambda) < 0.$$

488. Задача. *Дать общую форму условій, необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы квадратный триномъ сохранялъ неизмѣнно одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были дѣйствит. значенія x?*

Триномъ не можетъ сохранять одинаковый знакъ при всякомъ x, если корни его будутъ дѣйствит. неравные, ибо въ этомъ случаѣ онъ дважды мѣняетъ знакъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$; когда корни его дѣйств. равные, то онъ сохраняетъ знакъ a при всякомъ x, кромѣ $x = -\frac{b}{2a}$, ибо тутъ онъ обращается въ 0; и только въ одномъ случаѣ знакъ его *неизмѣнно всегда* будетъ одинъ и тотъ же: когда корни его—*мнимые*. Итакъ:

1) Триномъ *всегда*, при всякомъ x, будетъ положителенъ, если

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{и вмѣстѣ съ тѣмъ} \quad a > 0;$$

2) Триномъ *всегда*, при всякомъ x, будетъ отрицателенъ, если

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \text{и вмѣстѣ съ тѣмъ} \quad a < 0.$$

Очевидно, что это и суть необходимыя и достаточныя условія, при которыхъ требованіе задачи будетъ удовлетворено.

489. Задача. Теорема о знакѣ квадратнаго тринома можетъ служить для послѣдовательнаго вычисленія сколькихъ угодно десятичныхъ цифръ несоизмѣримаго корня. Пусть, напр., дано уравненіе $x^2 + 3x - 7 = 0$, котораго одинъ изъ корней заключается между 1 и 2. Очевидно, цѣлая часть этого корня есть 1.

Для вычисленія перваго десятичнаго знака положимъ $x = 1 + \frac{y}{10}$. Цѣлая часть y-ка, очевидно, будетъ первымъ десятичнымъ знакомъ x. Подстановка дастъ

$$\left(1 + \frac{y}{10}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{y}{10}\right) - 7 = 0, \quad \text{или} \quad y^2 + 50y - 300 = 0 \; . \; . \; . \; (1).$$

Подставляемъ вм. y, послѣдовательно, 0, 1, 2, 3.... до тѣхъ поръ пока не получимъ двухъ послѣдовательныхъ результатовъ съ противоположными знаками. Т. о. найдемъ, что положительный корень ур—нія (1) содержится между 5 и 6. Цѣлая часть y-ка равна, слѣд., 5: это и есть первый десятичный знакъ корня x.

Зная это, положимъ теперь $y = 5 + \frac{z}{10}$, гдѣ цѣлая часть z будетъ первымъ десятичнымъ знакомъ y, и слѣдов., вторымъ десятичнымъ знакомъ x. Ур. въ z будетъ

$$\left(5 + \frac{z}{10}\right)^2 + 50\left(5 + \frac{z}{10}\right) - 300 = 0, \quad \text{или} \quad z^2 + 600z - 2500 = 0.$$

Подобно предыдущему найдемъ, что это ур. имѣетъ корень, содержащійся между 4 и 5. Второй десятичный знакъ корня x равенъ, значитъ, 4. Итакъ, предложенное ур. имѣетъ корень $x = 1{,}54$. съ точн. до 0,01. Продолжая указаннымъ путемъ, можемъ найти сколько угодно дальнѣйшихъ знаковъ.

490. Задача. *Сравнить корни двухъ уравненій, изъ которыхъ одно— квадратное, другое — первой степени.*

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ и $\varphi(x) = a'x + b' = 0$ — два данныхъ уравненія. Пусть дѣйствительные корни перваго суть x_1 и x_2 (полагая, что $x_1 < x_2$), и ξ_1 корень второго. Полагаемъ $a > 0$ и $a' > 0$.

Чтобы опредѣлить положеніе числа ξ_1 относительно чиселъ x_1 и x_2, нужно знать знакъ результата подстановки числа ξ_1 въ $f(x)$. Замѣчая, что $\xi_1 = -\frac{b'}{a'}$, имѣемъ

$$f(\xi_1) = f\left(-\frac{b'}{a'}\right) = \frac{1}{a'^2}[ab'^2 - ba'b' + ca'^2],$$

или, положивъ, для краткости, $ab'^2 - ba'b' + ca'^2 = \Delta$ (Δ называется *результантомъ* данныхъ ур—ній), можемъ написать

$$f(\xi_1) = \frac{1}{a'^2} \cdot \Delta.$$

Такъ какъ $\frac{1}{a'^2}$ всегда положительно, ибо коэффиціенты предполагаются дѣйствительными, то заключаемъ, что $f(\xi_1)$ имѣетъ тотъ же знакъ, что и Δ: откуда прямо слѣдуетъ, что:

Если $a\Delta < 0$, ξ_1 заключается между корнями ур—нія $f(x) = 0$, и расположеніе трехъ корней таково:

$$x_1 < \xi_1 < x_2.$$

Если $a\Delta = 0$, т.-е. если $\Delta = 0$, то $f(\xi_1) = 0$, а это значитъ, что ξ_1 равно одному изъ корней квадратнаго ур—нія, и слѣд., имѣетъ мѣсто одно изъ слѣдующихъ распредѣленій:

$$\text{или} \quad \xi_1 = x_1 < x_2, \quad \text{или} \quad x_1 < x_2 = \xi_1 \;.\;.\;.\; \text{I}.$$

Наконецъ, если $a\Delta > 0$, ξ_1 находится внѣ интервалла корней квадратнаго ур—нія, и слѣд. распорядокъ корней будетъ

$$\text{либо} \quad \xi_1 < x_1 < x_2, \quad \text{либо} \quad x_1 < x_2 < \xi_1 \;.\;.\;.\; \text{II}.$$

Если замѣтимъ, что $\frac{x_1 + x_2}{2}$ всегда заключается между корнями квадратнаго ур—нія, то тотчасъ усматриваемъ, что въ строкахъ I и II расположенія, указанныя слѣва, имѣютъ мѣсто, если окажется, что $\xi_1 < \frac{x_1 + x_2}{2}$, а расположенія, написанныя справа, имѣютъ мѣсто, если будетъ $\xi_1 > \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Замѣняя ξ_1 и $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ихъ значеніями въ коэффиціентахъ, найдемъ, что лѣвымъ распорядкамъ отвѣчаетъ соотношеніе

$$-\frac{b'}{a'} < -\frac{b}{2a}, \quad \text{или} \quad \frac{a'b'}{a'^2} > \frac{ab}{2a^2}, \quad \text{или} \quad aa'(2ab' - ba') > 0,$$

а правымъ — соотношеніе

$$-\frac{b'}{a} > -\frac{b}{2a}, \quad \text{или} \quad \frac{a'b'}{a'^2} < \frac{ab}{2a^2}, \quad \text{или} \quad aa'(2ab' - ba') < 0.$$

Это изслѣдованіе можно резюмировать въ формѣ слѣдующей таблицы:

Если		то
$a\Delta < 0$, ...		$x_1 < \xi_1 < x_2$
$a\Delta = 0$,	$aa'(2ab' - ba') < 0$ . . .	$x_1 < x_2 = \xi_1$
	$aa'(2ab' - ba') = 0$ . . .	$x_1 = x_2 = \xi_1$
	$aa'(2ab' - ba') > 0$ . . .	$x_1 = \xi_1 < x_2$
$a\Delta > 0$, и $b^2 - 4ac \geqslant 0$,	$aa'(2ab' - ba') < 0$ . . .	$x_1 < x_2 < \xi_1$
	$aa'(2ab' - ba') > 0$ . . .	$\xi_1 < x_1 < x_2$

Примѣчанія. I. Эта таблица показываетъ, что когда $a\Delta \leq 0$, корни квадратнаго ур—нія дѣйствительны. Но можно и прямо показать, что если $a\Delta < 0$, то $b^2 - 4ac$ не можетъ быть отрицательнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, написавъ $a\Delta$ въ видѣ

$$\frac{1}{4}[(2ab' - ba')^2 - (b^2 - 4ac)a'^2],$$

непосредственно усматриваемъ, что при $b^2 - 4ac < 0$ было бы $a\Delta > 0$.—Изъ этого выраженія легко видѣть еще, что если $a\Delta = 0$ и $2ab' - ba' = 0$, то необходимо должно быть $b^2 - 4ac = 0$, что показываетъ и таблица. Наконецъ, если $a\Delta > 0$ и корни x_1 и x_2 дѣйствительны, то не можетъ быть $2ab' - ba' = 0$.

II. Если $a\Delta > 0$, корни x_1 и x_2 могутъ и не быть дѣйствительными; но если они мнимы, то необходимо $a\Delta > 0$.

491. Задача. *Сравнить между собою корни двухъ квадратныхъ уравненій.*

Пусть имѣемъ квадратныя ур—нія

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0,\ \varphi(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

въ которыхъ $a \gtrless 0$ и $a' \gtrless 0$; и пусть дѣйствительные корни перваго будутъ x_1 и x_2 $(x_1 > x_2)$, а второго ξ_1 и ξ_2 $(\xi_1 > \xi_2)$.

Чтобы опредѣлить положеніе корней ξ_1 и ξ_2 относительно x_1 и x_2, разсмотримъ знаки подстановокъ ξ_1 и ξ_2 въ $f(x)$, и для этого вычислимъ произведеніе $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2)$ и сумму $f(\xi_1) + f(\xi_2)$.

1) *Произведеніе* $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) = (a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)(a\xi_2^2 + b\xi_2 + c) = a^2\xi_1^2\xi_2^2 + ab\xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2) + ac(\xi_1^2 + \xi_2^2) + b^2\xi_1\xi_2 + bc(\xi_1 + \xi_2) + c^2$;

или, подставивъ $\frac{c'}{a'}$ вмѣсто $\xi_1\xi_2$, и $-\frac{b'}{a'}$ вмѣсто $\xi_1 + \xi_2$, имѣемъ

$$f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) = \frac{a^2c'^2}{a'^2} - \frac{abc'b'}{a'^2} + ac\frac{b'^2 - 2a'c'}{a'^2} + \frac{b^2c'^2}{a'^2} - \frac{bcb'}{a'} + c^2$$

$$= \frac{1}{a'^2}[a^2c'^2 - abc'b' + acb'^2 - 2aca'c' + b^2c'^2 - bca'b' + a'^2c^2]$$

$$= \frac{1}{a'^2}\{a^2c'^2 - 2aca'c' + a'^2c^2 - abc'b' + acb'^2 + b^2c'^2 - bca'b'\}$$

$$= \frac{1}{a'^2}[(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')] = \frac{1}{a'^2} \cdot \Delta,$$

называя буквою Δ скобочное выраженіе (*результантъ* данныхъ ур—ній).

2) *Сумма* $f(\xi_1) + f(\xi_2) = a(\xi_1^2 + \xi_2^2) + b(\xi_1 + \xi_2) + 2c$

$$= a \cdot \frac{b'^2 - 2a'c'}{a'^2} - \frac{bb'}{a'} + 2c = \frac{ab'^2 - 2aa'c' - bb'a' + 2ca'^2}{a'^2}$$

$$= \frac{b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca')}{a'^2} = \frac{1}{a'^2} \cdot \mathrm{P},$$

называя буквою P выраженіе $b'(ab' - ba') - 2a'(ac' - ca')$.

Итакъ, знаки произведенія $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2)$ и суммы $f(\xi_1) + f(\xi_2)$ — соотвѣтственно тѣ же, что и знаки Δ и P.

Подобнымъ же образомъ нашли бы, что знаки $\varphi(x_1) . \varphi(x_2)$ и $\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ — соотвѣтственно тѣ же, что и выраженій Δ и Q, гдѣ $Q = 2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')$.

Теперь можемъ приступить къ сравненію корней данныхъ ур-ній.

A. Случай, когда данныя уравненія не имѣютъ общаго корня. Въ этомъ случаѣ $\Delta \gtrless 0$; въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\Delta = 0$, т.-е. было бы $f(\xi_1) . f(\xi_2) = 0$, то одинъ изъ этихъ множителей былъ бы нулемъ; если бы, напр., было $f(\xi_1) = 0$, то ξ_1 — корень ур-нія $\varphi(x) = 0$ обращалъ бы и $f(x)$ въ нуль, слѣд., былъ бы общимъ корнемъ. Δ, отличное отъ нуля, можетъ быть или < 0, или > 0. Пусть, во-первыхъ:

α) $\Delta < 0$. Легко видѣть, что Δ можно представить въ формахъ

$$4\Delta = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') \; . \; . \; . \; (m)$$

$$4a^2\Delta = (b^2 - 4ac)(ab' - ba')^2 - [2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')]^2 \; . \; . \; . \; (n)$$

$$4a'^2\Delta = (b'^2 - 4a'c')(ab' - ba')^2 - [2a'(ac' - ca') - b'(ab' - ba')]^2 \; . \; . \; . \; (p).$$

Тождество (m) показываетъ, что $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ не могутъ быть ни противоположны по знаку, ни нулями. Тождества (n) и (p) показываютъ, что эти выраженія могутъ быть положительны, либо отрицательны.

Слѣдовательно, когда $\Delta < 0$, то или оба уравненія имѣютъ корни дѣйствительные, или оба имѣютъ корни мнимые. Пусть будетъ $b^2 - 4ac > 0$; въ такомъ случаѣ будетъ $b'^2 - 4a'c' > 0$; ξ_1 и ξ_2 будутъ корни дѣйствительные неравные.

Такъ какъ $f(\xi_1) . f(\xi_2)$ отрицательно, то множители имѣютъ знаки противоположные; слѣд., одно изъ чиселъ ξ_1 и ξ_2 заключается между корнями ур-нія $f(x) = 0$, другое внѣ этихъ корней: между ξ_1 и ξ_2 заключается только одинъ изъ корней ур-нія $f(x) = 0$, и корни будутъ представлять одно изъ распредѣленій:

$$(1) \qquad x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2,$$

либо

$$(2) \qquad \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2.$$

Первое распредѣленіе имѣетъ мѣсто, если будетъ $\xi_1 + \xi_2 > x_1 + x_2$; второе — когда будетъ $\xi_1 + \xi_2 < x_1 + x_2$.

Итакъ: распорядокъ (1) имѣетъ мѣсто, если

$$-\frac{b'}{a'} > -\frac{b}{a}, \quad \text{или} \quad aa'(ab' - ba') < 0;$$

распорядокъ (2) имѣетъ мѣсто, если

$$-\frac{b'}{a'} < -\frac{b}{a}, \quad \text{или} \quad aa'(ab' - ba') > 0.$$

β) Пусть $\Delta > 0$. Тождества (n) и (p) показываютъ, что выраженія $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ не могутъ быть ни отрицательными, ни нулями. Слѣд., корни того и другого ур-нія всегда дѣйствительные и неравные.

Такъ какъ произведеніе $f(\xi_1) . f(\xi_2)$ положительно, его множители имѣютъ одинаковый знакъ. Опредѣляемъ этотъ знакъ посредствомъ суммы $f(\xi_1) + f(\xi_2)$.

Но знакъ этой суммы одинаковъ съ P. Если $aP < 0$, $af(\xi_1)$ и $af(\xi_2)$ отрицательны, и корни ξ_1 и ξ_2 лежатъ между x_1 и x_2: имѣетъ мѣсто распорядокъ

$$(3) \qquad x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2.$$

Если $aP > 0$, $af(\xi_1)$ и $af(\xi_2)$ положительны, и корни ξ_1 и ξ_2 лежатъ внѣ интервалла корней x_1 и x_2: можетъ имѣть мѣсто троякое распредѣленіе корней:

либо $(4) \qquad \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2,$

либо $(5) \qquad x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2,$

либо $(6) \qquad \xi_1 < \xi_2 < x_1 < x_2.$

Когда имѣетъ мѣсто то, или другое, или третье?

Такъ какъ $\Delta > 0$, $\varphi(x_1) \,.\, \varphi(x_2) > 0$: въ первомъ случаѣ x_1 и x_2 находятся между ξ_1 и ξ_2, слѣд., $a'\varphi(x_1)$ и $a'\varphi(x_2)$ отрицательны, а потому ихъ сумма $a'[\varphi(x_1) + \varphi(x_2)] = a'Q$ отрицательна.

Въ случаяхъ распредѣленій (5) и (6), очевидно, $a'Q > 0$.

Для $(5) \quad x_1 + x_2 < \xi_1 + \xi_2,$ и слѣд. $aa'(ab' - ba') < 0;$

для $(6) \quad x_1 + x_2 > \xi_1 + \xi_2,$ и слѣд. $aa'(ab' - ba') > 0.$

Такимъ образомъ отличаемъ распредѣленіе (5) отъ (6).

B. Случай, когда данныя уравненія имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одинъ общій корень.

Въ этомъ случаѣ $\Delta = 0$. Тождества (n) и (p) показываютъ, что если будетъ $ab' - ba' = 0$ вмѣстѣ съ $P = 0$ или $Q = 0$, то реализанты $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ могутъ быть положительны, нули, либо отрицательны: при этомъ — одновременно, ибо также и $ac' - ca' = 0$, и оба уравненія должны либо имѣть общіе корни, либо не имѣть дѣйствительныхъ корней. Если же $ab' - ba' \neq 0$, $b^2 - 4ac$ и $b'^2 - 4a'c'$ не могутъ быть отрицательны: уравненія имѣютъ корни дѣйствительные.

a) Пусть $b^2 - 4ac > 0$ и $b'^2 - 4a'c' > 0$.

Ни одно ур—ніе не имѣетъ равныхъ корней.

Если $ab' - ba' = 0$, то, какъ $\Delta = 0$, будетъ и $ac' - ca' = 0$, коэффиціенты ур—ній пропорціональны, и, слѣд., корни одного ур—нія одинаковы съ корнями другого:

$$(7) \qquad x_1 = \xi_1 < x_2 = \xi_2.$$

Если $ab' - ba' \neq 0$, ур—нія имѣютъ лишь одинъ общій корень. Въ этомъ случаѣ одно изъ количествъ $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ равно нулю; другое имѣетъ знакъ суммы $f(\xi_1) + f(\xi_2)$, т.-е. знакъ P.

Точно такъ же, одинъ изъ результатовъ подстановки $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ равенъ нулю, а другой имѣетъ знакъ суммы $\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, т.-е. знакъ Q.

Отсюда слѣдуетъ, что если $aP < 0$, одинъ изъ корней ξ_1, ξ_2 содержится между x_1 и x_2, и имѣетъ мѣсто одно изъ распредѣленій

$$(8) \qquad x_1 < \xi_1 < x_2 = \xi_2.$$

$$(9) \qquad \xi_1 = x_1 < \xi_2 < x_2.$$

Первое изъ нихъ имѣетъ мѣсто, если $x_1 + x_2 < \xi_1 + \xi_2$, т.-е. если $aa'(ab' - ba') < 0$; второе, если $x_1 + x_2 > \xi_1 + \xi_2$, т.-е. если $aa'(ab' - ba') > 0$.

Если $aP > 0$, одинъ изъ корней ξ_1, ξ_2 лежитъ внѣ интервалла (x_1, x_2). Въ этомъ случаѣ возможны 4 распорядка:

$$(10) \qquad \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2,$$
$$(11) \qquad \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2,$$
$$(12) \qquad \xi_1 < x_1 = \xi_2 < x_2,$$
$$(13) \qquad x_1 < \xi_1 = x_2 < \xi_2.$$

Если $a'Q < 0$, одинъ изъ корней x_1, x_2 лежитъ между ξ_1 и ξ_2, слѣд., имѣетъ мѣсто распорядокъ (10), либо (11), а именно: (10), если $aa'(ab' - ba') < 0$, и (11), если $aa'(ab' - ba') > 0$.

Если $a'Q > 0$, имѣетъ мѣсто распредѣленіе (12), либо (13): первое, если $aa'(ab' - ba') < 0$, второе, если $aa'(ab' - ba') > 0$.

β) Пусть $b^2 - 4ac \neq 0$, $b'^2 - 4a'c' = 0$.

Слѣдовательно, $\xi_1 = \xi_2$. Возможны распорядки:

$$(14) \qquad x_1 < \xi_1 = \xi_2 = x_2,$$
$$(15) \qquad x_1 = \xi_1 = \xi_2 < x_2;$$

(14) — если $aa'(ab' - ba') < 0$; (15) — если $aa'(ab' - ba') > 0$.

γ) Пусть $b^2 - 4ac = 0$, $b'^2 - 4a'c' \neq 0$.

Въ этомъ случаѣ $x_1 = x_2$. Возможны лишь распорядки:

$$(16) \qquad \xi_1 = x_1 = x_2 < \xi_2$$
$$(17) \qquad \xi_1 < x_1 = x_2 = \xi_2;$$

(16) — если $aa'(ab' - ba') < 0$; (17) — если $aa'(ab' - ba') > 0$.

δ) Пусть, наконецъ, $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c' = 0$.

Въ этомъ случаѣ $x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_2$, и имѣетъ мѣсто только одно распредѣленіе:

$$(18) \qquad x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_2.$$

Резюме. *Результантъ* данныхъ уравненій:

$$\Delta = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$
$$= \frac{1}{4}[(2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')].$$
$$= \frac{1}{4a^2}[(b^2 - 4ac)(ab' - ba')^2 - \{2a(ac' - ca') - b(ab' - ba')\}^2].$$
$$= \frac{1}{4a'^2}[(b'^2 - 4a'c')(ab' - ba')^2 - \{2a'(ac' - ca') - b'(ab' - ba')\}^2]$$
$$= a'^2 . f(\xi_1) . f(\xi_2) = a^2 . \varphi(x_1) . \varphi(x_2).$$
$$P = b'(ab' - ba') - 2a(ac' - ca') = a'^2\{f(\xi_1) + f(\xi_2)\}.$$
$$Q = 2a(ac' - ca') - b(ab' - ba') = a^2\{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)\}.$$

x_1, x_2 корни ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$, $(x_1 \leq x_2)$.
ξ_1, ξ_2 » » $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $(\xi_1 \leq \xi_2)$.

$$b^2 - 4ac = \delta, \quad b'^2 - 4a'c' = \delta'.$$

Нижеслѣдующая таблица резюмируетъ вышеприведенное изслѣдованіе

Если						То
$\Delta \pm 0$	$\Delta < 0$[1])	$aa'(ab' - ba) < 0$				$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2$
	и > 0	$aa'(ab' - ba') > 0$				$\xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$
	$\Delta > 0$[2])	$aP < 0$				$x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$
		$aP > 0$	$a'\Psi < 0$			$\xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2$
			$a'\Psi > 0$	$aa'(ab' - ba') < 0$		$x_1 < x_2 < \xi_1 < \xi_2$
				$aa'(ab' - ba') > 0$		$\xi_1 < \xi_2 < x_1 < x_2$
$\Delta = 0$[3])	$\delta > 0$ и $\delta' > 0$	$ab' - ba' = 0$				$x_1 = \xi_1 < x_2 = \xi_2$
		$ab' - ba' \mp 0$	$aP < 0$	$aa(ab' - ba') < 0$		$x_1 < \xi_1 < x_2 = \xi_2$
				$aa'(ab' - ba') > 0$		$\xi_1 = x_1 < \xi_2 < x_2$
			$aP > 0$	$a\Psi < 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$\xi_1 < x_1 < \xi_2 = x_2$
					$aa(ab' - ba) > 0$	$\xi_1 = x_1 < x_2 < \xi_2$
				$a'\Psi > 0$	$aa'(ab' - ba) < 0$	$\xi_1 < x_1 = \xi_2 < x_2$
					$aa(ab' - ba') > 0$	$x_1 < \xi_1 = x_2 < \xi_2$
	$\delta\delta' = 0$	$\delta > 0$	$aa'(ab - ba') < 0$			$x_1 < \xi_1 = \xi_2 = x_2$
			$aa'(ab - ba) > 0$			$x_1 = \xi_1 = \xi_2 < x_2$
		$\delta' > 0$	$aa(ab' - ba) < 0$			$\xi_1 = x_1 = x_2 < \xi_2$
			$aa(ab - ba') > 0$			$\xi_1 < x_1 = x_2 = \xi_2$
		$\delta = 0$ и $\delta' = 0$				$\xi_1 = \xi_2 = x_1 = x_2$

Примѣчаніе. Эта таблица должна научить, какъ располагать изслѣдованіе въ каждомъ частномъ вопросѣ. Понятно, что иногда можетъ потребоваться построеніе только части этой таблицы.

---

[1]) Необходимо, чтобы было $b^2 - 4ac > 0$, что влечетъ за собою и $b'^2 - 4a'c' > 0$.

[2]) Корни ур—ній въ этомъ случаѣ всегда дѣйствительные неравные, поэтому нѣтъ надобности опредѣлять знаки δ и δ'.

[3]) Въ этотъ случаѣ корни ур—ній всегда дѣйствительны, слѣд., разсмотрѣнію подлежатъ только случаи, когда δ и δ' положительны или нули.

ГЛАВА XXXIII.

Рѣшеніе неравенствъ: квадратныхъ, высшихъ степеней, иррациональныхъ.— Приложенія.

Цѣлое квадратное неравенство.

492. Цѣлыя квадратныя неравенства могутъ быть двоякаго вида:

$$ax^2+bx+c>0, \quad \text{или} \quad ax^2+bx+c<0;$$

но умноживъ второе на -1, приведемъ его къ виду перваго; слѣд. съ теоретической точки зрѣнія достаточно указать рѣшеніе неравенства

$$ax^2+bx+c>0\ .\ .\ .\ (1)$$

Слѣдуетъ различать два случая: $b^2-4ac\leqslant 0$ и $b^2-4ac>0$.

1-й случай: $b^2-4ac\leqslant 0$.

При этомъ условіи корни тринома будутъ дѣйствительные равные, или мнимые; а извѣстно, что какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x отъ $-\infty$ до $+\infty$ триномъ сохраняетъ неизмѣнно знакъ коэффиціента a. Поэтому надо различать случаи: $a>0$ и $a<0$.

Если $a>0$, триномъ всегда останется положительнымъ, и слѣд. неравенству (1) удовлетворяютъ всѣ дѣйствительныя значенія x (за исключеніемъ значенія $x=-\frac{b}{2a}$ въ случаѣ $b^2-4ac=0$).

Если же $a<0$, триномъ всегда останется отрицательнымъ: неравенство не можетъ быть удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x.

2-й случай: $b^2-4ac>0$.

Въ этомъ случаѣ триномъ имѣетъ корни дѣйствительные неравные: мы ихъ найдемъ, рѣшивъ ур. $ax^2+bx+c=0$: пусть они будутъ x' и x'', и пусть $x'<x''$.

Если $a>0$, то триномъ, сохраняя знакъ перваго члена при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней, останется при всѣхъ этихъ значеніяхъ положительнымъ: слѣд. неравенству будутъ удовлетворять, съ одной стороны, всѣ значенія x, меньшія меньшаго корня x', съ другой, всѣ x-сы, большіе большаго корня x'':

$$x<x' \quad \text{и} \quad x>x''.$$

Если $a<0$, то триномъ, сохраняя знакъ противоположный первому члену при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ между корнями, будетъ положителенъ при

$$x'<x<x''.$$

Нижеслѣдующая табличка резюмируетъ рѣшеніе квадратнаго неравенства того и другого вида, при томъ или другомъ знакѣ коэффиціента.

Если	Рѣшеніе нерав. $ax^2+bx+c>0$	
	$a>0$	$a<0$
$b^2-4ac<0$	Всякое значеніе x.	Нѣтъ дѣйств. значеній x, удов—хъ нер—ву.
$b^2-4ac=0$	Всякое значеніе x, кромѣ $-\frac{b}{2a}$.	Нѣтъ дѣйств. значеній x, удов—хъ нер—ву.
$b^2-4ac>0$	Всякое значеніе x, лежащее внѣ корней: $x<x'$ и $x>x''$.	Всякое значеніе x, лежащее между корнями: $x'<x<x'$
	$a<0$	$a>0$
	Рѣшеніе нерав. $ax^2+bx+c<0$	

493. Примѣръ I. *Рѣшить неравенство:* $-3x^2+7x-5<0$.

Здѣсь $b^2-4ac=7^2-4(-3).(-5)=-11$, слѣд. корни тринома мнимые, а потому при всѣхъ дѣйствительныхъ значеніяхъ x, сохраняя знакъ перваго члена, онъ будетъ отрицателенъ; такъ что неравенство удовлетворяется всякимъ дѣйствительнымъ значеніемъ перемѣннаго.

Примѣръ II. *Рѣшить неравенство* $3x^2-10x+3>0$.

Здѣсь $b^2-ac=5^2-3.3=16$: корни тринома дѣйствительные неравные, именно: $x'=\frac{1}{3}$, $x''=3$.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, т.-е. имѣлъ знакъ перваго члена, а это имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней. Поэтому неравенству удовлетворяютъ всѣ

$$x<\frac{1}{3}, \text{ а также } x>3.$$

Примѣръ III. *Рѣшить неравенство* $4x^2+5x-19<0$.

Здѣсь $b^2-4ac=5^2-4.4.(-19)=329$: корни тринома дѣйствительные неравные, именно.

$$x'=\frac{-5-\sqrt{329}}{8},\quad x''=\frac{-5+\sqrt{329}}{8}.$$

Неравенство требуетъ, чтобы знакъ тринома былъ противоположенъ знаку перваго члена, и потому x должно заключаться между корнями, т.-е.

$$\frac{-5+\sqrt{329}}{8} > x > \frac{-5-\sqrt{329}}{8}.$$

Примѣръ IV. *Рѣшить неравенство* $\frac{3x-5}{7-x} > 0$.

Чтобы частное было положительно, нужно, чтобы дѣлимое и дѣлитель имѣли одинаковые знаки, или, что то же, надо, чтобы произведеніе ихъ было положительно, т.-е. чтобы

$$(3x-5)(7-x) > 0, \quad \text{или} \quad -3x^2+26x-35 > 0.$$

Отсюда, какъ въ примѣрѣ III, найдемъ, что

$$\frac{5}{3} < x < 7.$$

Примѣръ V. Рѣшить неравенство $x^2+2ax-a^2 > 0$.

Крайніе члены противоположны по знаку, слѣд. корни тринома дѣйствительные неравные; а именно, найдемъ, что

$$x' = a(\sqrt{2}-1), \quad x'' = -a(\sqrt{2}+1).$$

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ сохранялъ знакъ 1-го коэффиціента, а въ случаѣ дѣйствит. неравныхъ корней это имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней.

Отсюда:

1) Если $a > 0$, и слѣд. $x' > x''$, неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія

$$x > a(\sqrt{2}-1), \text{ а также всѣ } x < -a(\sqrt{2}+1).$$

2) Если $a < 0$, и слѣд. $x' < x''$, неравенству удовлетворяютъ

$$\text{всѣ } x < a(\sqrt{2}-1), \text{ а также всѣ } x > -a(\sqrt{2}+1).$$

Примѣръ VI. *Рѣшить неравенство*

$$(n-3)(n-4)x^2-8a(n-3)x-12a^2 > 0.$$

Находимъ корни тринома; для этого рѣшаемъ ур.

$$(n-3)(n-4)x^2-8a(n-3)x-12a^2 = 0,$$

изъ котораго

$$x = \frac{4a(n-3) \pm \sqrt{16a^2(n-3)^2+12a^2(n-3)(n-4)}}{(n-3)(n-4)}.$$

Подрадикальное количество $= 4a^2(n-3)\{4(n-3)+3(n-4)\}$

$= 4a^2(n-3)(7n-24)$; такимъ образомъ найдемъ

$$x' = \frac{2a[2(n-3)+\sqrt{(n-3)(7n-24)}]}{(n-3)(n-4)}; \quad x'' = \frac{2a[2(n-3)-\sqrt{(n-3)(7n-24)}]}{(n-3)(n-4)}.$$

Знакъ тринома зависитъ какъ отъ знака коэффиціента $(n-3)(n-4)$, такъ и отъ природы корней, слѣд. отъ подрадикальнаго количества, а потому нужно разсмотрѣть нѣсколько случаевъ, давая n всѣ значенія въ слѣдующихъ интервалахъ:

$$-\infty\ \underbrace{\ldots\ldots}_{1} + 3\ \underbrace{\ldots\ldots}_{2} + \frac{24}{7}\ \underbrace{\ldots\ldots}_{3} + 4\ \underbrace{\ldots\ldots}_{4} + \infty\,.$$

Первый интервалъ.—Давая n значенія въ первомъ интервалѣ, т.-е. меньшія 3, будемъ имѣть: $n-3<0$, $7n-24<0$, $n-4<0$; слѣд коэффиціентъ при x^2 больше 0; подрадикальное количество >0, и корни дѣйствительные. Неравенству будутъ удовлетворять значенія x, лежащія внѣ корней; нужно, слѣд., сравнить корни. Пишемъ наугадъ неравенство

$$\frac{2a\,[2\,(n-3)+\sqrt{(n-3)\,(7n-24)}]}{(n-3)\,(n-4)} \qquad \frac{2a\,[2\,(n-3)-\sqrt{(n-3)\,(7n-24)}]}{(n-3)\,(n-4)}\ \ldots (1)$$

Такъ какъ $(n-3)(n-4)>0$, то можемъ откинуть знаменателя, не измѣняя знака неравенства; затѣмъ, сокращаемъ на 2, откидываемъ отъ обѣихъ частей общіе члены $2a(n-3)$, сокращаемъ на полож. количество $2\sqrt{(n-3)(7n-24)}$ и получимъ такимъ образомъ эквивалентное (1)-му неравенство

$$a>-a \ \text{ или }\ 2a>0.$$

Если $a>0$, это неравенство, а слѣд. и испытуемое, вѣрно; слѣд. будетъ $x'>x''$. Если же $a<0$, то и $2a<0$, а потому въ испытуемомъ неравенствѣ первая часть должна быть меньше второй, т.-е. $x'<x''$. Заключаемъ, что при $a>0$ неравенству удовлетворяютъ

всѣ $x<x''$, а также $x>x'$;

при $a<0$ ему удовлетворяютъ

всѣ $x<x'$, а также всѣ $x>x''$.

Второй интервалъ. Для значеній n, большихъ 3, но меньшихъ $\frac{24}{7}$, будетъ: $n-3>0$, $7n-24<0$, $n-4<0$. Слѣд. $(n-3)(n-4)<0$; подрадикальное количество <0, значитъ, корни мнимые, а потому триномъ будетъ отрицателенъ, и данному неравенству, которое требуетъ, чтобы триномъ былъ положителенъ, удовлетворить нельзя.

Третій интервалъ. Для $\frac{24}{7}<n<4$ будетъ: $n-3>0$, $7n-24>0$, $n-4<0$; слѣд. коэффиціентъ при x^2 отрицателенъ, а корни дѣйствительные. Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ противоположный коэффиціенту при x^2, а этому требованію удовлетворяютъ всѣ значенія x, лежащія между корнями.

Для сравненія корней пишемъ неравенство (1); умножая обѣ его части на отрицательное количество $(n-3)(n-4)$, должны измѣнить знакъ неравенства; откинувъ, затѣмъ, общіе члены и сокративъ на полож. количество $2\sqrt{(n-3)(7n-24)}$, найдемъ

$$a<-a, \quad \text{или}\quad 2a<0.$$

Если $a > 0$, это неравенство невѣрно, а потому смыслъ испытуемаго неравенства надо измѣнить, слѣд. будетъ $x' < x''$. Если $a < 0$, то и $2a < 0$, а поэтому испытуемое неравенство вѣрно; и слѣд. $x' > x''$. Заключаемъ, что
при $a > 0$, неравенству удовлетворяютъ всѣ x, большія x', но меньшія x'':

$$x'' > x > x';$$

при $a < 0$, значенія x заключаются въ предѣлахъ

$$x' > x > x''.$$

Четвертый интервалъ. Когда $n > 4$, то будетъ: $n - 3 > 0$, $7n - 24 > 0$, $n - 4 > 0$; $(n - 3)(n - 4) > 0$, а корни дѣйствительные.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ перваго коэффиціента, что имѣетъ мѣсто для x, лежащихъ внѣ корней.

Сравненіе корней въ этомъ случаѣ покажетъ, что при $a > 0$ будетъ $x' > x''$, при $a < 0$ будетъ $x' < x''$. Заключаемъ, что
при $a > 0$ данному неравенству удовлетворяютъ

$$x > x', \qquad \text{а также} \qquad x < x''.$$

при $a < 0$ ему удовлетворяютъ

$$x < x' \qquad \text{и} \qquad x > x''.$$

Примѣръ VII. *Рѣшить неравенство*

$$\frac{x^2 + x - 6}{2a + 1} > x + 6\,(2a - 1).$$

Общій знаменатель $2a + 1$; но какъ знакъ его неизвѣстенъ, то мы не можемъ, въ видахъ освобожденія неравенства отъ дробей, множить обѣ его части на $2a + 1$, не сдѣлавъ предварительно того или другого предположенія о знакѣ этого двучлена. Итакъ, нужно разобрать два случая: $2a + 1 > 0$ и $2a + 1 < 0$.

Первый случай: $2a + 1 > 0$, или $a > -\frac{1}{2}$.

Въ такомъ случаѣ, умноживъ обѣ части на $2a + 1$ и не перемѣняя смысла неравенства, получимъ *эквивалентное данному неравенство*:

$$x^2 + x - 6 > (2a + 1)\,x + 6\,(2a - 1)\,(2a + 1)$$

или

$$x^2 - 2ax - 24a^2 > 0;$$

корни тринома первой части дѣйствительные неравные, именно: $-4a$ и $+6a$.

Неравенство требуетъ, чтобы триномъ имѣлъ знакъ одинаковый съ коэффиціентомъ при x^2, сл. x должно содержаться внѣ корней $-4a$ и $+6a$. Такимъ образомъ, нужно знать, который изъ этихъ корней больше, а это зависитъ отъ знака a. Но a, будучи $> -\frac{1}{2}$, можетъ имѣть значенія отъ $-\frac{1}{2}$ до 0 (отрицательныя), и отъ 0 до $+\infty$ (положительныя). Когда $a < 0$, то очевидно $-4a > 6a$; при $a > 0$, наоборотъ $-4a < 6a$.

Такимъ образомъ

$$a > -\frac{1}{2}\begin{cases} a < 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x < 6a, & \text{а также } x > -4a. \\ a > 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x < -4a, & \text{а также } x > 6a. \end{cases}$$

Второй случай. $2a + 1 < 0$, или $a < -\frac{1}{2}$.

Умножая обѣ части неравенства на отрицательное количество $2a + 1$ и измѣняя смыслъ неравенства, придемъ къ слѣдующему неравенству, эквивалентному данному:

$$x^2 - 2ax - 24a^2 < 0.$$

Оно требуетъ, чтобы триномъ первой части имѣлъ знакъ, противоположный коэффиціенту при x^2, а этому требованію удовлетворяютъ значенія x, лежащія между корнями $-4a$ и $+6a$ тринома.

Такъ какъ a, будучи $< -\frac{1}{2}$, отрицательно, то $-4a > +6a$, и потому значенія x, удовлетворяющія неравенству при

$$a < -\frac{1}{2} \quad \text{суть} \quad +6a < x < -4a.$$

Примѣчаніе. Можно бы было получить тѣ же результаты, умноживъ обѣ части предложеннаго неравенства на положительное количество $(2a + 1)^2$.

494. *Приложеніе I. При какихъ условіяхъ* 0 *будетъ заключаться между корнями уравненія*

$$x(x-1) - p(p-1) - q(q-1) - 2pq = 0?$$

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки нуля вмѣсто x имѣлъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента при x^2, т.-е. чтобы

$-p(p-1) - q(q-1) - 2pq < 0$, или $(p+q)^2 - (p+q) > 0$ или, наконецъ,

$$(p+q)(p+q-1) > 0.$$

А этому неравенству можно удовлетворить двояко, полагая: или $p + q > 1$, или $p + q < 0$.

495. *Приложеніе II. Какимъ условіямъ должно удовлетворять количество* α *для того, чтобы* $-\frac{1}{2}$ *содержалась между корнями уравненія*

$$x(x+1)(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + \alpha^2 = 0.$$

Необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки $-\frac{1}{2}$ вмѣсто x въ первую часть былъ отрицательный, т.-е чтобы было

$$-\frac{1}{4}(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + \alpha^2 < 0, \quad \text{или} \quad \alpha^2 - \alpha - 1 < 0.$$

Этому неравенству удовлетворимъ, взявъ

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

496. *Приложеніе III. Какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома*

$$z = Ax^2 + 2B\,xy + A'y^2 + 2B'x + 2By + A''$$

для того, чтобы онъ оставался положительнымъ при всякихъ значеніяхъ x и y?

Первое условіе состоитъ въ томъ, что A должно быть > 0, ибо при $A < 0$, если корни ур—нія въ x

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2B'x + 2By + A'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будутъ дѣйствительны, полиномъ z будетъ отрицателенъ при тѣхъ значеніяхъ x, которыя лежатъ внѣ корней, а если мнимы, то z постоянно будетъ отрицателенъ; слѣд. онъ не былъ бы положителенъ при всякомъ x.

Если $A > 0$, то полиномъ z будетъ всегда положителенъ, если корни ур—нія (1), рѣшеннаго относительно x, будутъ мнимыми, что ведетъ къ неравенству:

$$(B''^2 - AA')y^2 + 2(B'B'' - AB)y + B'^2 - AA'' < 0;$$

а этотъ квадратный относительно y триномъ будетъ постоянно отрицателенъ, если

$$B''^2 - AA' < 0 \quad \text{и} \quad (B'B'' - AB)^2 - (B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') < 0.$$

Слѣд., искомыя условія таковы:

$$A > 0, \quad B''^2 - AA' < 0 \quad \text{и} \quad (B'B'' - AB)^2 - (B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') < 0.$$

497. *Приложеніе IV. Изслѣдовать корни ур—нія*

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0?$$

Ищемъ критическія значенія λ.

1. **Дѣйствительность корней.** Корни будутъ дѣйствительны, если

$$b'^2 - ac \geqslant 0, \quad \text{т.-е.} \quad \lambda^2 - 1(\lambda^2 + 2\lambda - 3) \geqslant 0$$

или

$$\lambda \leqq +\frac{3}{2}.$$

2. **Знаки корней.** *Произведеніе корней* $= \lambda^2 + 2\lambda - 3$; корни этого тринома дѣйствительны и суть $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -3$, потому произведеніе корней $= (\lambda - 1)(\lambda + 3)$, и сл. будетъ > 0, если $\lambda > 1$, или $\lambda < -3$; и будетъ < 0, если $-3 < \lambda < 1$.

Сумма корней $= 2\lambda$, сл. сумма > 0, если $\lambda > 0$, и сумма < 0, если $\lambda < 0$. Расположивъ значенія λ въ восходящемъ порядкѣ, имѣемъ скалу:

$$-\infty \; . \; . \; . \; . \; -3 \; . \; . \; . \; 0 \; . \; . \; . \; 1 \; . \; . \; . \; \frac{3}{2} \; . \; . \; . \; +\infty.$$

Разсмотримъ теперь каждый изъ четырехъ интерваловъ значеній λ, при которыхъ корни дѣйствительны.

1) $\lambda < -3$. Здѣсь произведеніе корней > 0, слѣд. знаки ихъ одинаковы; сумма корней < 0; сл. оба корня отрицательны.

2) $\lambda = -3$. Произведеніе корней $= 0$; сл. одинъ корень $= 0$; сумма корней $= -6$; сл. другой корень $= -6$.

3) $-3 < \lambda < 0$. Произведеніе корней < 0, сл. знаки ихъ различны; сумма ихъ < 0, сл. большій по абс. зн. корень отрицателенъ.

4) $\lambda = 0$. Знаки противоположны; а какъ сумма $= 0$, то оба корня по абс. значенію равны ($x' = +\sqrt{3}$, $x'' = -\sqrt{3}$).

5) $0 < \lambda < 1$. Такъ какъ произв. < 0, то знаки корней противоположны; сумма > 0. сл. большій по абс. зн. корень положителенъ.

6) $\lambda = 1$. Произв. корней $= 0$; сл. одинъ корень $= 0$; а какъ сумма > 0, то другой корень положителенъ.

7) $1 < \lambda < \frac{3}{2}$. Такъ какъ произведеніе корней > 0, то знаки корней одинаковы; сумма > 0; оба корня положительны.

8) $\lambda = \frac{3}{2}$. Корни равны и положительны.

9) $\lambda > \frac{3}{2}$. Корни мнимые.

Изслѣдованіе можно резюмировать въ слѣдующей таблицѣ:

$\lambda < -3$: два отриц. корня.

$\lambda = -3$: одинъ корень $= 0$; другой $= -6$.

$-3 < \lambda < 0$: большій по абс. знач. корень отрицателенъ, меньшій полож.

$\lambda = 0$: равные корни съ против. знаками ($+\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$).

$0 < \lambda < 1$: большій по абс. знач. корень положителенъ, меньшій отрицателенъ.

$\lambda = 1$: одинъ корень $= 0$, другой положит.

$1 < \lambda < \frac{3}{2}$: два положит. корня не равныхъ.

$\lambda = \frac{3}{2}$: два положит. корня равныхъ.

$\lambda > \frac{3}{2}$: корни мнимые.

498 *Приложеніе V. Изслѣдовать корни уравненія* $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x - 7\lambda - 1 = 0$ *при измѣненіи* λ *отъ* $-\infty$ до $+\infty$, *и опредѣлить, сколько оно имѣетъ корней въ каждомъ изъ интерваловъ:*

отъ $-\infty$ до -1, отъ -1 до $+1$, отъ $+1$ до $+\infty$.

Находимъ замѣчательныя значенія λ.

1. **Дѣйствительность корней.** Прежде всего, корни должны быть дѣйствительными; сл. должно быть

$$(\lambda - 2)^2 + (\lambda - 1)(7\lambda + 1) > 0 \quad \text{или} \quad 8\lambda^2 - 10\lambda + 3 > 0.$$

Такъ какъ реализантъ этого тринома положителенъ, то корни его дѣйствительные и неравные; они равны: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. Слѣд. триномъ будетъ оставается > 0 для всѣхъ λ внѣ корней, т.-е. для λ между $-\infty$ и $+\frac{1}{2}$, и между $+\frac{3}{4}$ и $+\infty$.

2. **Знаки корней.** *Произведеніе корней* $\frac{7\lambda + 1}{1 - \lambda}$ — выраженію, знакъ котораго тотъ же, что и произведенія

$$(7\lambda + 1)(1 - \lambda),$$

а это произведеніе отрицательно для значеній λ, лежащихъ внѣ корней этого выраженія, т.-е. для $\lambda < -\frac{1}{7}$ и для $\lambda > 1$; и положительно для всѣхъ значеній λ, лежащихъ между $-\frac{1}{7}$ и $+1$.

Сумма корней $= \frac{2(\lambda - 2)}{\lambda - 1}$ — выраженію, знакъ котораго тотъ же, что и произведенія $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$, которое будетъ > 0 для всѣхъ λ, лежащихъ внѣ корней, т.-е. для λ, лежащихъ между $-\infty$ и $+1$, и между $+2$ и $+\infty$; оно < 0 для λ, лежащихъ между корнями, т.-е. для

$$1 < \lambda < 2.$$

3. Ищемъ знакъ подстановокъ -1 и $+1$ вмѣсто x въ первую часть ур—нія. Имѣемъ:

$$f(+1) = \lambda - 1 - 2(\lambda - 2) - 7\lambda - 1 = -8\lambda + 2;$$

отсюда видно, что будетъ $f(+1) > 0$, если $-8\lambda + 2 > 0$, т.-е. если $\lambda < \frac{1}{4}$; и будетъ $f(+1) < 0$, если $-8\lambda + 2 < 0$, т.-е. когда $\lambda > \frac{1}{4}$.

Подстановка -1 дастъ

$$f(-1) = \lambda - 1 + 2(\lambda - 2) - 7\lambda - 1 = -4\lambda - 6,$$

откуда заключаемъ, что при $\lambda < -\frac{3}{2}$ будетъ $f(-1) > 0$; при $\lambda > -\frac{3}{2}$ будетъ $f(-1) < 0$.

4. Затѣмъ, 1-й коэффиціентъ $= \lambda - 1$; онъ будетъ > 0 при $\lambda > 1$, и будетъ < 0 при $\lambda < 1$.

5. Находимъ корни при $\lambda = \pm\infty$; вынося въ данномъ ур—ніи λ за скобки, даемъ ему видъ

$$\lambda\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x^2 - 2\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)x - \left(7 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0.$$

Если абсолютное значеніе λ увеличивать неогранич., то необходимо, чтобы выраж. въ квадр. скобк. стремилось къ 0; т.-е. при $\lambda = \pm\infty$ x должно удовлетворять ур—нію $x^2 - 2x - 7 = 0$; откуда $x_1 = 1 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

Итакъ, замѣчательныя значенія λ, расположенныя въ восходящемъ порядкѣ, будутъ:

$$-\infty, \; -\frac{3}{2}, \; -\frac{1}{7}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{2}, \; \frac{3}{4}, \; 1, \; 2, \text{ и } +\infty,$$

которыя въ этомъ порядкѣ и наносимъ въ первую горизонтальную строку нижеслѣдующей таблицы: получимъ скалу возрастающихъ значеній λ; подъ ними располагаемъ, для каждаго интервалла, знаки: реализанта, произведенія корней, ихъ суммы, знаки $f(+1)$, $f(-1)$ и перваго коэффиціента ур—нія.

Скала значеній λ	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	$+\infty$
Реализантъ		+	+	+		+	+	+	
Произведеніе корней.	−	−	+	+		+		−	
Сумма корней.	+	+	−	+		+	−	+	
$f(+1)$	+	+	+	−		−		−	
$f(-1)$	+	−	−	−		−	−	−	
1-й коэф.	−	−	−	−		−		+	

Имѣя таблицу знаковъ, легко опредѣлить знаки корней ур—нія для всякаго интервалла.

1) $\lambda < -\frac{3}{2}$. Произведеніе корней отрицательно, сл. знаки корней различны; сумма корней положительна, сл. большій по абсол. знач. корень положителенъ. $f(-1)$ и $f(+1)$ положительны, тогда какъ 1-ый коэффиціентъ отрицателенъ, сл. -1 и $+1$ находятся между корнями x' и x'' (называя, какъ всегда, x'—меньш. кор., x''—большій кор.). Итакъ

$$-\infty,\ x',\ -1,\ +1,\ x'',\ +\infty.$$

2) $\lambda = -\frac{3}{2}$. Въ этомъ случаѣ $f(-1) = 0$; сл. $x' = -1$; другой корень—между $+1$ и $+\infty$.

3) $-\frac{3}{2} < \lambda < -\frac{1}{7}$. Произведеніе корней отрицательно, а сумма ихъ положительна. сл. знаки корней различны: и большій по абс. велич. корень положителенъ; $f(+1) > 0$, между тѣмъ какъ 1-ый коэф. < 0, сл. $+1$ — между корнями: затѣмъ, знакъ $f(-1)$ одинаковъ со знакомъ 1-го коэф. сл. -1 внѣ корней. Расположеніе корней, сл., таково:

$$-\infty\ .\ .\ .\ -1\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .\ +1\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .\ +\infty.$$

4) $\lambda = -\frac{1}{7}$. Произведеніе корней проходитъ чрезъ 0, сл. одинъ корень $= 0$; расположеніе же корней таково, какъ только что указано.

5) $-\frac{1}{7}<\lambda<\frac{1}{4}$. Произведеніе и сумма корней положительны, сл. $x'>0$ и $x''>0$. Знакъ $f(+1)$ противоположенъ знаку 1-го коэф., а знакъ $f(-1)$ одинаковъ со знакомъ 1-го коэф., сл. $+1$ между корнями, -1 внѣ корней; расположеніе корней таково:

$$-\infty\ .\ .\ .-1\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .+1\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .+\infty.$$

6) $\lambda=\frac{1}{4}$. $f(+1)$ обращается въ 0; сл. одинъ корень $=+1$; другой же находится между $+1$ и $+\infty$, ибо, по предыдущему случаю, онъ больше $+1$.

7) $\frac{1}{4}<\lambda<\frac{1}{2}$. Оба корня положительны. $f(+1)$ имѣетъ одинаковый знакъ съ 1-мъ коэф., сл. $+1$ внѣ корней. Сравнимъ ее съ полусуммою корней, которая равна $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}$; не будетъ ли $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}>1$? Такъ какъ $\lambda<1$, то $\lambda-2<\lambda-1$, или $-2<-1$, что вѣрно. Итакъ: $+1$ внѣ корней и меньше ихъ полусуммы, сл. меньше меньшаго корня. Расположеніе таково:

$$+1\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .+\infty.$$

8) $\lambda=\frac{1}{2}$. Реализантъ обращается въ нуль и корни дѣлаются равными: $x'=x''=3$.

9) $\frac{1}{2}<\lambda<\frac{3}{4}$. Реализантъ дѣлается отрицательнымъ: корни—мнимые.

10) $\lambda=\frac{3}{4}$. Реализантъ снова обращается въ нуль; ур. имѣетъ равные корни: $x'=x''=5$.

11) $\frac{3}{4}<\lambda<1$. Произведеніе и сумма корней >0: оба корня положительны. $f(+1)<0$ и 1-ый коэф. <0; сл. $+1$ внѣ корней; сравнимъ ее съ полусуммой корней, положивъ, напр., $\frac{\lambda-2}{\lambda-1}>1$, откуда $\lambda-2<\lambda-1$, или $-2<-1$, что вѣрно, сл. $+1$ меньше меньшаго корня, и потому

$$1\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .+\infty.$$

12) $\lambda=1$. Коэффиціентъ при x^2 обращается въ 0, сл. одинъ корень $=\infty$, другой удовлетворяетъ ур—нію $2x-8=0$, откуда $x=4$.

13) $1<\lambda<2$. Произв. и сумма корней отрицательны, сл. знаки ихъ различны и большій по абс. знач. корень отрицателенъ. $f(+1)$ и $f(-1)$ имѣютъ знакъ противоположный 1-му коэф., сл. $+1$ и -1 между корнями. Имѣемъ:

$$-\infty\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .-1\ .\ .\ .+1\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .+\infty.$$

14) $\lambda=+2$. Сумма корней $=0$, сл. корни равны и противоположны по знаку: $x=\pm\sqrt{15}$.

15) $\lambda>2$. Знаки корней противоположны; большій по абс. величинѣ корень положителенъ; -1 и $+1$ между корнями, сл.

$$-\infty\ .\ .\ .\ x'\ .\ .\ .-1\ .\ .\ .+1\ .\ .\ .\ x''\ .\ .\ .-\infty.$$

Резюме изслѣдованія.

$\lambda < -\frac{3}{2}$.	$-\infty < x' < -1; \quad -1 < x'' < +\infty$.
$\lambda = -\frac{3}{2}$.	$x' = -1; \quad +1 < x'' < +\infty$.
$-\frac{3}{2} < \lambda < -\frac{1}{7}$.	$-1 < x' < +1; \quad +1 < x'' < +\infty$.
$\lambda = -\frac{1}{7}$.	$x' = 0; \quad +1 < x'' < +\infty$.
$\frac{1}{7} < \lambda < \frac{1}{4}$.	$-1 < x' < +1; \quad +1 < x'' < +\infty$.
$\lambda = \frac{1}{4}$.	$x' = 1; \quad +1 < x'' < +\infty$.
$\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2}$.	$+1 < x' \ldots x'' < +\infty$.
$\lambda = \frac{1}{2}$.	$x' = x'' = 3$.
$\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$.	**Корни мнимые.**
$\lambda = \frac{3}{4}$.	$x' = x'' = 5$.
$\frac{3}{4} < \lambda < 1$.	$+1 < x' \ldots x'' < +\infty$.
$\lambda = 1$.	Одинъ корень безконеченъ; другой = 4.
$1 < \lambda < 2$.	$-\infty < x' < -1; \quad +1 < x'' < +\infty$.
$\lambda = 2$	x [illegible] $+\sqrt{15}$.
$\lambda > 2$.	Тотъ же результатъ, какъ въ 13-мъ случаѣ.

Примѣчаніе.—Когда изслѣдованіе корней, какъ въ только что разсмотрѣнной задачѣ, нѣсколько сложно, полезно предварительно составить таблицу знаковъ: это даетъ возможность почти непосредственно читать въ ней искомые результаты. Планъ изслѣдованія, указанный въ этомъ §, лишь слегка (въ расположеніи таблички знаковъ) разнится отъ плана, предложеннаго *Тартэнвиллемъ*.

Раціональныя дробныя неравенства.

499. Когда неизвѣстное входитъ въ неравенствѣ въ знаменателя, то *мы можемъ уничтожить знаменателя, если онъ представляетъ количество существенно-положительное. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ приводятъ всѣ члены неравенства къ одному знаменателю и собираютъ ихъ въ первую часть.* Такимъ образомъ получается неравенство вида

$$\frac{P}{Q} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{P}{Q} < 0,$$

гдѣ P и Q суть полиномы, содержащіе x. Замѣчая, что по правилу знаковъ при умноженіи и дѣленіи, произведеніе количествъ P и Q всегда имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и ихъ частное, можно предыдущія неравенства замѣшить эквивалентными имъ:

$$PQ > 0, \quad \text{или} \quad PQ < 0.$$

Къ тому же результату мы пришли бы, умножая обѣ части того или другого неравенства на существенно-положительное количество Q^2.

Затѣмъ разлагаютъ полиномы P и Q на множители 1-й степени относительно x, и получаютъ неравенство вида:

$$A(x \quad \alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ .\ .\ . > 0,$$

гдѣ A не содержитъ x. Затѣмъ распредѣляютъ количества α, β, γ, . . . въ порядкѣ возрастающихъ величинъ. Пусть, напр., будетъ

$$-\infty < \alpha < \beta < \gamma\ .\ .\ . < +\infty.$$

Очевидно, каждый двучленный множитель будетъ сохранять неизмѣнный знакъ до тѣхъ поръ, пока x, увеличиваясь, не перейдетъ значеніе, обращающее этотъ множитель въ нуль. Такимъ образомъ можно указать знакъ произведенія для всякаго отдѣльнаго интервалла, и сл. указать тѣ интервалы, въ которыхъ произведеніе сохраняетъ требуемый неравенствомъ знакъ.

500. Примѣръ I. *Въ какихъ предѣлахъ нужно измѣнять x, чтобы удовлетворить неравенству*

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3} > 1?$$

Перенеся 1 въ первую часть и приведя къ общему знаменателю, получимъ неравенство

$$\frac{2x^2-4}{2x^2-5x+3} > 0.$$

Умноживъ обѣ части на существенно-положительное количество $(2x^2-5x+ + 3)^2$, найдемъ неравенство, *эквивалентное предложенному:*

$$2(x^2-2)(2x^2-5x+3) > 0,$$

или, по разложеніи x^2-2 и $2x^2-5x+3$ (триномовъ, имѣющихъ корни дѣйствительные неравные, и сл. измѣняющихъ знакъ при измѣненіи x) на множители 1-й степени:

$$4(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0.$$

Будемъ давать x значенія въ слѣдующихъ интервалахъ, въ которыхъ величины, обращающія каждый биномъ въ нуль, расположены въ возрастающемъ порядкѣ:

$$\underbrace{-\infty\ .\ .\ .\ -\sqrt{2}}_{1}\ \underbrace{.\ .\ .\ +1}_{2}\ \underbrace{.\ .\ .\ +\sqrt{2}}_{3}\ \underbrace{.\ .\ .\ +\frac{3}{2}}_{4}\ \underbrace{.\ .\ .\ +\infty}_{5}.$$

Если давать x значенія меньшія $(-\sqrt{2})$, то каждый множитель будетъ отрицателенъ; а какъ ихъ четное число, то все произведеніе будетъ оставаться положительнымъ.

Если давать x значенія, большія $(-\sqrt{2})$, но меньшія $+1$, а сл. и подавно меньшія $\sqrt{2}$ и $\frac{3}{2}$, то множитель $x+\sqrt{2}$ будетъ положителенъ, остальные же биномы отрицательны, и такъ какъ число отрицательныхъ множителей нечетное, все произведеніе будетъ отрицательно.

Давая x значенія, большія $+1$, но меньшія $+\sqrt{2}$, находимъ, что два множителя: $x+\sqrt{2}$ и $x-1$ будутъ положительны, а два: $x-\sqrt{2}$ и $x-\frac{3}{2}$ отрицательны; сл. произведеніе положительно. И такъ далѣе.

Убѣдимся, что данному неравенству удовлетворяютъ значенія x, опредѣляемыя нижеслѣдующими предѣлами:

$$x<-\sqrt{2};\quad +1<x<+\sqrt{2};\quad x>+\frac{3}{2}.$$

501. Примѣръ II. *Рѣшить неравенство*

$$\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2-3x+1)}<0.$$

Это неравенство *эквивалентно* слѣдующему:

$$(5x^2-2x+3)(x-1)(x^2-3x+1)<0.$$

Замѣчая, что для тринома $5x^2-2x+3$ имѣемъ: $1-5.3<0$, т.-е. что корни его мнимые, заключаемъ, что онъ всегда будетъ сохранять знакъ перваго коэффиціента, т.-е. всегда положителенъ. Поэтому данное неравенство *эквивалентно* еще слѣдующему простѣйшему:

$$(x-1)(x^2-3x+1)<0.$$

или

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$

Даемъ x послѣдовательно значенія въ интервалахъ:

$$-\underbrace{\infty\;.\;\;.\;\;.}_{1}\;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\;\underbrace{.\;\;.\;\;.\;+}_{2}1\;\underbrace{.\;\;.\;\;.\;+}_{3}\frac{3+\sqrt{5}}{2}\;\underbrace{.\;\;.\;\;.\;+}_{4}\infty.$$

Когда $x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, всѣ три множителя, а сл. и произведеніе, будутъ отрицательны. При $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1$, первый множитель положителенъ, два другіе отрицательны, сл. произведеніе положительно. При $1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, первые два множителя >0, третій <0, сл. произведеніе <0. Наконецъ, при $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

всѣ множители, а съ ними и произведеніе >0. Итакъ, неравенству удовлетворяютъ:

$$x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \quad 1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

502. Примѣръ III. *Рѣшить неравенство*

$$\frac{2ax+3b}{5bx-4a} < 4.$$

Приведя къ общему знаменателю, имѣемъ

$$\frac{2(a-10b)x+3b+16a}{5bx-4a} < 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$[2(a-10b)x+3b+16a](5bx-4a) < 0,$$

или, по вынесеніи изъ первыхъ скобокъ $2(a-10b)$, а изъ вторыхъ $5b$:

$$10(a-10b)b\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right) < 0.$$

Относительно коэффиціента $10(a-10b)b$ могутъ быть предположенія

$$b<0\begin{cases}a<10b\\ a>10b\end{cases}, \qquad b>0\begin{cases}a<10b\\ a>10b\end{cases}.$$

Первый случай: $b<0, \quad a<10b.$

Произведеніе $10(a-10b)b$ положительно; сл. неравенство эквивалентно съ

$$\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right) < 0.$$

Триномъ долженъ имѣть знакъ противоположный коэффиціенту при x^2, сл. x должно заключаться между $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$ и $\frac{4a}{5b}$.

Нужно знать, который изъ этихъ предѣловъ большій. Положимъ наугадъ $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} > \frac{4a}{5b}$; такъ какъ $10(a-10b)b>0$, мы можемъ умножить обѣ части на это произведеніе, и не измѣняя смыслъ неравенства, получимъ ему эквивалентное: $-(3b+16a)5b > 4a.2(a-10b)$, или $-15b^2-8a^2>0$, что невѣрно, ибо первая часть существенно отрицательна.

Заключаемъ, что $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < \frac{4a}{5b}$, а потому x нужно взять такъ, чтобы

$$-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}.$$

Второй случай: $b<0, \quad a>10b.$

Произведеніе $10(a-10b)b$ отрицательно, сл. предложенное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left(x+\frac{3b+16a}{2(a-10b)}\right)\left(x-\frac{4a}{5b}\right) > 0,$$

а потому x не должно заключаться между корнями тринома: $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)}$ и $\frac{4a}{5b}$. Посмотримъ, который изъ нихъ больше. Допустивъ, что $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} > \frac{4a}{5b}$ и замѣчая, что $10(a-10b)b < 0$, умножимъ допущенное неравенство на это произведеніе и перемѣняемъ смыслъ неравенства; найдемъ эквивалентное ему неравенство $-15b^2-8a^2 < 0$, **что вѣрно.**

Заключаемъ, что предположеніе было правильно, а потому данному неравенству удовлетворяютъ два ряда значеній x:

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)} \text{ и } x < \frac{4a}{5b}.$$

Третій случай: $b > 0$, $a < 10b$.

Оперируя такимъ же образомъ, найдемъ, что предложенному неравенству удовлетворяютъ:

$$x > -\frac{3b+16a}{2(a-10b)} \text{ и } x < \frac{4a}{5b}.$$

Четвертый случай: $b > 0$, $a > 10b$.

Вышеуказаннымъ способомъ придемъ къ результату:

$$-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}.$$

Итакъ, чтобы удовлетворить предложенному неравенству, надо:

При $(a-10b).b > 0$ брать: $-\frac{3b+16a}{2(a-10b)} < x < \frac{4a}{5b}$.

При $(a-10b).b < 0$ брать: $x > -\frac{3b+15a}{2(a-10b)}$, или $x < \frac{4a}{5b}$.

Рѣшеніе ирраціональныхъ неравенствъ.

503. Когда неизвѣстное встрѣчается подъ знакомъ квадратнаго корня, то, вообще говоря, нужно бываетъ освободить его изъ-подъ знака корня, а для этого нужно изолировать радикалъ въ ту или другую часть неравенства. Затѣмъ, слѣдуетъ разсмотрѣть знакъ другой части неравенства, изслѣдуя, остается ли онъ неизмѣннымъ, или же зависитъ отъ предположеній относительно буквъ, входящихъ въ эту часть. *Если знакъ этотъ не одинаковъ со знакомъ, стоящимъ передъ радикаломъ, смыслъ неравенства очевиденъ. Если же — одинаковъ, то нужно возвысить обѣ части въ квадратъ, сохраняя или перемѣняя смыслъ неравенства, смотря по тому, будетъ ли этотъ общій знакъ + или —.*

504. Примѣръ I. *Рѣшить неравенство* $\sqrt{(x-1)(x-2)} > x-3$.

Чтобы $\sqrt{(x-1)(x-2)}$ былъ дѣйствителенъ, надо, чтобы подрадикальное количество было >0: этому требованію удовлетворяютъ всѣ x отъ $-\infty$ . . . до 1, и отъ 2 до $+\infty$. Затѣмъ, очевидно, неравенство будетъ удовлетворено всѣми значеніями x, которыя, не содержась между 1 и 2, будутъ меньше 3, ибо въ этомъ случаѣ вторая часть будетъ отрицательна. Итакъ, во-первыхъ, для x можно брать всѣ числа отъ $-\infty$ до $+1$, и отъ $+2$ до $+3$.

Пусть теперь будетъ $x > 3$: обѣ части будутъ положительны, а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ знакъ неравенства, ищемъ числа, удовлетворяющія неравенству

$$x^2 - 3x + 2 > x^2 - 6x + 9, \quad \text{или} \quad x - \frac{7}{3} > 0.$$

Это неравенство удовлетворяется всѣми значеніями x, большими 3.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x отъ $-\infty$ до $+1$ и отъ $+2$ до $+\infty$.

505. Примѣръ II. *Рѣшить неравенство* $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a$, *въ которомъ* $a > 0$.

Сначала ищемъ, какъ взять x, чтобы оба радикала были дѣйствительны, иначе, чтобы подкоренныя количества были положительны. Разсматривая $a^2 - x^2$ какъ неполный квадратный триномъ, замѣчаемъ, что онъ будетъ положителенъ, если x взять между его корнями, т.-е. если $-a < x < a \ldots$ (1). Такимъ же образомъ убѣдимся, что второй радикалъ будетъ дѣйствителенъ при $0 < x < 2a$ . . . (2). Изъ сопоставленія (1) со (2), заключаемъ, что оба радикала будутъ дѣйствительны, если

$$a > x > 0 \; . \; . \; . \; (3).$$

Зная это, перенесемъ первый членъ неравенства во вторую часть; найдемъ: $\sqrt{2ax - x^2} > a - \sqrt{a^2 - x^2}$. Такъ какъ вторая часть положительна, какъ и первая, то, возведя въ квадратъ и не перемѣняя смысла неравенства, получимъ эквивалентное данному неравенство: $2ax > 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2}$, или, раздѣливъ обѣ части на положительное количество $2a$ и изолировавъ радикалъ: $\sqrt{a^2 - x^2} > a - x$. Въ силу (3), $x < a$, сл. $a - x > 0$, а потому вторичное возвышеніе въ квадратъ дастъ: $x^2 - ax < 0$. По смыслу этого неравенства x должно заключаться между корнями первой части; сл.

$$a > x > 0,$$

что не отличается отъ условія дѣйствительности.

506. Примѣръ III. *Рѣшить неравенство* $\frac{x + a}{\sqrt{x^2 + a^2}} > \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$ (1), *въ которомъ a и b положительны и* $a > b$.

Пусть сначала $x + b > 0$, т.-е. $x > -b$. Изъ условія $a > b$ слѣдуетъ, что $x + a > x + b$, а потому и $x + a > 0$. Обѣ части предложеннаго неравенства положительны, а потому, возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ эквивалентное данному неравенство (по отнятіи 1 отъ обѣихъ частей):

$$\frac{2ax}{x^2 + a^2} > \frac{2bx}{x^2 + b^2} \; . \; . \; . \; (2)$$

Изъ числа значеній x, большихъ $-b$, возьмемъ сперва положительныя: тогда сокращеніе на положит. количество $2x$ дастъ: $\frac{a}{x^2 + a^2} > \frac{b}{x^2 + b^2}$, или, по освобожденіи отъ дробей, $ax^2 + ab^2 > bx^2 + a^2b$, или $x^2(a - b) > ab(a - b)$. Сокративъ на положительное количество $a - b$, дадимъ этому неравенству видъ $(x + \sqrt{ab})(x - \sqrt{ab}) > 0$, и какъ первый множитель > 0, то необходимо, чтобы было

$$x > \sqrt{ab}.$$

Разсмотримъ теперь величины x, содержащіяся между 0 и $-b$, отрицательныя; въ этомъ случаѣ сокращеніе (2) на $2x$ дастъ: $\frac{a}{x^2+a^2}<\frac{b}{x^2+b^2}$, или $(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})<0$, а какъ второй множитель <0, то необходимо, чтобы

$$x>-\sqrt{ab}.$$

Но $a>b$, откуда $ab>b^2$ и $\sqrt{ab}>b$, а сл. $-\sqrt{ab}<-b$; такимъ образомъ условіе $x>-\sqrt{ab}$ содержится въ условіи $x>-b$.

Пусть теперь $x+b<0$, или $x<-b$, т.-е. x содержится между $-b$ и $-\infty$. Дадимъ сначала x значенія между $-b$ и $-a$, т.-е. положимъ $x>-a$, откуда $x+a>0$; въ такомъ случаѣ первая часть предложеннаго неравенства будетъ положительна, между тѣмъ какъ вторая отрицательна, и потому неравенство (1) будетъ удовлетворено всѣми значеніями x между $-b$ и $-a$.

Давъ x значенія $<-a$, будемъ имѣть $x+a<0$; а какъ и $x+b<0$, обѣ части даннаго неравенства будутъ отрицательны, а потому возводя въ квадратъ, должны измѣнить смыслъ неравенства; найдемъ

$$\frac{2ax}{a^2+x^2}<\frac{2bx}{x^2+b^2},$$

откуда, сокративъ на $2x<0$ и т. д., получимъ

$$(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})>0;$$

второй множитель для разсматриваемыхъ значеній x отрицателенъ, сл. необходимо, чтобы и $x+\sqrt{ab}<0$, откуда

$$x<-\sqrt{ab};$$

такъ какъ это условіе удовлетворено само собою, то неравенство (1) удовлетворяется всѣми отрицательными величинами x, меньшими $-a$.

Итакъ: предложенному неравенству удовлетворяютъ всѣ отрицательныя значенія x, и положительныя, большія $\sqrt{ab}$; и стало-быть неудовлетворяютъ только значенія x содержащіяся между 0 и $+\sqrt{ab}$.

507. Примѣръ IV. *Рѣшить неравенство*

$$\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}>a-1,$$

гдѣ a данное дѣйствительное количество.

Во-первыхъ $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}$ долженъ быть дѣйствительнымъ; а для этого надо, чтобы было $(3x+a)(x-a)>0$, т.-е. чтобы x не содержалось между $-\frac{a}{3}$ и a. Отсюда видно, что надо различать два случая: $a<0$ и $a>0$.

Если $a<0$, надо брать x такъ, чтобы было: $x<a$, или $x>-\frac{a}{3}$; при $a>0$ должно брать: или $x>a$, или $x<-\frac{a}{3}$.

Но если $a<0$, то и $a-1<0$, и неравенство становится *невозможнымъ*, ибо оно будетъ требовать, чтобы положительное количество было меньше отрицательнаго.

Итакъ, необходимо должно положить $a>0$; затѣмъ необходимо еще, чтобы было $a>1$; тогда обѣ части будутъ положительны; возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, получимъ эквивалентное ему

$$\frac{3x+a}{x-a}<(a-1)^2, \quad \text{или} \quad \frac{3x+a-(a-1)^2(x-a)}{x-a}<0;$$

а по умноженіи обѣихъ частей на $(x-a)^2$:

$$(x-a)[-(a^2-2a-2)x+(a^2-2a+2)a]<0,$$

что можно представить въ видѣ

$$(a^2-2a-2)(x-a)\left(x-\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a\right)>0.$$

Во-первыхъ, должно быть $a-1>0$; во-вторыхъ, x можно давать только такія значенія, которыя: или $<-\frac{a}{3}$, или $>a$.

Разсмотримъ, каковъ будетъ знакъ коэффиціента a^2-2a-2; корни этого тринома, какъ видно a priori, дѣйствительные и неравные, одинъ положительный, другой отрицательный; замѣняя въ триномѣ a единицей, находимъ въ результатѣ -3, сл. 1 находится между корнями, и слѣд. положит. корень >1; вычисливъ его, находимъ $a_1=1+\sqrt{3}$. Мы можемъ давать a только значенія, большія единицы; но эти значенія могутъ быть или $<$, или $>1+\sqrt{3}$.

Такимъ образомъ, различаемъ два случая:

Первый случай: $1<a<1+\sqrt{3}$.

Такія значенія a лежатъ между корнями тринома a^2-2a-2, а потому онъ отрицателенъ; значитъ и произведеніе двухъ другихъ множителей д. б. отрицательнымъ, а потому величины x, удовлетворяющія неравенству, должны лежать между

$$a \quad \text{и} \quad +\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a;$$

нужно знать сравнительную величину этихъ предѣловъ.

Но триномъ a^2-2a+2, имѣя корни мнимые, положителенъ при всякомъ a; a^2-2a-2, при взятыхъ значеніяхъ a, отрицателенъ; слѣд.

$$a>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a,$$

и потому должно взять

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a<x<a.$$

Съ другой стороны, для дѣйствительности радикала, находящагося въ неравенствѣ, x нужно брать или $>a$, или $<-\frac{a}{3}$. Поэтому сравнимъ предѣлы

$$-\frac{a}{3} \quad \text{и} \quad \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a,$$

допустивъ, напр., что

$$-\frac{a}{3}>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}\cdot a.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ: $a > 0$ и $a^2 - 2a - 2 < 0$; слѣд. умноживъ обѣ части на $\frac{a^2 - 2a - 2}{a}$ и перемѣнивъ смыслъ неравенства, найдемъ ему эквивалентное

$$-a^2 + 2a + 2 < 3a^2 - 6a + 6, \text{ или } 0 < 4a^2 - 8a + 4, \text{ или } 0 < (2a - 2)^2,$$

что вѣрно; слѣд. вѣрно и допущеніе. Такимъ образомъ, необходимо и достаточно взять x такъ:

$$\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a < x < -\frac{a}{3}.$$

Второй случай. $a > 1 + \sqrt{3}$.

Множитель $a^2 - 2a - 2$ въ этомъ случаѣ > 0; сл. необходимо и достаточно, чтобы произведеніе двухъ другихъ множителей было положительно, слѣд. x можетъ принимать всѣ значенія, не содержащіяся между

$$a \text{ и } \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

Для сравненія этихъ предѣловъ допустимъ, напр.:

$$\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a < a.$$

Такъ какъ въ изслѣдуемомъ случаѣ a и $a^2 - 2a - 2$ положительны, замѣнимъ это неравенство ему эквивалентнымъ

$$a^2 - 2a + 2 < a^2 - 2a - 2, \quad \text{или} \quad 4 < 0,$$

что невѣрно; и потому $\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a > a$; такъ что должно взять

или $x < a$, или $x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a$.

Комбинируя эти результаты съ предѣлами, найденными à priori, находимъ

$$x < -\frac{a}{3}, \quad \text{или} \quad x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} \cdot a.$$

Итакъ:

при $a < 1$ предложенное неравенство *невозможно;*
при $1 < a < 1 + \sqrt{3}$ ему удовлетворяютъ:

$$\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a < x < -\frac{a}{3};$$

при $a > 1 + \sqrt{3}$ ему удовлетворяютъ:

$$\text{или } x < -\frac{a}{3}, \quad \text{или} \quad x > \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a - 2} a.$$

508. Примѣръ V. *Рѣшить неравенство*

$$\frac{\sqrt{3x-2a}}{x+a}>\frac{\sqrt{3x-a}}{x+5a},$$

гдѣ a дѣйствительное количество.

Чтобы оба радикала были дѣйствительны, нужно, чтобы было $x>\frac{2}{3}a$ и $x>\frac{a}{3}$; но одно изъ этихъ условій содержитъ въ себѣ другое, а именно:

при $a<0$ необходимо и достаточно, чтобы было $x>\frac{a}{3}$;

при $a>0$ необходимо и достаточно взять $x>\frac{2}{3}a$.

Первый случай: $a<0$.

Нужно знать знаки обѣихъ частей, и для этого сдѣлать предположенія относительно знаковъ $x+a$ и $x+5a$.

1) $x+a<0$, тогда и подавно $x+5a<0$; обѣ части неравенства отрицательны, а потому, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, съ перемѣною смысла неравенства, и уничтоживъ положительный знаменатель, получимъ:

$(3x-2a)(x+5a)^2-(3x-a)(x+a)^2<0$, или $23ax^2+54a^2x-49a^3<0$,

или, сокративъ на $a<0$:

$$23x^2+54ax-49a^2>0.$$

Триномъ первой части, какъ видно à priori, имѣетъ корни дѣйств. неравные съ противоположными знаками; слѣд. чтобы сдѣлать его >0, необходимо и достаточно дать x значенія, лежащія внѣ корней. Корни его суть

$$x'=-\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a,\quad x''=+\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a,$$

и какъ $a<0$, то очевидно $x'>x''$.

Слѣдовательно, должно взять

$$x<\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a,\quad \text{или}\quad x>-\frac{\sqrt{1856}+27}{27}a.$$

Но мы видѣли, что x должно быть $>\frac{a}{3}$ и $<-a$. Подставляя въ триномъ $(-a)$ и $\frac{a}{3}$ вмѣсто x, убѣдимся, что эти величины расположены относительно корней x' и x'' такъ:

$$-\infty\cdots\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a\cdots\frac{a}{3}\cdots(-a)\cdots-\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a\cdots+\infty$$

и слѣд. *невозможно* удовлетворить неравенству, если

$$a<0\quad\text{и}\quad x<-a.$$

2) $-a < x < -5a$, т.-е. $x+a$ и $x+5a$ противоположны по знаку; первая часть неравенства >0, вторая <0; и какъ $x > \frac{a}{3}$, *неравенство удовлетворено*.

3) $x+5a>0$; и подавно $x+a>0$. Обѣ части неравенства положительны, и потому, возвышая въ квадратъ и сохраняя смыслъ неравенства, найдемъ:

$$23x^2+54ax-49a^2<0,$$

и слѣд.

$$\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a < x < -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a.$$

Кромѣ того, должно быть: $x>-5a$ и $x>\frac{a}{3}$, что приводится къ $x>-5a$; а какъ порядокъ величинъ таковъ:

$$-\infty \dots \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \dots \frac{a}{3} \dots -a \dots -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \dots -5a \dots +\infty$$

то очевидно, что неравенству удовлетворить *нельзя*.

Итакъ: *когда $a<0$, чтобы удовлетворить неравенству, надо взять*

$$-a<x<-5a.$$

Второй случай: $a>0$.

Чтобы радикалы были дѣйствительны, надо чтобы было: $x>\frac{2}{3}a$. Слѣд. будетъ: $x+a>0$ и $x+5a>0$; а потому, возвысивъ въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства, находимъ эквивалентное данному неравенство (по сокращеніи на $a>0$):

$$23x^2+54ax-49a^2>0;$$

откуда заключаемъ, что x нужно взять внѣ интервала корней. А какъ порядокъ величинъ въ данномъ случаѣ таковъ:

$$-\infty \dots -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \dots \frac{2}{3}a \dots \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \dots +\infty,$$

то: *когда $a>0$, необходимо и достаточно взять*

$$x>\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a.$$

ГЛАВА XXXIV.

Раціональныя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ. Биквадратное ур—ніе: изслѣдованіе его корней.—Разложеніе биквадратнаго тринома на множители первой и второй степени.—Преобразованіе сложныхъ радикаловъ: $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$ и т. п.

509. Рѣшеніе биквадратнаго уравненія. *Уравненіе четвертой степени называется биквадратнымъ, когда оно содержитъ только четныя степени неизвѣстнаго.* Слѣдовательно, общая форма его есть

$$ax^4+bx^2+c=0\ .\ .\ .\ (1).$$

Его рѣшеніе приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ за неизвѣстное x^2, положивъ

$$x^2=y\ .\ .\ .\ (2).$$

Ур—ніе (1) приметъ видъ

$$ay^2+by+c=0\ .\ .\ .\ (3).$$

Это ур—ніе называютъ *разрѣшающимъ* (резольвентомъ) ур—нія (1). Рѣшивъ его, найдемъ два корня

$$y'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad y''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Подставляя въ ур—ніе (2) вмѣсто y сначала y', потомъ y'', находимъ

$$x^2=y',\qquad x^2=y''$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{y'},\qquad x=\pm\sqrt{y''},$$

или

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Итакъ, биквадратное ур—ніе имѣетъ четыре корня, попарно равные и противоположные по знаку.

510. Изслѣдованіе корней. Мы знаемъ, что корни ур—нія $ax^4+bx^2+c=0$ суть корни уравненія

$$x^2=y,$$

въ которомъ y означаетъ одинъ изъ корней уравненія

$$ay^2+by+c=0.$$

Слѣдовательно: *всякому дѣйствительному и положительному значенію y соотвѣтствуютъ два дѣйствительныя значенія x, равныя по величинѣ и противоположныя по знаку; каждому дѣйствительному и отрицательному значенію y соотвѣтствуютъ два значенія x мнимыя сопряженныя*, наконецъ, *каждое мнимое значеніе y даетъ два мнимыя значенія для x.*

Итакъ, приходимъ къ слѣдующему изслѣдованію:

I. $b^2-4ac>0$. Корни ур—нія $ay^2+by+c=0$ дѣйствительные неравные: одного знака, если ихъ произведеніе $\frac{c}{a}$ положительно, и съ противоположными знаками, если $\frac{c}{a}$ отрицательно.

Въ первомъ случаѣ $\left(\frac{c}{a}>0\right)$, оба корня положительны, если ихъ сумма $-\frac{b}{a}$ положительна, и отрицательны, если $-\frac{b}{a}$ отрицательно. Если оба значенія y положительны, то всѣ четыре значенія x дѣйствительны; если оба значенія y отрицательны: то всѣ четыре значенія x мнимы. Во второмъ случаѣ $\left(\frac{c}{a}<0\right)$ два значенія y противоположны по знаку, поэтому два значенія x дѣйствительны, два другія мнимы. Въ частномъ случаѣ, когда $c=0$, одинъ корень резольвента нуль, другой $=-\frac{b}{a}$; т. е. $x^2=0$, $x^2=-\frac{b}{a}$. Первое даетъ $x'=x''=0$; второе даетъ $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, два корня дѣйств., если $\frac{b}{a}<0$, два мним., если $\frac{b}{a}>0$.

II. $b^2-4ac=0$. Корни уравненія $ay^2+by+c=0$ дѣйствительные равные: ихъ общая величина $=-\frac{b}{2a}$.

Слѣд. биквадратное ур. имѣетъ четыре корня, попарно равные:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}};$$

они дѣйствительны, если $\frac{b}{a}<0$, и мнимы, если $\frac{b}{a}>0$.

Если $b=0$, то условіе $b^2-4ac=0$ ведетъ къ $c=0$; ур. въ x будетъ $ax^4=0$, т.-е. *ур. имѣетъ 4 корня равныхъ нулю.*

III. $b^2-4ac<0$. Корни ур—нія $ay^2+by+c=0$ мнимые, слѣд. и всѣ четыре корня биквадратнаго ур—нія мнимые, ибо квадратный корень изъ $p+qi$ есть мнимое выраженіе того же вида.

Результаты этого изслѣдованія можно резюмировать въ видѣ слѣдующей таблицы:

$$b^2-4ac>0\left\{\begin{array}{l}\frac{c}{a}>0\left\{\begin{array}{l}\frac{b}{a}<0\ .\ .\ .\ \text{4 корня дѣйствительные, попарно равные и противоположные по знаку.}\\ \\ \frac{b}{a}>0\ .\ .\ .\ \text{4 корня мнимые.}\end{array}\right.\\ \frac{c}{a}<0\ .\ .\ .\ \text{2 корня дѣйствительные, равные и противоположные по знаку; 2 корня мнимые.}\\ \frac{c}{a}=0\ .\ .\ .\ x_1=x_2=0;\ x_3{}^4=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}\left[\text{дѣйств., если }\frac{b}{a}<0\text{; мнимые, если }\frac{b}{a}>0\right].\end{array}\right.$$

$$b^2 - 4ac = 0 \left\{ \begin{array}{ll} \frac{b}{a} < 0 & \ldots \text{4 корня дѣйствительные, попарно равные} \\ & x_1 = x_2 = +\sqrt{-\frac{b}{2a}};\ x_3 = x_4 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}. \\ \frac{b}{a} > 0 & \ldots \text{4 корня мнимые.} \\ \frac{b}{a} = 0 & \ldots x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0. \end{array} \right.$$

$b^2 - 4ac < 0$ . . . . 4 корня мнимые.

Примѣчаніе. Отсюда видно, что нужны *три* условія для того, чтобы всѣ четыре корня биквадратнаго ур—нія были дѣйствительны; именно:

$$b^2 - 4ac \geqslant 0, \quad \frac{c}{a} > 0, \quad \frac{b}{a} < 0;$$

и *одно* условіе, чтобы два корня были дѣйствительны, а два мнимы; именно:

$$\frac{c}{a} < 0.$$

511. Примѣры: I. *Рѣшить уравненіе* $64x^4 - 244x^2 + 225 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, находимъ квадратное ур—ніе

$$64y^2 - 244y + 225 = 0;$$

въ немъ: $b'^2 - ac = 122^2 - 64 \times 225 = 484 > 0$; $\frac{225}{64} > 0$; $\frac{244}{64} < 0$; сл оба значенія y дѣйствительныя, неравныя и положительныя, а потому биквадратное ур—ніе имѣетъ всѣ *четыре корня дѣйствительные*. Находимъ:

$$y = \frac{122 \pm \sqrt{122^2 - 64 \times 225}}{64} = \frac{122 \pm 22}{64};$$

$$y' = \frac{9}{4}, \quad y'' = \frac{25}{16}.$$

откуда:

$$x_1 = +\frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = +\frac{5}{4}, \quad x_4 = -\frac{5}{4}.$$

II. *Рѣшить уравненіе* $5x^4 + 12x^2 + 4 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, находимъ ур—ніе $5y^2 + 12y + 4 = 0$; въ немъ

$$b'^2 - ac = 36 - 5 \times 4 = 16 > 0;$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} > 0; \quad \frac{b}{a} = \frac{12}{5} > 0.$$

Слѣд. корни его дѣйствительные, неравные, оба отрицательные; а потому данное ур—ніе имѣетъ всѣ *четыре корня мнимые*. Находимъ

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{5} = \frac{-6 \pm 4}{5};$$

$$y' = -\frac{2}{5}, \quad y'' = -2.$$

Слѣдовательно

$$x_1 = +\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot i, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot i, \quad x_3 = +\sqrt{2} \cdot i, \quad x_4 = -\sqrt{2} \cdot i.$$

III. *Рѣшить уравненіе* $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, находимъ ур—ніе $3y^2 - 26y - 9 = 0$. Въ немъ:

$$b'^2 - ac = 13^2 + 3.9 = 169 - 27 = 196 > 0;$$

$$\frac{c}{a} = -3 < 0; \ \frac{b}{a} = -\frac{26}{3} < 0;$$

слѣд. оно имѣетъ корни дѣйствительные неравные, съ противоположными знаками, а потому предложенное ур—ніе имѣетъ *два дѣйствительныхъ корня* и *два мнимыхъ*.

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{196}}{3} = \frac{13 \pm 14}{3};$$

откуда

$$y' = +9; \quad y'' = -\frac{1}{3};$$

слѣдовательно

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i; \quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot i.$$

IV. *Рѣшить уравненіе* $x^4 - 10x^2 - 61 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, получимъ ур—ніе $y^2 - 10y - 61 = 0$, въ которомъ $b'^2 - ac = 25 - 61 = -36$; слѣд. оба значенія y мнимы, и потому данное ур—ніе имѣетъ *четыре мнимыхъ корня*. Находимъ

$$y' = 5 + 12i, \quad y'' = 5 - 12i.$$

Слѣдовательно

$$x = \pm\sqrt{5 \pm 12i}.$$

Преобразовавъ это выраженіе по способу § 417, найдемъ:

$$x_1 = 3 + 2i, \quad x_2 = 3 - 2i, \quad x_3 = -3 - 2i, \quad x_4 = -3 + 2i.$$

V. *Рѣшить уравненіе* $x^4 - 10x^2 - 28 = 0$.

Положивъ $x^2 = y$, имѣемъ ур—ніе $y^2 - 10y - 28 = 0$, въ которомъ

$$b'^2 - ac = 25 - 28 = -3 < 0;$$

слѣд. корни его мнимые, именно

$$y = 5 \pm \sqrt{3} . i.$$

Слѣд. четыре мнимые корня предложеннаго заключаются въ формулѣ

$$x = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{3} . i}.$$

Примѣняя къ ней преобразованіе, указанное въ § 417, найдемъ:

$$\pm\sqrt{5 \pm \sqrt{3} . i} = \pm\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 5}{2}} \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{7} - 5}{2}} \cdot i\right].$$

Такимъ образомъ:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}} \times i; \quad x_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}} \times i;$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}} \times i; \quad x_4 = -\sqrt{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{7}-5}{2}} \times i.$$

512. *Приложеніе.—Доказать, что уравненіе* $\frac{x^2}{x^2-a^2} + \frac{x^2}{x^2-b^2} = 4$ *имѣетъ всѣ четыре корня дѣйствительные, каковы бы ни были дѣйствительныя количества* a *и* b.

Помноживъ обѣ части на $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$, дадимъ ур—нію цѣлый видъ

$$x^2(x^2-b^2) + x^2(x^2-a^2) - 4(x^2-a^2)(x^2-b^2) = 0.$$

Положивъ $x^2 = y$, получаемъ квадратное относительно y ур.

$$y(y-b^2) + y(y-a^2) - 4(y-a^2)(y-b^2) = 0.$$

Подставляя въ первую часть вмѣсто y сперва a^2, потомъ b^2, замѣчаемъ, что результаты этихъ подстановокъ: $a^2(a^2-b^2)$ и $b^2(b^2-a^2)$ имѣютъ противоположные знаки; слѣд. корни относительно y дѣйствительные и неравные, и одинъ изъ нихъ содержится между a^2 и b^2. Далѣе: коэффиціентъ при y^2 отрицателенъ ($= -2$); подстановка же 0 на мѣсто y даетъ $-4a^2b^2$; слѣд. 0 находится внѣ корней, и слѣд. меньше обоихъ корней, ибо мы уже знаемъ, что одинъ изъ корней положителенъ. Итакъ, оба корня: y' и y'' дѣйствительны и положительны, каковы бы ни были a и b, а слѣд. всѣ четыре корня даннаго ур—нія дѣйствительны.

Къ этому заключенію можно придти и иначе. Ур—ніе относительно y приводится къ виду:

$$2y^2 - 3(a^2+b^2)y + 4a^2b^2 = 0.$$

Подрадикальное количество формулы корней есть

$$9(a^2+b^2)^2 - 32a^2b^2, \quad \text{или} \quad 9a^4 - 14a^2b^2 + 9b^4.$$

Но этотъ квадратный относительно a^2 триномъ имѣетъ корни мнимые, ибо $49b^4 - 81b^4 < 0$, слѣд. при всякихъ a и b знакъ его одинаковъ со знакомъ 9, т.-е. положителенъ. Поэтому оба значенія y дѣйствительны. Ихъ произведеніе $2a^2b^2$ показываетъ, что они одного знака, а сумма ихъ $\frac{3}{2}(a^2+b^2)$ показываетъ, что оба они положительны. Слѣд. четыре корня предложеннаго ур—нія всегда дѣйствительны.

513. ТЕОРЕМА. *Сумма корней биквадратнаго ур—нія равна нулю, произведеніе ихъ равно* $\frac{c}{a}$, *а сумма квадратовъ ихъ равна* $-\frac{2b}{a}$.

Въ самомъ дѣлѣ, четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 попарно равны и противоположны по знаку, слѣд. сумма ихъ $= 0$. Во-вторыхъ, $(+\sqrt{y'})^2 + (-\sqrt{y'})^2 + (+\sqrt{y''})^2 + (-\sqrt{y''})^2 = 2(y'+y'')$; но $y'+y''$, какъ сумма корней квадр. ур—нія $ay^2+by+c=0$, равна $-\frac{b}{a}$, слѣд. сумма квадратовъ корней даннаго ур—нія $=-\frac{2b}{a}$. Наконецъ, произведеніе $(+\sqrt{y'})(-\sqrt{y'})(+\sqrt{y''})(-\sqrt{y''})$ $=y'y''=\frac{c}{a}$.

514. Разложеніе биквадратнаго тринома ax^4+bx^2+c на множители первой степени.

Триномъ ax^4+bx^2+c, обращаясь въ нуль при каждомъ изъ четырехъ своихъ корней x_1, x_2, x_3, x_4, дѣлится на каждый изъ биномовъ $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$, $x-x_4$, а потому и на ихъ произведеніе; такъ какъ дѣлимое и дѣлитель—одинаковой степени относительно x, то частное будетъ нулевой степени, и потому приводится къ частному отъ раздѣленія высшаго члена, ax^4, дѣлимаго на высшій членъ x^4 дѣлителя. Итакъ:

$$ax^4+bx^2+c=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Примѣры.—I. *Разложить триномъ* $5x^4-50x^2+45$.

Корни его суть: ± 3, ± 1; слѣд.

$$5x^4-50x^2+45=5(x-3)(x+3)(x-1)(x+1).$$

II. *Разложить триномъ* $2x^4+7x^2+6$.

Корни его суть: $\pm\sqrt{2}\,.\,i$, $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i$. Слѣд.

$$2x^4+7x^2+6=2(x-\sqrt{2}\,.\,i)(x+\sqrt{2}\,.\,i)\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i\right)$$

III. *Разложить триномъ* $-x^4+10x^2-169$.

Корни его суть: $3\pm 2i$, $-3\pm 2i$. Слѣд.

$$-x^4+10x^2-169=-(x-3-2i)(x-3+2i)(x+3-2i)(x+3+2i)$$

515. Разложеніе биквадратнаго тринома съ дѣйствительными коэффиціентами на дѣйствительные квадратные множители.

Пусть триномъ ax^4+bx^2+c имѣетъ корни α, $-\alpha$, β, $-\beta$; въ такомъ случаѣ его можно представить подъ видами:

$$\begin{aligned} ax^4+bx^2+c &= a[(x-\alpha)(x+\alpha)][(x-\beta)(x+\beta)]\;.\;.\;.\;(1)\\ &= a[(x-\alpha)(x-\beta)][(x+\alpha)(x+\beta)]\;.\;.\;.\;(2)\\ &= a[(x-\alpha)(x+\beta)][(x+\alpha)(x-\beta)]\;.\;.\;.\;(3)\end{aligned}$$

Когда четыре корня α, $-\alpha$, β, $-\beta$ дѣйствительны, всѣ три разложенія дадутъ дѣйствительные квадратные множители.

Если два изъ этихъ корней мнимы, то квадратные множители будутъ дѣйствительны только въ одномъ изъ этихъ разложеній, именно въ томъ, гдѣ для составленія одного и того же множителя соединены два сопряженные корня.

Наконецъ, если четыре корня мнимы, то опять существуетъ только одно разложеніе на дѣйствительные квадратные множители, то именно, въ которомъ каждый изъ квадратныхъ множителей происходитъ отъ сочетанія сопряженныхъ корней. Отсюда

Теорема. *Биквадратный триномъ съ дѣйствительными коэффиціентами всегда можно разложить, по крайней мѣрѣ, однимъ способомъ, на произведеніе дѣйствительныхъ квадратныхъ множителей.*

Чтобы получить это разложеніе, нужно вычислить корни тринома; это вычисленіе усложняется вспомогательнымъ вычисленіемъ въ томъ случаѣ, когда всѣ четыре корня мнимы, т.-е. когда $b^2-4ac<0$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ значительно быстрѣе найдемъ требуемое разложеніе слѣдующимъ пріемомъ. Пусть имѣемъ триномъ

$$y=a\left(x^4+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}\right),$$

въ которомъ предполагается $b^2-4ac<0$. Разсматривая x^4 и $\frac{c}{a}$ какъ крайніе члены квадрата, дополнимъ его, прибавляя и вычитая $2x^2\sqrt{\frac{c}{a}}$; найдемъ

$$y=a\left[\left(x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2-\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)x^2\right].$$

Но какъ $b^2-4ac<0$, то $4ac>0$, слѣд. и $\frac{c}{a}>0$, а потому $\sqrt{\frac{c}{a}}$ — *количество дѣйствительное*. Далѣе, раздѣливъ обѣ части неравенства $b^2-4ac<0$ на положительное количество a^2, находимъ

$$4\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}>0,\quad \text{или}\quad \left(2\sqrt{\frac{c}{a}}+\frac{b}{a}\right)\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}\right)>0.$$

Но оба эти множителя не могутъ быть отрицательными, ибо ихъ сумма, равная $4\sqrt{\frac{c}{a}}$, положительна, слѣд. оба они положительны, и потому

$$2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}>0.$$

Итакъ, триномъ можно представить въ видѣ произведенія двухъ дѣйствительныхъ факторовъ:

$$y=a\left[x^2+\sqrt{\frac{c}{a}}+x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}\right]\left[x^2-\sqrt{\frac{c}{a}}-x\sqrt{2\sqrt{\frac{c}{a}}-\frac{b}{a}}\right].$$

Примѣръ. *Разложить на два дѣйствительные множителя триномъ* $y=x^4-10x^2+28$.

Имѣемъ,

$$y=(x^2+2\sqrt{7})^2-(4\sqrt{7}+10)x^2$$

$$=(x^2-x\sqrt{4\sqrt{7}+10}+2\sqrt{7})(x^2-x\sqrt{4\sqrt{7}+10}+2\sqrt{7}).$$

516. Преобразованіе сложнаго радикала $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$. Корни биквадратнаго ур—нія выражаются формулою вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$; и когда B не есть точный квадратъ, т.-е. $\sqrt{B}$ несоизмѣримъ, формула эта весьма невыгодна для приближеннаго вычисленія. Попытаемся, если окажется возможно, замѣнить выраженіе этого вида другимъ, которое не содержало бы извлеченія корня изъ несоизмѣримаго числа. Но предварительно докажемъ слѣдующую лемму.

517. Лемма. *Если a, b, a' и b' суть числа соизмѣримыя, а $\sqrt{b}$ и $\sqrt{b'}$ несоизмѣримы, то равенство*

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'} \ . \ . \ . (1)$$

возможно только тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ выводимъ

$$\sqrt{b'} = (a - a') + \sqrt{b},$$

или, возвышая обѣ части въ квадратъ:

$$b' = (a - a')^2 + 2(a - a')\sqrt{b} + b,$$

или

$$b' - b - (a - a')^2 = 2(a - a')\sqrt{b}.$$

[illegible] a [illegible], мы нашли бы отсюда нелѣпый выводъ

$$\sqrt{b} = \frac{b' - b - (a - a')^2}{2(a - a')},$$

[illegible] равно соизмѣримому. Итакъ $a = a'$, а тогда изъ (1) слѣдуетъ, что и $b = b'$.

[illegible] найти такія два соизмѣримыя числа x и y, которыя [illegible] бы равенству

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \ . \ . \ . (1)$$

[illegible] A и B положительныя соизмѣримыя числа, а $\sqrt{B}$ несоизмѣримъ. Возвышая обѣ части въ квадратъ, найдемъ

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \ . \ . \ . (2)$$

$\sqrt{xy}$ долженъ быть несоизмѣримъ; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное и написавъ ур—ніе (2) въ видѣ

$$\sqrt{B} = x + y - A + 2\sqrt{xy},$$

[illegible] бы, что несоизмѣримое число равно соизмѣримому. Примѣняя къ ур—нію (2) предыдущую лемму, находимъ:

$$x + y = A \quad \text{и} \quad xy = \frac{B}{4};$$

и это—единственно возможное условіе существованія равенства (2) при x и y

соизмѣримыхъ. Послѣднія уравненія показываютъ, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$u^2 - Au + \frac{B}{4} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad \ldots (3)$$

Видимъ, что преобразованіе $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ въ выраженіе $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, гдѣ x и y были бы соизмѣримы, возможно только тогда, когда $A^2 - B$ *есть точный квадратъ;* дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, положивъ $A^2 - B = k^2$, гдѣ K—соизмѣримо, имѣемъ:

$$x = \frac{A + K}{2} \text{ и } y = \frac{A - K}{2}.$$

Итакъ, если это условіе выполнено, искомое преобразованіе возможно и выражается тождествомъ

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad \ldots (4)$$

и это—единственно возможная форма преобразованія въ разсматриваемомъ случаѣ, ибо ур—ніе (2) распалось на два ур—нія съ 2 неизвѣстными, вслѣдствіе чего и получились опредѣленныя рѣшенія для x и y.

Желая подобнымъ же образомъ преобразовать $\sqrt{A - \sqrt{B}}$, не можемъ положить $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ибо это повело бы къ нелѣпому слѣдствію:

$$-\sqrt{B} = 2\sqrt{xy};$$

но можно положить равенство

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Но если бы мы искали два количества x и y, удовлетворяющія ур—нію

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y},$$

не дѣлая ограниченія относительно соизмѣримости x и y, то задача, очевидно, была бы неопредѣленна. Возвышая обѣ части въ квадратъ, мы нашли бы уравненіе

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy},$$

которому *можно* удовлетворить, полагая

$$x + y = A, \quad xy = \frac{B}{4},$$

откуда нашли бы прежнюю форму преобразованія

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \ldots \quad (1)$$

но можно бы было удовлетворить ур—нію *и иначе;* что дало бы *другія* значенія для x и y; рѣшеніе (1) было бы однимъ изъ безчисленнаго множества рѣшенія неопредѣленнаго ур—нія $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

518. *Примѣчаніе.* Опредѣляя x и y, удовлетворяющія ур—нію

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \ldots (1)$$

мы должны были возвысить это ур. въ квадратъ и рѣшать ур—ніе

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \ldots (2).$$

Но ур—ніе (2) могло бы получиться и изъ ур—нія

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = -\sqrt{x} - \sqrt{y};$$

такъ что нужно удостовѣриться, что найденныя значенія для x и y дѣйствительно удовлетворяютъ преобразованію $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.

И въ самомъ дѣлѣ, преобразованіе $\sqrt{A + \sqrt{B}} = -\sqrt{x} - \sqrt{y}$ не можетъ имѣть мѣста при дѣйствительныхъ x и y: слѣд. тождество (4) § 517 въ самомъ дѣлѣ отвѣчаетъ искомому преобразованію.

Примѣры.—I. *Преобразовать* $\sqrt{6 \pm \sqrt{11}}$.

Здѣсь $A = 6$, $B = 11$; слѣд. $A^2 - B = 25 = 5^2$; а потому

$$\sqrt{6 + \sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6+5}{2}} + \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11} + 1).$$

$$\sqrt{6 - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11} - 1).$$

II. *Преобразовать* $\sqrt{17 \pm 2\sqrt{70}}$.

Въ данномъ случаѣ $A = 17$; подводя 2 подъ знакъ корня, имѣемъ $2\sqrt{70} = \sqrt{4.70} = \sqrt{280}$, слѣд. $B = 280$; $A^2 - B = 17^2 - 280 = 9 = 3^2$. Такимъ образомъ:

$$\sqrt{17 + 2\sqrt{70}} = \sqrt{\frac{17+3}{2}} + \sqrt{\frac{17-3}{2}} = \sqrt{10} + \sqrt{7}; \text{ и}$$

$$\sqrt{17 - 2\sqrt{70}} = \sqrt{10} - \sqrt{7}.$$

III. *Преобразовать* $\sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4m^4}}{2}}$.

Это выраженіе можно представить въ видѣ $\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - m^4}}$.

Здѣсь $A = \frac{a^2}{2}$, $B = \frac{a^4}{4} - m^4$, $A^2 - B = \frac{a^4}{4} - \left(\frac{a^4}{4} - m^4\right) = m^4$; слѣд.

$$\sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4m^4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} + m^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} - m^2}{2}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + 2m^2} \pm \sqrt{a^2 - 2m^2}\right].$$

519. *Приложенія.* — I. *Опредѣлить условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты биквадратнаго уравненія $ax^4 + bx^2 + c = 0$, для того чтобы его корни можно было выразить въ видѣ алгебраической суммы двухъ простыхъ радикаловъ.*

Корни биквадратнаго ур—нія можно представить въ видѣ

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}};$$

слѣд. $A = -\frac{b}{2a}$, $B = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, и слѣд. $A^2 - B = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Заключаемъ, что когда $\frac{c}{a}$ есть точный квадратъ, преобразованіе возможно, и получается формула

$$x = \pm\left[\sqrt{-\frac{b}{4a} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}} \pm \sqrt{-\frac{b}{4a} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}}\right]$$

Пусть, наприм., дано ур—ніе $18x^4 - 45x^2 + 2 = 0$. Здѣсь $\frac{c}{a} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$, указанное условіе имѣетъ мѣсто, и слѣд. корни можно представить въ видѣ

$$x = \pm\left[\sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}}\right] = \pm\left[\sqrt{\frac{45}{72} + \frac{1}{6}} \pm \sqrt{\frac{45}{72} - \frac{1}{6}}\right]$$

$$= \pm\frac{\sqrt{57} \pm \sqrt{33}}{6\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{57} \pm \sqrt{33}).$$

Еще примѣръ. Въ уравненіи $ay^4 + 2(a - 2b)y^2 + a = 0$ отношеніе 3-го коэффиціента къ 1-му, равное $\frac{a}{a}$ или 1, есть точный квадратъ, и слѣд. корни можно преобразовать въ сумму простыхъ радикаловъ; преобразованіе дастъ

$$y = \pm\sqrt{b} \pm \sqrt{b - a}.$$

II. Въ геометріи доказывается, что если a означаетъ сторону правильнаго, вписаннаго въ кругъ радіуса R, многоугольника, а b—сторону прав. впис. многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ, то

$$b = \sqrt{2R^2 - \sqrt{R^2(4R^2 - a^2)}}.$$

Это выраженіе можно превратить въ сумму простыхъ радикаловъ: въ самомъ дѣлѣ, $A = 2R^2$, $B = R^2(4R^2 - a^2)$, слѣд. $A^2 - B = a^2R^2$, и потому

$$b = \sqrt{\frac{2R^2 + aR}{2}} - \sqrt{\frac{2R^2 - aR}{2}} = \sqrt{R\left(R + \frac{a}{2}\right)} - \sqrt{R\left(R - \frac{a}{2}\right)}.$$

Пусть, наприм., $a = R$; первый многоугольникъ будетъ правильный шестиугольникъ, второй—правильный двѣнадцатиугольникъ; получимъ

$$b = R\sqrt{\frac{3}{2}} - R\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}.$$

520. Въ заключеніе этой главы рѣшимъ еще три вопроса, относящіеся къ преобразованію квадратнаго и биквадратнаго корней.

Первый вопросъ. *Представить $\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ въ формѣ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.*

Положивъ $\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, и возвысивъ въ квадратъ, имѣемъ

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}.$$

Если удастся найти соизмѣримыя числа x, y, z, удовлетворяющія ур—ямъ

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{b},\quad 2\sqrt{xz} = \sqrt{c},\quad 2\sqrt{yz} = \sqrt{d}\ .\ .\ .\ (1)$$

и если, вмѣстѣ съ тѣмъ, найденныя значенія x, y, z, удовлетворяютъ ур—нію $x + y + z = a\ .\ .\ .\ (2)$, то указанное преобразованіе выполнимо.

Слѣд., соотношеніе между a, b, c, d, при которомъ искомое преобразованіе возможно, мы найдемъ, исключивъ x, y и z изъ ур—ній (1) и (2)

Ур—нія (1) даютъ:

$$xy = \frac{b}{4},\quad xz = \frac{c}{4},\quad yz = \frac{d}{4};$$

перемножая и извлекая квадратный корень, имѣемъ:

$$xyz = \frac{\sqrt{bcd}}{8},$$

откуда дѣленіемъ находимъ:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}},\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}},\quad z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}};$$

подставивъ во (2), найдемъ:

$$\sqrt{\frac{bc}{d}} + \sqrt{\frac{bd}{c}} + \sqrt{\frac{cd}{b}} = 2a:$$

таково искомое соотношеніе.

Пусть, напр., нужно найти

$$\sqrt{16 - 2\sqrt{20} - 2\sqrt{28} + 2\sqrt{35}}.$$

Приравнявъ это $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$ и возвысивъ въ квадратъ, имѣемъ

$$16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}.$$

Положивъ

$$\sqrt{xy}=\sqrt{35},\quad \sqrt{xz}=\sqrt{20},\quad \sqrt{yz}=\sqrt{28},$$

имѣемъ

$$xyz=140,\quad \text{слѣд.}\quad \sqrt{xyz}=2\sqrt{35};$$

откуда

$$\sqrt{x}=\sqrt{5};\quad \sqrt{y}=\sqrt{7};\quad \sqrt{z}=2.$$

Эти значенія x, y, z удовлетворяютъ ур—нію $x+y+z=16$; слѣд. **искомый корень** $=\sqrt{5}+\sqrt{7}-2$.

Второй вопросъ. *Представить выраженіе*

$$V=\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$$

въ видѣ произведенія двухъ сомножителей вида $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. — *Доказать, что преобразованіе возможно только при условіи, когда* $a^2d=bc$, *и что оно выгодно только тогда, когда* a^2-b *и* a^2-c *суть точные квадраты.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{u}+\sqrt{v}),$$

по возвышеніи въ квадратъ, даетъ

$$a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=(x+y+2\sqrt{xy})(u+v+2\sqrt{uv}).$$

Этому ур—нію удовлетворимъ, положивъ

$$a=(x+y)(u+v);\quad b=4(x+y)^2uv;\quad c=4(u+v)^2xy;\quad d=16xyuv.$$

Эти ур—нія, какъ легко видѣть, несовмѣстны, если не имѣется соотношенія $a^2d=bc$. Когда это условіе удовлетворено, система неопредѣленна. Эта неопредѣленность объясняется при помощи тождества

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{u}+\sqrt{v})=(\sqrt{\lambda x}+\sqrt{\lambda y})\left(\sqrt{\frac{u}{\lambda}}+\sqrt{\frac{v}{\lambda}}\right),$$

имѣющаго мѣсто при всякомъ λ: этимъ доказывается, что разложеніе можетъ быть произведено безчисленнымъ количествомъ способовъ. Неопредѣленность эта даетъ возможность допустить между двумя количествами произвольное соотношеніе. Положимъ, напр., $x+y=1$. Тогда первыя два ур—нія обратятся въ

$$u+v=a,\quad uv=\frac{b}{4},$$

!

откуда

$$u=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b};\quad v=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}.$$

Внося эти величины въ третье, имѣемъ xy; зная, кромѣ того, что $x+y=1$, найдемъ

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\sqrt{a^2-c};\quad y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}\sqrt{a^2-c}.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что если a^2-b и a^2-c будутъ точные квадраты, то u, v, x и y будутъ раціональны, и слѣд., преобразованіе выгодно, ибо оно представляетъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ каждый есть сумма простыхъ радикаловъ.

Такъ, если $U=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{6}}$, то $a=1$, $b=\frac{3}{4}$, $c=\frac{8}{9}$, $d=\frac{6}{9}$; условіе $a^2d=bc$ удовлетворено; $a^2-b=\frac{1}{4}$, $a^2-c=\frac{1}{9}$.

Слѣд. $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$; $u=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; $v=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Итакъ
$$U=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+3)}{6}.$$

Третій вопросъ. *Полагая, что* B *не есть точный квадратъ, представить*

$$U=\sqrt[4]{A+\sqrt{B}}$$

подъ видомъ суммы двухъ квадратныхъ корней: $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. *Указать условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы преобразованіе было выгодно, что можетъ имѣть мѣсто въ двухъ различныхъ случаяхъ: когда* x *и* y *имѣютъ видъ* $\alpha+\sqrt{\beta}$; *когда эти количества соизмѣримы.*

Положивъ
$$\sqrt[4]{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$
и возвысивъ въ четвертую степень, получимъ
$$A+\sqrt{B}=(x+y)^2+4xy+4(x+y)\sqrt{xy},$$
откуда
$$(x+y)^2+4xy=A,\quad 16xy(x+y)^2=B.$$

Отсюда видно, что $(x+y)^2$ и $4xy$ суть корни ур—нія
$$t^2-At+\frac{B}{4}=0;$$
и какъ разность $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$, т.-е. существенно положительна, такъ какъ x и y предполагаются дѣйствительными, мы должны большій корень ур—нія въ t принять за $(x+y)^2$, меньшій за $4xy$. Такимъ образомъ
$$(x+y)^2=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2},\qquad 4xy=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2};$$

или, вычитая второй результатъ изъ перваго

$$(x-y)^2=\sqrt{A^2-B}.$$

Не трудно теперь найти x и y.

Чтобы разсматриваемое преобразованіе было выгодно, нужно, чтобы x или y не содержали биквадратныхъ радикаловъ, слѣд. необходимо, чтобы $A^2-B=K^2$, гдѣ K—число раціональное. Тогда

$$(x+y)^2=\frac{A+K}{2},\quad (x-y)^2=K.$$

Въ этомъ случаѣ x и y имѣютъ, вообще, видъ суммы двухъ простыхъ радикаловъ. Но если одно изъ чиселъ, $\frac{A+K}{2}$ или K, будетъ точнымъ квадратомъ, выраженіе представится въ видѣ суммы двухъ квадратныхъ корней изъ выраженій вида $\alpha+\sqrt{\beta}$. Если, наконецъ, оба числа: $\frac{A+K}{2}$ и K — точные квадраты, выраженіе приметъ видъ двухъ простыхъ радикаловъ.

Примѣры. I. $U=\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$; найдемъ: $A=6$, $K=4$; слѣд.

$$(x+y)^2=5;\quad (x-y)^2=4.$$

Потому

$$U=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.$$

II. $U=\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$; найдемъ: $A=7$; $K=1$; слѣд.

$$(x+y)^2=4;\quad (x-y)^2=1.$$

Отсюда

$$U=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ГЛАВА XXXV.

Раціональныя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ; продолженіе.— Возвратныя уравненія.— Двучленныя уравненія. Трехчленныя уравненія.— Уравненія вида $P.Q.R=0$ и нѣкоторыя другія.

Возвратныя уравненія четвертой степени.

521. Опредѣленія. *Уравненіе называется возвратнымъ перваго рода, если обратная величина каждаго корня уравненія служитъ также корнемъ этого уравненія.*

Уравненіе называется возвратнымъ второго рода, если обратная величина каждаго корня, взятая съ противоположнымъ знакомъ, удовлетворяетъ также уравненію.

522. Лемма. *Если два цѣлыя уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, m-й степени, приведенныя къ виду $A=0$, имѣютъ m различныхъ общихъ корней, то коэффиціенты ихъ пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть два уравненія

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\;.\;\;.\;\;.\;(1)$$
$$a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'=0$$

имѣютъ 4 общихъ корня, т.-е. первыя части ихъ обращаются въ нуль при 4-хъ различныхъ значеніяхъ x; тогда и многочленъ

$$a(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)-a(a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e')$$

обратится въ нуль при тѣхъ же значеніяхъ x; но этотъ многочленъ,

$$(ba'-ab')x^3+(ca'-ac')x^2+(da'-ad')x+(ea'-ae'),$$

есть многочленъ третьей степени относительно x: слѣд. (§ 68, II) онъ тождественно равенъ нулю; а потому всѣ его коэффиціенты равны нулю. Отсюда

$$\frac{a}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d}{d}=\frac{e'}{e}.$$

523. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымъ перваго рода.*

Составимъ ур—ніе, котораго корни были бы обратны корнямъ даннаго. Достаточно вмѣсто x подставить $\frac{1}{x}$. Сдѣлавъ подстановку и приведя къ цѣлому виду, получимъ

$$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=0\;.\;\;.\;\;.\;(2).$$

Если (1) есть возвратное перваго рода, то (2) будетъ имѣть тѣ же корни. Въ самомъ дѣлѣ, если корни перваго будутъ α, $\frac{1}{\alpha}$, β, $\frac{1}{\beta}$, то корни 2-го будутъ $\frac{1}{\alpha}$, α, $\frac{1}{\beta}$, β. Оба уравненія имѣютъ общіе корни, слѣдоват., на основаніи леммы § 522, имѣемъ

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{d}=1=\frac{d}{b}=\frac{e}{a},$$

откуда

$$a=e,\quad b=d,$$

т.-е. коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равны и имѣютъ одинаковые знаки. Итакъ, возвратное уравненіе четвертой степени перваго рода имѣетъ видъ

$$ax^4\pm bx^3\pm cx^2\pm bx+a=0.$$

Примѣчаніе I. Если средній коэффиціентъ разсматриваемаго уравненія равенъ 0, $c=0$, то уравненія

$$ax^4+bx^3+dx+e=0 \quad \text{и} \quad ex^4+dx^3+bx+a=0$$

дадутъ

$$\frac{a}{e}=\frac{b}{d}=\frac{d}{b}=\frac{e}{a};$$

отсюда:

$$a=+e \quad \text{и} \quad b=+d, \quad \text{или} \quad a=-e \quad \text{и} \quad b=-d;$$

ур—ніе будетъ въ первомъ случаѣ

$$ax^4+bx^3+bx+a=0,$$

во второмъ

$$ax^4+bx^3-bx-a=0.$$

Легко видѣть непосредственно, что ур—нія эти возвратныя. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ первое на x^2 и положивъ $x+\frac{1}{x}=z$, найдемъ два ур—нія

$$x^2-\frac{\sqrt{b^2+8a^2}-b}{2a}x+1=0 \quad \text{и} \quad x^2+\frac{\sqrt{b^2+8a^2}+b}{2a}x+1=0:$$

въ каждомъ произведеніе корней равно 1, слѣдоват. въ каждомъ одинъ корень обратенъ другому.

Написавъ второе въ видѣ

$$(x^2-1)(ax^2+bx+a)=0,$$

замѣчаемъ, что каждый изъ корней +1 и —1 равенъ своему обратному: въ уравнении $ax^2+bx+a=0$ произведеніе корней равно 1, слѣд., корни его также обратны одинъ другому.

Примѣчаніе II. Такимъ же образомъ найдемъ, что ур. третьей степени возвратное перваго рода есть

$$ax^3+bx^2\pm bx\pm a=0 \;.\;.\;.\;(1)$$

причемъ верхній знакъ берется съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

524. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, раздѣлимъ обѣ части на x^2 (на это имѣемъ право, ибо ур—ніе не имѣетъ корня, равнаго нулю, слѣд. x^2 не обращается въ нуль); найдемъ, сгруппировавъ члены, равно удаленные отъ концовъ:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Положивъ $x+\frac{1}{x}=y$, имѣемъ отсюда: $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$; подставляя, найдемъ

$$ay^2+by+(c-2a)=0 \;.\;.\;.\;(2)$$

Отсюда найдемъ два значенія для y: y' и y''. Подставляя поочередно эти значенія въ ур—ніе $x+\frac{1}{x}=y$, которое можно написать въ видѣ

$$x^2-yx+1=0 \;.\;.\;.\;(3)$$

найдемъ всѣ четыре значенія x. Такимъ образомъ рѣшеніе ур—нія (1) сводится къ рѣшенію системы (2) и (3).

525. Изслѣдованіе. Чтобы величины x, выводимыя изъ (3), были дѣйствительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы коэффиціенты этого ур—нія были дѣйствительны, т.-е. чтобы y было дѣйствительно; затѣмъ необходимо, чтобы разсматриваемое значеніе y удовлетворяло условію

$$y^2-4\geqslant 0,$$

т.-е. чтобы y находился внѣ интервала отъ -2 до $+2$, иначе, чтобы абсолютная величина y была больше 2. Очевидно, что этихъ условій достаточно.

526. Примѣры. I. *Рѣшить ур—ніе* $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$.

Напишемъ его въ видѣ

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0.$$

Положивъ $x+\frac{1}{x}=y$, найдемъ ур—ніе $2y^2+y-15=0$, откуда

$$y=\frac{5}{2},\quad y=-3.$$

Внося эти величины въ ур—я $x+\frac{1}{x}=y$, имѣемъ ур—нія:

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0,\quad x^2+3x+1=0;$$

откуда:

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad x_4=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Легко удостовѣриться, что $x_3\,.\,x_4=1$.

II. *Изслѣдовать корни уравненія* $x^4+2\lambda x^3+(\lambda+1)x^2+2\lambda x+1=0$ *при измѣненіи* λ *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Вышеуказаннымъ пріемомъ приводимъ рѣшеніе этого ур—нія къ рѣшенію системы

$$x^2-yx+1=0\;.\;.\;.\;(1),\qquad y^2+2\lambda y+(\lambda-1)=0\;.\;.\;.\;(2).$$

Чтобы корни (1) были дѣйствительны, необходимо, во-первыхъ, чтобы y было дѣйствительно, и затѣмъ, чтобы

$$y^2-4\geqslant 0.$$

Каждое значеніе y, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, дастъ дѣйствительныя значенія для x.

Ур. (2) дастъ слѣдующее условіе дѣйствительности y:

$$\lambda^2-\lambda+1\geqslant 0,$$

условіе, всегда существующее, ибо ур. $\lambda^2-\lambda+1=0$ имѣетъ корни мнимые.

Второе условіе: $y^2 - 4 > 0$ означаетъ, что y не должно содержаться между -2 и $+2$, т.-е. должно быть или < -2, или $> +2$. Подстановка (-2) вм. y въ первую часть ур—нія (2) дастъ

$$3(-\lambda+1);$$

подстановка $(+2)$ дастъ

$$5\left(\lambda+\frac{3}{5}\right);$$

разсмотримъ скалу значеній λ, содержащую значенія, обращающія эти биномы въ нуль:

$$-\underbrace{\infty\;.\;.\;.\;.\;-}_{1}\frac{3}{5}\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;}_{2}+1\underbrace{\;.\;.\;.\;.\;.+}_{3}\infty$$

Если λ давать величины въ интервалѣ (1), то результатъ подстановки (-2) оказывается > 0; слѣд. -2 находится внѣ корней ур. (2); но полусумма корней, равная $-\lambda$, положительна; слѣд. оба корня больше (-2). Результатъ подстановки $(+2)$ отрицателенъ, сл. $+2$ содержится между корнями ур—нія (2). Итакъ, для значеній λ, лежащихъ въ (1) области, расположеніе корней y' и y' (полагая $y < y''$) и чиселъ -2 и $+2$ таково:

$$.\;.\;.\;-2\;.\;.\;.\;y'\;.\;.\;.\;+2\;.\;.\;.\;y'\;.\;.\;.$$

Итакъ: одинъ корень (y'') дастъ два дѣйствительныя значенія для x; другой (y')—два мнимыя значенія.

Для λ, содержащихся во (2) области, результаты подстановокъ (-2) и $(+2)$ положительны, сл. (-2) и $(+2)$ лежатъ внѣ корней: притомъ полусумма корней, равная $-\lambda$, больше -2, но меньше $+2$; сл. расположеніе корней и чиселъ -2 и $+2$ таково:

$$.\;.\;.\;-2\;.\;.\;.\;y'\;.\;.\;.\;y''\;.\;.\;.\;+2;$$

заключаемъ, что 4 значенія x мнимы.

Для λ, содержащихся въ (3) области, результатъ подстановки (-2) отрицателенъ; слѣд. (-2) содержится между корнями ур. (2); результатъ подстановки $(+2)$ положителенъ; слѣд. $+2$, находясь внѣ корней, больше y''. Такимъ образомъ, одинъ корень (y) дастъ два дѣйств. значенія x, другой (y'')— два мнимыхъ значенія x.

527. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы уравненіе было возвратнымъ второго рода.*

Пусть дано ур—ніе четвертой степени

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\;.\;.\;.\;(1)$$

Составимъ ур—ніе, корни котораго были бы обратны корнямъ (1) и имѣли противоположные имъ знаки; достаточно вм. x подставить $y = -\frac{1}{x}$; сдѣлавъ подстановку и приведя къ цѣлому виду, получимъ ур—ніе.

$$ex^4-dx^3+cx^2-bx+a=0\;.\;.\;.\;(2)$$

Если (1) есть возвратное 2-го рода, то (2) будетъ имѣть тѣ же корни. Въ самомъ дѣлѣ, пусть корни (1) суть α, $-\frac{1}{\alpha}$, β, $-\frac{1}{\beta}$, то корни (2)-го будутъ

$$-\frac{1}{\alpha},\ \alpha,\ -\frac{1}{\beta},\ \beta;$$

слѣд. обѣ ур—нія имѣютъ одинаковые корни, а потому

$$\frac{a}{e}=-\frac{b}{d}=1=-\frac{d}{b}=\frac{e}{a},$$

откуда

$$a=e,\ b=-d.$$

Итакъ общая форма возвратнаго ур—нія четвертой степени втораго рода такова

$$ax^4\pm bx^3+cx^2\mp bx+a=0.$$

Примѣчаніе I. Если бы средній членъ равнялся нулю, то ур. было бы возвратнымъ втораго рода въ двухъ слѣдующихъ случаяхъ:

$$ax^4\pm bx^3\pm bx-a=0,$$

причемъ верхній знакъ надо брать съ верхнимъ, нижній съ нижнимъ.

Когда ур—ніе имѣетъ видъ $ax^4+bx^3+bx-a=0$, его можно написать такъ

$$a(x^4-1)+bx(x^2+1)=0$$

или

$$(x^2+1)[a(x^2-1)+bx]=0,$$

откуда видно, что оно имѣетъ два мнимыхъ корня: $+i$ и $-i$.

Примѣчаніе II. По предыдущему легко убѣдиться, что уравненіе нечетной степени съ дѣйствительными коэффиціентами не м. б. возвратнымъ втораго рода.

528 Чтобы рѣшить уравненіе $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$, раздѣлимъ обѣ части на x^2 и напишемъ его въ видѣ:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0,\ .\ .\ .\ (1);$$

положимъ $x-\frac{1}{x}=y$, имѣемъ: $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$; подстановка въ (1) дастъ

$$ay^2+by+(c+2a)=0\ .\ .\ .\ (2)$$

Отсюда найдемъ два значенія y. Подставляя каждое въ ур. $x-\frac{1}{x}=y$, которое можно представить въ видѣ

$$x^2-yx-1=0\ .\ .\ .\ (3),$$

найдемъ четыре корня предложеннаго ур—нія.

Изслѣдованіе. Если корни ур—нія (2) будутъ дѣйствительны, то и всѣ четыре корня даннаго будутъ дѣйствительны, потому что корни (3) будутъ дѣйствительны. Итакъ, условіе дѣйствительности всѣхъ четырехъ корней даннаго ур. выражается неравенствомъ

$$b^2 - 4a(c+2a) \geqq 0.$$

Примѣръ. — *Рѣшить ур—ніе* $x^4 - 2\lambda x^3 - 3(\lambda+1)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$.

Это есть возвратное ур—ніе 2-го рода. Раздѣливъ его на x^2 и положивъ $x - \frac{1}{x} = y$, или, что то же,

$$x^2 - yx - 1 = 0,$$

рѣшаемъ ур—ніе

$$y^2 - 2\lambda y - (3\lambda + 1) = 0.$$

Условіе дѣйствительности всѣхъ корней предложеннаго будетъ

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 \geqq 0,$$

откуда заключаемъ, что λ не должно содержаться между

$$-\frac{\sqrt{5}+3}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Двучленныя уравненія.

529. *Двучленнымъ уравненіемъ* называется ур—ніе вида

$$ax^m + b = 0.$$

Раздѣливъ обѣ части на a и положивъ $-\frac{b}{a} = A$, можемъ представить это ур—ніе въ видѣ

$$x^m - A = 0, \text{ или } x^m = A.$$

Рѣшить это ур—ніе значитъ найти такое количество x, m-ая степень котораго равнялась бы A; иначе говоря, значитъ: ***найти всѣ значенія корня m-го порядка изъ A.***

530. Теорема. *Рѣшеніе ур—нія $x^m - A = 0$ приводится къ рѣшенію ур—нія $y^m \mp 1 = 0$.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α будетъ ариѳметическій корень m-го порядка изъ A, если $A > 0$, и изъ $(-A)$, если $A < 0$. Ур—ніе $x^m = A$ приметъ одинъ изъ видовъ: $x^m = \alpha^m$, $x^m = -\alpha^m$. Положивъ $x = \alpha y$ и подставивъ это выраженіе въ каждое изъ послѣднихъ ур—ній, по сокращеніи на α^m, найдемъ

$$y^m = 1, \text{ или } y^m = -1.$$

Такимъ образомъ, чтобы рѣшить ур—ніе $x^m - A = 0$, нужно: 1) найти абсолютное значеніе $\sqrt[m]{A}$, равное a; 2) найти всѣ корни $y', y'', y''', \dots$ ур—нія $y^m - 1 = 0$; 3) каждый изъ нихъ помножить на a.

531. Переходимъ къ рѣшенію ур—нія $y^m \pm 1 = 0$: элементарная алгебра даетъ средства рѣшать это ур—ніе лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

I. $m = 2$; **ур—нія суть:** $y^2 - 1 = 0$; $y^2 + 1 = 0$.

Рѣшеніе ихъ извѣстно; корни перваго суть: $y' = +1$, $y'' = -1$; корни **второго:** $y' = +i$, $y'' = -i$.

II. $m = 3$; **ур—нія:** $y^3 - 1 = 0$; $y^3 + 1 = 0$.

Первое ур—ніе можно представить въ видѣ: $(y-1)(y^2+y+1) = 0$ оно распадается на два: $y - 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$.

Первое имѣетъ корень $+1$; второе — два корня $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,.\,i}{2}$; **такъ что три корня даннаго ур—нія суть:**

$$y' = +1;\quad y'' = \frac{-1+\sqrt{3}\,.\,i}{2};\quad y''' = \frac{-1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Это значитъ, что *кубичный корень изъ $+1$ имѣетъ три значенія: одно* ***дѣйствительное и два мнимыхъ.***

Легко видѣть, что ***каждый изъ мнимыхъ корней изъ*** $+1$ *равенъ квадрату другого*. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ эти корни черезъ α и β, и замѣчая, что они удовлетворяютъ уравненію $y^2 + y + 1 = 0$, находимъ: $\alpha\beta = 1$; но $\alpha^3 = 1$, слѣд. $\alpha\beta = \alpha^3$, или $\beta = \alpha^2$. Слѣд., если α есть одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1, то три корня будутъ: α, α^2, α^3.

Можно и прямымъ возвышеніемъ въ квадратъ убѣдиться, что $y'' = y'''^2$ и $y''' = y''^2$.

Примѣръ.—*Рѣшить ур—ніе* $x^3 - 343 = 0$.

По доказанному, надо ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{343}$, т.-е. 7, помножить на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ $+1$. Найдемъ:

$$x' = +7;\quad x'' = 7 \times \frac{-1+\sqrt{3}\,.\,i}{2};\quad x''' = 7\,.\,\frac{-1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Переходимъ къ рѣшенію ур—нія $y^3 + 1 = 0$. Его можно представить въ видѣ $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$, а это уравненіе распадается на два: $y + 1 = 0$ и $y^2 - y + 1 = 0$.

Первое имѣетъ корень $= -1$; второе — два корня: $\frac{1 \pm i\,.\,\sqrt{3}}{2}$; **такъ что три корня даннаго суть:**

$$y' = -1;\quad y'' = \frac{1+\sqrt{3}\,.\,i}{2};\quad y''' = \frac{1-\sqrt{3}\,.\,i}{2}.$$

Эти корни и представляютъ три значенія кубичнаго корня изъ -1.

Примѣръ.—*Рѣшить ур—ніе* $x^3 + 8 = 0$.

Корни его найдемъ, помноживъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{8}$ или 2 на каждый изъ кубичныхъ корней изъ -1; слѣд.

$$x' = -2;\quad x'' = 1 + \sqrt{3}\,.\,i;\quad x''' = 1 - \sqrt{3}\,.\,i.$$

III. $m = 4$; **уравненія:** $y^4 - 1 = 0$; $y^4 + 1 = 0$.

Уравненіе $y^4 - 1 = 0$ можно представить въ видѣ $(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$; оно распадается на два ур—нія: $y^2 - 1 = 0$ и $y^2 + 1 = 0$. Первое имѣетъ корни: $+1$ и -1, второе: $+i$ и $-i$; такъ что ур—ніе $y^4 - 1 = 0$ имѣетъ четыре корня:

$$y_1 = +1,\quad y_2 = -1,\quad y_3 = +i,\quad y_4 = -i.$$

Чтобы рѣшить ур—ніе $y^4 + 1 = 0$, дополнимъ первую часть его до полнаго квадрата, прибавивъ къ ней и вычтя $2y^2$; найдемъ:

$$y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = 0,\quad \text{или}\quad (y^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,.\,y)^2 = 0,\quad \text{или}$$
$$(y^2 + \sqrt{2}\,.\,y + 1)(y^2 - \sqrt{2}\,.\,y + 1) = 0.$$

Это ур—ніе распадается на два квадратныхъ: $y^2 + \sqrt{2}\,.\,y + 1 = 0$ и $y^2 - \sqrt{2}\,.\,y + 1 = 0$. Рѣшивъ ихъ, найдемъ 4 корня:

$$\left.\begin{matrix}y_1\\ y_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i),\quad \left.\begin{matrix}y_3\\ y_4\end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).$$

Уравненіе $y^4 + 1 = 0$ можно рѣшить иначе, разсматривая его какъ возвратное, въ которомъ коэффиціенты трехъ среднихъ членовъ равны нулю. Раздѣливъ его на y^2, имѣемъ $y^2 + \frac{1}{y^2} = 0$; положивъ $y + \frac{1}{y} = z$, имѣемъ отсюда: $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$; слѣд. $z^2 - 2 = 0$, откуда $z' = +\sqrt{2}$ и $z'' = -\sqrt{2}$. Подставляя поочередно оба значенія z въ ур—ніе $y + \frac{1}{y} = z$, получаемъ два ур—нія $y^2 - \sqrt{2}\,.\,y + 1 = 0$ и $y^2 + \sqrt{2}\,.\,y + 1 = 0$, которыя рѣшены выше.

Примѣръ I.—Уравненіе $x^4 - 81 = 0$ имѣетъ 4 корня, которые найдемъ, умноживъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[4]{81}$, т.-е. 3, на четыре значенія корня четвертаго порядка изъ $+1$; именно

$$x_1 = +3,\quad x_2 = -3,\quad x_3 = +3i,\quad x_4 = -3i.$$

Примѣръ II.—Ур—ніе $x^4 + 16 = 0$ имѣетъ четыре мнимыхъ корня, которые найдемъ, умноживъ четыре значенія корня 4-го порядка изъ -1 на ариѳм. значеніе $\sqrt[4]{16}$, т.-е. на 2. Получимъ:

$$x_1 = \sqrt{2}(1 + i),\quad x_2 = \sqrt{2}(1 - i),\quad x_3 = \sqrt{2}(-1 + i),\quad x_4 = \sqrt{2}(-1 - i).$$

IV. $m=5$; ур—нія: $x^5-1=0$ и $x^5+1=0$

Первое ур. можно представить въ видѣ: $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$; оно распадается на два ур—нія

$$x-1=0\ .\ .\ .\ (1) \quad и \quad x^4+x^3+x^2+x+1=0\ .\ .\ .\ (2)$$

изъ которыхъ первое даетъ $x_1=+1$. Второе же есть *возвратное ур. перваго рода*, ибо коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ, равны; слѣд. рѣшеніе его приводится къ рѣшенію системы двухъ уравненій:

$$x^2-yx+1=0 \quad и \quad y^2+y-1=0.$$

Корни ур—нія въ y дѣйствительные, неравные и противоположны по знаку; необходимо и достаточно, чтобы эти корни не заключались между -2 и $+2$, чтобы корни ур—нія (2) были дѣйствительны. Но $2^2+2-1>0$, слѣд. положительный корень содержится между 0 и $+2$. Точно такъ же $(-2)^2+(-2)-1>0$, слѣд. отрицательный корень содержится между 0 и (-2). Слѣд. всѣ четыре корня ур—нія (2) мнимы. Для нахожденія ихъ рѣшаемъ сначала ур. въ y; оно даетъ

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Рѣшая ур. въ x, имѣемъ

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2};$$

подставляя сюда вмѣсто y сперва $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, затѣмъ $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, получимъ еще четыре корня, такъ что всѣ пять корней ур-нія $x^5-1=0$ суть:

$$x_1=1;$$

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,i}{4};\quad x_3=\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,i}{4};$$

$$x_4=\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,i}{4};\quad x_5=\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.\,i}{4}.$$

Чтобы рѣшить ур. $x^5+1=0$, разлагаемъ первую часть на множители и получаемъ уравненіе $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$, распадающееся на два ур—нія: $x+1=0$ и $x^4-x^3+x^2-x+1=0$, рѣшеніе которыхъ аналогично вышеуказанному. Впрочемъ, легко показать, что корни ур—нія $x^5+1=0$ отличаются отъ корней ур—нія $x^5-1=0$ только знаками; въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ данномъ ур—ніи $x=-x'$, получимъ ур—ніе $x'^5-1=0$, тождественное съ рѣшеннымъ. слѣд. для x' имѣемъ 5 вышенаписанныхъ формулъ; а какъ $x=-x'$, то перемѣнивъ въ этихъ формулахъ знаки, прямо имѣемъ пять корней ур—нія $x^5+1=0$. Это замѣчаніе относится ко всѣмъ двучленнымъ ур—ніямъ $x^m-1=0$ и $x^m+1=0$, въ которыхъ m нечетно.

V. $m=6$; ур—нія: $x^6-1=0$ и $x^6+1=0$.

Первое ур. можно представить въ видѣ $(x^3-1)(x^3+1)=0$; сл. оно разлагается на два кубичныхъ ур—нія: $x^3-1=0$ и $x^3+1=0$, рѣшенія которыхъ уже извѣстны, такъ что $x^6-1=0$ имѣетъ шесть корней:

$$x_1=1;\ x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};\ x_4=-1;\ x_5=\frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

$$x_6=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненіе $x^6+1=0$ можно представить въ видѣ $(x^2)^3+1=0$, т.-е. $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=0$; оно распадается на два: квадратное ур. $x^2+1=0$ и биквадратное $x^4-x^2+1=0$, рѣшеніе которыхъ извѣстно.

VI. $m=7$. Уравненія $x^7\pm1=0$ неразрѣшимы средствами элементарной алгебры.

VII. $m=8$; ур—нія $x^8-1=0$ и $x^8+1=0$.

Первое можно написать въ видѣ $(x^4-1)(x^4+1)=0$; оно распадается на два: $x^4-1=0$ и $x^4+1=0$, корни которыхъ уже найдены въ пунктѣ III.

Ур—ніе $x^8+1=0$ можно написать въ видѣ $(x^4+1)^2-2x^4=0$ или $(x^4+\sqrt{2}\,x^2+1)(x^4-\sqrt{2}\,x^2+1)=0$; оно распадается на два биквадратныхъ ур—нія: $x^4+\sqrt{2}\,x^2+1=0$ и $x^4-\sqrt{2}\,.\,x^2+1=0$, рѣшеніе которыхъ извѣстно.

Подобнымъ образомъ могли бы рѣшить элементарно еще нѣкоторыя двучленныя ур—нія.

На частныхъ примѣрахъ мы видѣли, что число значеній корня, или рѣшеній двучленнаго ур—нія всегда оказывается равно показателю корня или степени ур—нія. Общее доказательство этой истины дано въ главѣ XXIX, § 429.

Трехчленныя уравненія.

532. *Всякое трехчленное уравненіе*

$$ax^p+bx^q+cx^r=0$$

можетъ быть рѣшено посредствомъ уравненія второй степени и уравненій двучленныхъ въ случаѣ, если показатели p, q, r связаны соотношеніемъ $p-q=q-r$, т.-е. образуютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію.

Въ самомъ дѣлѣ, если $q-r=m$, то $q=m+r$, $p=q+m=2m+r$, и уравненіе будетъ $ax^{2m+r}+bx^{m+r}+cx^r=0$, или, по вынесеніи x^r:

$$x^r[ax^{2m}+bx^m+c]=0.$$

Отсюда видно, что оно имѣетъ, во-первыхъ, r корней, равныхъ нулю, а затѣмъ удовлетворяется всѣми корнями уравненія

$$ax^{2m}+bx^m+c=0.$$

Рѣшеніе послѣдняго приводится къ рѣшенію *квадратнаго* уравненія и столькихъ *двучленныхъ*, сколько корней имѣетъ квадратное.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $x^m = y$, и слѣд. $x^{2m} = y^2$, получаемъ ур—ніе

$$ay^2 + by + c = 0,$$

имѣющее два корня: $y = y'$ и $y = y''$; подставляя эти значенія y въ ур—ніе $x^m = y$, получаемъ два двучленныхъ ур—нія

$$x^m = y' \quad \text{и} \quad x^m = y'',$$

изъ коихъ каждое имѣетъ m корней, такъ что предложенное ур—ніе имѣетъ $2m$ корней.

Очевидно, биквадратное ур. есть частный случай трехчленнаго.

Примѣръ. *Рѣшить ур—ніе* $1000x^6 - 6119x^3 + 9261 = 0$.

Положивъ $x^3 = y$, имѣемъ ур. $1000y^2 - 6119y + 9261 = 0$, откуда

$$y = \frac{6119 \pm \sqrt{37442161 - 37044000}}{2000} = \frac{6119 \pm 631}{2000};$$

слѣд.

$$y' = \frac{6750}{2000} = \frac{27}{8}; \quad y'' = \frac{5488}{2000} = \frac{343}{125}.$$

Вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ двучленныхъ ур—ній

$$x^3 = \frac{27}{8} \quad \text{и} \quad x^3 = \frac{343}{125},$$

изъ которыхъ находимъ шесть корней предложеннаго:

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2} \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{7}{5} \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Уравненія вида P . Q . R = 0 и нѣкоторыя другія.

533. Какова бы ни была степень уравненія, вторая часть котораго равна нулю, но если окажется возможнымъ разложить первую часть его на множители первой или второй степени, или вида $ax^4 + bx^2 + c$, или $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, то ур—ніе возможно рѣшить средствами элементарной алгебры. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы произведеніе множителей было нулемъ, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ было нулемъ; слѣд. рѣшеніе уравненія PQR = 0 приводится къ рѣшенію отдѣльно ур—ній P = 0, Q = 0, R = 0, которыя, по предположенію, разрѣшимы элементарными средствами.

Приводимъ примѣры.

1. *Рѣшить ур—ніе* $ax^3 + bx^2 + cx = 0$.

Написавъ его въ видѣ $x(ax^2 + bx + c) = 0$, заключаемъ, что его корни суть корни ур—ній: $x = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$; т.-е.

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x''' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

II. *Рѣшить ур—ніе* $7x^3 - 5x^2 - 4x + 2 = 0$.

Непосредственно видно, что ур. удовлетворяется при $x = 1$; слѣд. первая часть его, обращаясь при $x = 1$ въ нуль, дѣлится на $x - 1$; выполнивъ дѣленіе, дадимъ ур—нію видъ $(x - 1)(7x^2 + 2x - 2) = 0$, откуда видно, что оно распадается на два ур—нія: $x - 1 = 0$ и $7x^2 + 2x - 2 = 0$.

Рѣшая ихъ, получаемъ:

$$x = 1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{7}.$$

III. *Рѣшить ур—ніе:* $(3x^4 - 7x^2 + 4)^2 - (2x^4 - 5x^2 + 2)^2 = 0$.

Разложивъ на множители, получимъ

$$(5x^4 - 12x^2 + 6)(x^4 - 2x^2 + 2) = 0,$$

ур—ніе, распадающееся на два биквадратныхъ, изъ которыхъ найдемъ

$$x = \pm\sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{6}}{5}} \quad \text{и} \quad x = \pm\sqrt{1 \pm i}.$$

534. Уравненія $aQ^2 + bQ + c = 0$ и $aQ^4 + bQ^2 + c = 0$, гдѣ Q есть квадратный или биквадратный по буквѣ x полиномъ, заключаютъ въ себѣ четыре типа ур—ній:

$$a(rx^2 + sx + t)^2 + b(rx^2 + sx + t) + c = 0;$$
$$a(rx^4 + sx^2 + t)^2 + b(rx^4 + sx^2 + t) + c = 0,$$
$$a(rx^2 + sx + t)^4 + b(rx^2 + sx + t)^2 + c = 0;$$
$$a(rx^4 + sx^2 + t)^4 + b(rx^4 + sx^2 + t)^2 + c = 0$$

Чтобы рѣшить такого рода ур—нія, полагаемъ, смотря по случаю:

$$\text{или} \quad rx^2 + sx + t = Q, \quad \text{или} \quad rx^4 + sx^2 + t = Q, \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

рѣшая ур—нія въ Q, найдемъ для Q два или четыре значенія; внося каждое изъ значеній Q въ вспомогательныя ур—нія (α), найдемъ соотвѣтствующія значенія x.

535. Слѣдующіе четыре типа уравненій:

$$aP^2 + bPP' + cP'^2 = 0; \quad aQ^2 + bQQ' + cQ'^2 = 0;$$
$$aP^4 + bP^2P'^2 + cP'^4 = 0 \quad \text{и} \quad aQ^4 + bQ^2Q'^2 + cQ'^4 = 0,$$

въ которыхъ P и P′ суть триномы вида $rx^2 + sx + t$, а Q и Q′ — вида $rx^4 + sx^2 + t$, рѣшаются помощью двухъ квадратныхъ, либо двухъ биквадратныхъ ур—ній.

Для рѣшенія ихъ полагаемъ, смотря по случаю:

$$\frac{P}{P'} = R \quad \text{или} \quad \frac{Q}{Q'} = R;$$

приходится затѣмъ рѣшать квадратное, либо биквадратное ур. въ R, которое дастъ для R два, либо четыре значенія; внося значенія R во вспомогательное ур., найдемъ соотвѣтствующія значенія x.

536. Примѣры.— I. *Рѣшить ур.* $(x-a)(x-3a)(x-8a)(x+4a) = b^4 - 35a^2b^2$.

Послѣдовательныя преобразованія даютъ:

$$(x^2-4ax+3a^2)(x^2-4ax-32a^2) = b^4-35a^2b^2,$$

$$(x^2-4ax)^2 - 29a^2(x^2-4ax) - (96a^4+b^4-35a^2b^2) = 0.$$

Принявъ x^2-4ax за вспомогательное извѣстное, находимъ

$$x^2-4ax = \frac{29a^2 \pm (35a^2-2b^2)}{2};$$

рѣшая каждое изъ этихъ квадратныхъ ур—ній, найдемъ всѣ 4 корня предложеннаго.

II. *Рѣшить ур.* $(x^2-x+1)^4 - 10x^2(x^2-x+1)^2 + 9x^4 = 0$.

Раздѣливъ обѣ части на x^4 (что, замѣтимъ, не поведетъ за собою уничтоженія нѣкоторыхъ корней, ибо при $x=0$ ур. не удовлетворяется), дадимъ ур—нію видъ

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4 - 10\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 + 9 = 0,$$

откуда

$$\frac{x^2-x+1}{x} = \pm\sqrt{5\pm4}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ 4 ур—нія

$$\frac{x^2-x+1}{x} = \pm 1 \text{ и } \frac{x^2-x+1}{x} = \pm 3,$$

изъ которыхъ находимъ:

$$x=1,\ x=\pm i,\ x=2\pm\sqrt{3},\ x=-1.$$

III. *Рѣшить ур.* $\dfrac{(x^2+ax+1)^2}{(x^2+bx+1)(x^2+cx+1)} = d$, гдѣ $d = \dfrac{(a-b)(a-c)}{bc}$.

Послѣдовательныя преобразованія даютъ:

$$d\{x^2+ax+1-(a-b)x\}\{x^2+ax+1-(a-c)x\} - (x^2+ax+1)^2 = 0,$$

$$(d-1)(x^2+ax+1)^2 - d(2a-b-c)(x^2+ax+1)x + d(a-b)(a-c)x^2 = 0$$

откуда, раздѣливъ на x^2 и принявъ за неизвѣстное $\dfrac{x^2+ax+1}{x}$, имѣемъ:

$$\frac{x^2+ax+1}{x} = \frac{d(2a-b-c) \pm \sqrt{d^2(2a-b-c)^2 - 4d(d-1)(a-b)(a-c)}}{2(d-1)},$$

$$\frac{x^2+ax+1}{x} = \frac{d(2a-b-c) \pm \sqrt{d^2(b-c)^2 + 4d(a-b)(a-c)}}{2(d-1)}.$$

Но, по условію, $d = \dfrac{(a-b)(a-c)}{bc}$; слѣд.

$$d^2(b-c)^2 + 4d(a-b)(a-c) = d^2(b+c)^2,$$

откуда

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{d\{2a-b-c\pm(b+c)\}}{2(d-1)},$$

т.-е.

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{(a-b)(a-c)\{2a-b-c\pm(b+c)\}}{2a(a-b-c)}.$$

Итакъ, нахожденіе x приводится къ рѣшенію ур—ній

$$\frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{(a-b)(a-c)}{a-b-c};\quad \frac{x^2+ax+1}{x}=\frac{(a-b)(a-c)}{a},$$

что не представляетъ уже затрудненій.

ГЛАВА XXXVI.

Ирраціональныя уравненія.

537. *Ирраціональнымъ ур—емъ* называется такое, въ которомъ неизвѣстныя входятъ подъ знакомъ одного или нѣсколькихъ радикаловъ. Рѣшеніе такихъ ур—ній требуетъ освобожденія неизвѣстныхъ изъ-подъ радикаловъ. Можно доказать, что всякое ур—ніе можетъ быть освобождено отъ радикаловъ, каковы бы ни были ихъ показатели. Доказательство этой теоремы и основывающійся на ней общій методъ рѣшенія ирраціональныхъ ур—ній мы помѣщаемъ въ концѣ этой главы. Предварительно же разсмотримъ другой пріемъ, болѣе элементарный, приложимый лишь въ нѣкоторыхъ случаяхъ, обыкновенно встрѣчающихся въ практикѣ элементарныхъ вычисленій. Онъ состоитъ въ томъ, что изолируютъ радикалъ и затѣмъ возводятъ ур—ніе въ степень, изображаемую показателемъ изолированнаго корня. Такимъ образомъ освобождаютъ ур—ніе отъ ирраціональности того члена, который былъ отдѣленъ. Повторяя эту операцію столько разъ, сколько нужно для уничтоженія всѣхъ радикаловъ, приводятъ такимъ образомъ ур—ніе къ раціональному виду. Но нужно помнить, что этотъ методъ приложимъ лишь въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ. Такъ, этимъ способомъ можно освободить ур—ніе отъ квадратныхъ корней, *какого бы ни было ихъ число*.

Теорема. *Всякое ур—ніе можно освободить отъ радикаловъ второй степени, каково бы ни было ихъ число, возвышеніемъ въ квадратъ обѣихъ частей нѣсколько разъ.*

Докажемъ эту теорему. Пусть будетъ $\sqrt{k}$ тотъ радикалъ, который желаютъ уничтожить. Для того приведемъ ур—ніе къ виду $P+Q\sqrt{k}=0$, гдѣ P и Q количества раціональныя или ирраціональныя, но не содержащія $\sqrt{k}$. Изолируя членъ $Q\sqrt{k}$ во второй части и возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ ур—ніе $P^2=Q^2k$, уже не содержащее радикала $\sqrt{k}$. Такимъ же образомъ можно освободить ур—ніе отъ другого, третьяго,... квадратныхъ корней, сколько бы ихъ ни было.

Освободивъ такимъ образомъ ур—ніе отъ радикаловъ, рѣшаемъ полученное раціональное ур—ніе вышеизложенными пріемами. Но легко доказать, что оно можетъ имѣть посторонния рѣшенія, не удовлетворяющія данному ур—нію.

538. Теорема. *Если обѣ части уравненія возвысить въ одинаковую степень, то получится уравненіе, вообще, не эквивалентное данному: оно необходимо удовлетворяется всѣми корнями даннаго ур—нія, но можетъ имѣть и постороннія рѣшенія.*

Въ самомъ дѣлѣ: I. Пусть дано ур—ніе

$$A = B\ .\ .\ .\ (1).$$

Возвысивъ обѣ его части въ квадратъ, найдемъ ур—ніе

$$A^2 = B^2, \quad \text{или} \quad (A - B)(A + B) = 0\ .\ .\ .\ (2).$$

Всякій корень уравненія (1), дѣлая A равнымъ B, обращаетъ разность $(A - B)$ въ нуль, и слѣд. удовлетворяетъ ур—нію (2).

Но послѣднее ур—ніе удовлетворяется еще тѣми значеніями неизвѣстнаго, при которыхъ $A + B$ обращается въ нуль, т.-е. корнями новаго ур. $A = -B$. Такимъ образомъ не всѣ корни ур—нія (2) необходимо удовлетворяютъ и (1).

Итакъ, рѣшивъ ур—ніе (2), необходимо еще удостовѣриться, удовлетворяютъ ли полученныя рѣшенія ур—нію (1), т.-е. обращаютъ ли эти рѣшенія A и B въ количества одинаковаго знака.

Корни ур—нія $A = -B$ называютъ *посторонними* или *паразитными* рѣшеніями, введенными возвышеніемъ въ квадратъ.

II. Возвышая обѣ части ур—нія $A = B$ въ кубъ, найдемъ: $A^3 = B^3$; но это ур—ніе не эквивалентно данному, ибо содержитъ корни трехъ ур—ній

$$A = B, \quad A = B\alpha, \quad A = B\alpha^2,$$

гдѣ α одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ единицы.

III. Возвысивъ ур—ніе $A = B$ въ четвертую степень, найдемъ ур—ніе $A^4 = B^4$, которое опять общѣе даннаго, ибо удовлетворяется корнями четырехъ уравненій:

$$A = B, \quad A = -B, \quad A = Bi, \quad A = -Bi.$$

IV. Вообще, возвысивъ ур—ніе $A = B$ въ m-ую степень, получимъ ур—ніе:

$$A^m = B^m, \quad \text{или} \quad (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdot \cdot \cdot + B^{m-1}) = 0,$$

которое кромѣ корней даннаго ур—нія удовлетворяется еще корнями ур—нія

$$A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdot \cdot \cdot + B^{m-1} = 0.$$

Можетъ оказаться, что это послѣднее не содержитъ рѣшеній, отличныхъ отъ корней ур—нія $A = B$; но такой случай исключителенъ.

Покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ примѣненіе этого метода, причемъ главнымъ образомъ обратимъ вниманіе на ур—нія, содержащія радикалы второго порядка.

539. Разсмотримъ сначала простѣйшій случай, когда ур—ніе содержитъ только одинъ радикалъ. Такое ур—ніе можно представить въ видѣ

$$R + \sqrt{Q} = 0 \ . \ . \ . (1)$$

если буквою R обозначить совокупность раціональныхъ членовъ, а буквою Q— подрадикальное выраженіе.

Изолируя радикалъ, напишемъ ур—ніе (1) въ формѣ $\sqrt{Q} = -R$, и возвысимъ обѣ части въ квадратъ; найдемъ: $Q = R^2$, или

$$R^2 - Q = 0, \ . \ . \ . (2)$$

что можно написать такъ: $(R + \sqrt{Q})(R - \sqrt{Q}) = 0$.

Ур—ніе (2) раціонально и его корни удовлетворяютъ либо ур—нію (1), либо сопряженному ему ур—нію

$$R - \sqrt{Q} = 0 \ . \ . \ . (1')$$

Взявъ одинъ изъ корней ур—нія (2), подставимъ его въ это ур—ніе; и пусть при этомъ R и Q принимаютъ значенія R' и Q', такъ что получается тождество

$$R'^2 - Q' = 0.$$

Оно доказываетъ, что Q' есть количество положительное, и слѣд. $\sqrt{Q'}$ дѣйствителенъ. Если, теперь, R' положительно, то разсматриваемое рѣшеніе не можетъ удовлетворять ур—нію (1), ибо сумма двухъ положительныхъ чиселъ не можетъ равняться нулю; оно, сл., удовлетворяетъ сопряженному съ (1) ур—нію (1'). Если же R' отрицательно, то наше рѣшеніе не можетъ удовлетворять ур—нію (1'); слѣд., оно удовлетворяетъ (1)-му. Отсюда заключаемъ, что всегда легко отличить тѣ рѣшенія ур—нія (2), которыя удовлетворяютъ данному ур—нію: это будутъ тѣ корни (2), которые, будучи подставлены въ R, обращаютъ R въ количество отрицательное.

Пусть, наприм., R есть полиномъ 1-й степени въ x, а Q—квадратный полиномъ, наприм.

$$R = k(x - \alpha), \qquad Q = ax^2 + bx + c.$$

Ур—ніе (2) будетъ въ этомъ случаѣ квадратное:

$$(ax^2 + bx + c) - k^2(x - \alpha)^2 = 0;$$

рѣшая его, найдемъ два корня x' и x''. Чтобы удостовѣриться, удовлетворяютъ ли они данному ур—нію, нужно поочередно подставить въ функцію R вмѣсто x сначала x', потомъ x'' и смотрѣть, удовлетворяется ли условіе

$$k(x - \alpha) < 0;$$

т.-е.

$$\text{при} \quad k > 0, \quad \text{будетъ ли} \quad x < \alpha,$$

$$\text{а при} \quad k < 0, \quad \text{будетъ ли} \quad x > \alpha.$$

Приводимъ примѣры.

540. Примѣръ I. *Рѣшить уравненіе* $2x + \sqrt{5x - 4} = 12$

Изолируя ирраціональный членъ, имѣемъ:

$$\sqrt{5x-4} = 12 - 2x.$$

Возвысивъ въ квадратъ и приведя въ порядокъ члены, получимъ квадратное ур—ніе

$$4x^2 - 53x + 148 = 0 \;.\;.\;.\; (1),$$

корни котораго необходимо удовлетворяютъ одному изъ уравненій

$$+\sqrt{5x-4} = 12 - 2x \;.\;.\;.\; (2) \qquad -\sqrt{5x-4} = 12 - 2x \;.\;.\;.\; (3),$$

такъ какъ и то и другое, по возвышеніи въ квадратъ, одинаково даетъ ур—ніе (1). Но во (2), которое эквивалентно данному, передъ радикаломъ находится знакъ +, слѣд. и вторая часть его должна быть положительна; въ ур—ніи же (3) передъ радикаломъ находится −, слѣд. и вторая часть его должна быть отрицательна. Слѣд., если въ числѣ дѣйствительныхъ корней ур—нія (1) имѣется корень, удовлетворяющій неравенству $12 - 2x > 0$, или $x < 6$, то онъ будетъ удовлетворять данному ур—нію, а если имѣется корень, удовлетворяющій условію $12 - 2x < 0$, или $x > 6$, то онъ удовлетворяетъ ур—нію (3), сопряженному со (2).

Рѣшивъ ур—ніе (1), находимъ: $x' = 9\frac{1}{4}$; $x'' = 4$

x' нужно отбросить и удержать x''; искомое рѣшеніе: $x = 4$.

Въ данномъ примѣрѣ легко найденные результаты провѣрить прямою подстановкою, хотя *теоретически, это не необходимо.*

Подстановка $x = 4$ въ предложенное ур—ніе даетъ:

$$\sqrt{5 \times 4 - 4} = 12 - 2 \times 4, \quad \text{или} \quad 4 = 4.$$

Подстановка $x = 9\frac{1}{4}$ въ ур—ніе (3) даетъ:

$$-\sqrt{5 \times \frac{37}{4} - 4} = 12 - 2 \times \frac{37}{4}, \quad \text{или} \quad -\frac{13}{2} = -\frac{13}{2}.$$

Другой пріемъ. Можно рѣшить данное уравненіе иначе, введеніемъ *вспомогательнаго неизвѣстнаго.* Преобразуемъ ур—ніе такъ, чтобы имѣть въ немъ раціональный членъ $5x - 4$; для этого множимъ обѣ части на $\frac{5}{2}$, а потомъ вычитаемъ изъ нихъ по 4. Такимъ образомъ, получаемъ эквивалентное данному уравненіе

$$5x - 4 + \frac{5}{2}\sqrt{5x-4} = 26.$$

Положивъ $\sqrt{5x - 4} = y \;.\;.\;.\; (1)$, даемъ этому ур—нію видъ

$$y^2 + \frac{5}{2}y = 26, \quad \text{откуда} \quad y' = -\frac{13}{2}, \quad y'' = 4$$

Но буквою y обозначенъ радикалъ положительный, поэтому отбрасываемъ y' и удерживаемъ $y'' = 4$. Подставляя въ вспомогательное ур—ніе (1) вмѣсто y число 4, получаемъ ур—ніе $\sqrt{5x - 4} = 4$, затѣмъ $5x - 4 = 16$, откуда

$$x = 4.$$

Этотъ способъ позволяетъ безъ труда отличать значенія x, удовлетворяющія ур—нію, отъ паразитныхъ корней.

541. Примѣръ II. *Рѣшить уравненіе* $x - 1 = \sqrt{3x - 5}$.

Возведя обѣ части въ квадратъ и приведя въ порядокъ, получаемъ

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \ . \ . \ . (1).$$

Корни этого уравненія удовлетворяютъ одному изъ двухъ уравненій: данному, либо $x - 1 = -\sqrt{3x - 5}$ . . . (2), данному—если эти корни больше 1, и ур—нію (2)—если они меньше 1. Рѣшивъ ур—ніе (1), находимъ корни:

$$x' = 2, \qquad x'' = 3:$$

оба корня больше 1, слѣд., оба удовлетворяютъ данному, но не удовлетворяютъ ур—нію (2), которое, такимъ образомъ, не имѣетъ рѣшенія.

542. Примѣръ III. *Рѣшить уравненіе* $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$, *въ которомъ a и b—дѣйствительныя и положительныя количества.*

Изолируя радикалъ, имѣемъ

$$\sqrt{a^2 - x^2} = b - x \ . \ . \ . (1).$$

Возвышая обѣ части въ квадратъ, находимъ

$$a^2 - x^2 = (b - x)^2 \ . \ . \ . (2) \quad \text{или} \quad 2x^2 - 2bx + (b^2 - a^2) = 0 \ . \ . \ . (3),$$

изъ котораго

$$x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \ . \ . \ . (4) \quad \text{и} \quad x'' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \ . \ . \ . (5).$$

То же самое ур—ніе (3), а слѣд. и тѣ же самые корни (4) и (5), нашли бы и для уравненія

$$-\sqrt{a^2 - x^2} = b - x \ . \ . \ . (6),$$

отличающагося отъ (1) знакомъ при радикалѣ. Замѣчаемъ, что дѣйствительные корни ур—нія (3), удовлетворяющіе ур—нію (1), отличаются отъ корней, удовлетворяющихъ ур—нію (6), тѣмъ признакомъ, что они должны еще удовлетворять условію

$$x < b.$$

Корни ур—нія (3) будутъ дѣйствительны, если будетъ

$$b^2 - 2(b^2 - a^2) \geqslant 0, \quad \text{или} \quad b^2 - 2a^2 \leqslant 0.$$

Разсматривая $b^2 - 2a^2$ какъ квадратный относительно b триномъ, находимъ, что онъ будетъ отрицателенъ, когда b будетъ заключаться между его корнями $a\sqrt{2}$ и $-a\sqrt{2}$, изъ коихъ первый положителенъ, а второй отрицателенъ, такъ какъ, по условію, $a > 0$. Но какъ и $b > 0$, то заключаемъ, что необходимое и достаточное условіе дѣйствительности корней будетъ

$$b \leqq a\sqrt{2}.$$

Знакъ корней зависитъ отъ ихъ произведенія и суммы. Произведеніе корней, $b^2 - a^2$, будетъ положительно, если $b > a$, и отрицательно, если $b < a$. Сумма корней, будучи $= b$, всегда положительна. Значитъ, при $b > a$ оба корня положительны, а при $b < a$ знаки ихъ противоположны, причемъ большій корень положителенъ.

Что касается величины корней, то, во-первыхъ, дѣйствительность $\sqrt{a^2 - x^2}$ [ур—ніе (1)] требуетъ, чтобы разность $a^2 - x^2$ была > 0. Но дѣйствительные корни ур—нія (3), въ силу того, что они удовлетворяютъ ур—нію (2), необходимо дѣлаютъ разность $a^2 - x^2$ положительною.

Окончательно приходимъ къ такому заключенію: при соблюденіи условія $b < a\sqrt{2}$, оба корня уравненія (3) будутъ дѣйствительны, но данному ур—нію они будутъ удовлетворять только тогда, когда будутъ $< b$.

Нужно, поэтому, изслѣдовать, какимъ образомъ располагается число b относительно корней тринома $2x^2 - 2bx + b^2 - a^2$. Для этого надо знать результатъ подстановки въ этотъ триномъ буквы b вмѣсто x. Этотъ результатъ есть

$$f(b) = b^2 - a^2,$$

гдѣ b и a положительны. Очевидно, что если $b > a$, что не противорѣчитъ условію $b < a\sqrt{2}$, то результатъ этотъ положителенъ, т.-е. одного знака съ первымъ членомъ; если же $b < a$, то $f(b) < 0$, т.-е. знакъ ея противоположенъ первому коэффиціенту. Критическими значеніями b будутъ, слѣдовательно, a и $a\sqrt{2}$.

Легко составить слѣдующую таблицу знаковъ.

Скала значеній b	0		a		$a\sqrt{2}$		∞
Реализантъ		+		+		−	
Произведеніе корней		−		+			
Сумма корней		+		+			
$f(b)$		−		+			
1-й коэффиц.		+		+			

Изъ этой таблицы прямо видно, что если:

1) $b = 0$, то (хотя освобожденное отъ радикала ур—ніе даетъ корни $\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, но) данному ур—нію удовлетворяетъ 1 корень $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$: задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

2) $b < a$. Корни дѣйствительны и противоположны по знаку, причемъ большій корень положителенъ. Такъ какъ $f(b)$ имѣетъ знакъ противоположный 1-му коэффиценту, то b заключается между корнями

$$x' \ldots b \ldots x''$$

слѣд., одинъ корень $< b$, другой $> b$; и какъ задачѣ уд—тъ только первый, то задача имѣетъ *одно рѣшеніе*, выражаемое отрицательнымъ корнемъ

$$x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

3) $b = a$. Корни будутъ

$$x' = 0, \qquad x'' = a.$$

4) $a < b < a\sqrt{2}$. Корни дѣйствительны; произведеніе и сумма ихъ > 0, слѣд. оба корня > 0. Знакъ $f(b)$ одинаковъ съ 1-мъ коэффицентомъ, слѣд. b находится внѣ корней. Чтобы знать положеніе b относительно корней, сравниваемъ b съ полусуммою корней, равною $\frac{b}{2}$; такъ какъ $b > \frac{b}{2}$, то расположеніе чиселъ x', x'' и b таково:

$$0 \ldots x' \ldots x'' \ldots b \ldots$$

т.-е. оба корня $< b$, и потому задача имѣетъ *2 рѣшенія:*

$$x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad x'' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

5) $b = a\sqrt{2}$. Уравненіе имѣетъ равные корни:

$$x' = x'' = \frac{b}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\text{: } \textit{1 рѣшеніе.}$$

6) $b > a\sqrt{2}$. Корни мнимые: задача не имѣетъ дѣйствит. рѣшеній.

Резюме.

$b = 0$ . . . . . $x = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$b < a$ . . . . . 1 рѣш. отриц. $x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$.

$b = a$ . . . . . 2 корня: $x' = 0$, $x'' = a$.

$a < b < a\sqrt{2}$ . . . . . 2 полож. корня: $x' = \frac{b \mp \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$.

$b = a\sqrt{2}$ . . . . . 2 равныхъ корня: $x' = x'' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$b > a\sqrt{2}$ . . . . . Корни мнимые.

Въ разсматриваемомъ случаѣ ($a > 0$, $b > 0$) можно дать нашему ур—нію геометрическую интерпретацію, которая наглядно покажетъ, въ какомъ случаѣ допустимо то или другое рѣшеніе.

Наше уравненіе есть переводъ на языкъ алгебры требованій задачи: *на окружности круга, построеннаго на діаметрѣ* AB $= a$, *найти такую точку* D, *сумма разстояній которой отъ концовъ діаметра равнялась бы данной линіи* b*:*

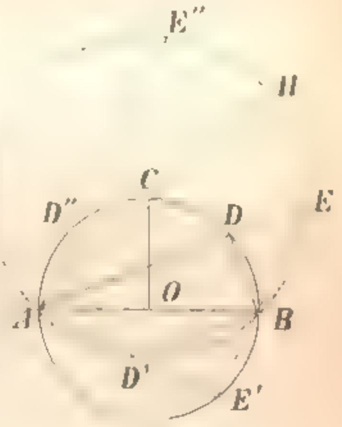
$$AD + DB = b.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если искомая точка есть D, и AD $= x$, то BD $= \sqrt{a^2 - x^2}$, слѣд. ур—ніе задачи будетъ

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b.$$

Корни его и дадутъ искомую линію AD.

Геометрически задача рѣшается такъ. На продолженіи линіи AD возьмемъ отрѣзокъ DE $=$ DB и соединимъ B съ E. Въ равнобедренномъ треугольникѣ BDE уголъ D $= 90°$, слѣд. $<$ AEB $= 45°$. Поэтому конецъ E прямой AE $= b$ находится на дугѣ AHEB, вмѣщающей уголъ 45° и описанной на хордѣ AB $= a$. Центръ C этой дуги есть конецъ радіуса, перпендикулярнаго къ AB.



Черт. 56.

Если дуга, описываемая изъ A радіусомъ $= b$, встрѣчаетъ нижнюю часть искомой окружности въ D', то на данной окружности получаемъ точку E'. Такъ какъ $<$ AD'B $= 135°$, то $<$ BD'E' $= 45° = <$ D'BE', откуда D'E' $=$ E'B, и слѣд. AE' — D'E' $=$ AE' — E'B $= b$, такъ что нижняя дуга даетъ точки, для которыхъ разность разстояній отъ A и B равна b, и не отвѣчаетъ задачѣ въ прямомъ смыслѣ заданія.

Итакъ, для рѣшенія задачи описываемъ на AB сегментъ, вмѣщающій 45°, и изъ A, какъ изъ центра, радіусомъ b описываемъ дугу, которая пусть встрѣчаетъ дугу AHB въ нѣкоторой точкѣ E: соединивъ A съ E, найдемъ на окружности ACB требуемую точку D.

Чтобы задача была возможна, нужно, чтобы дуга, описываемая радіусомъ b изъ точки A, какъ изъ центра, встрѣчала дугу AHB: для этого должно быть $b \leq$ AH или 2AC, или $b \leq a\sqrt{2}$, такъ какъ AC $= \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Когда $b < a$, наше изслѣдованіе показало, что значеніе x, удовлетворяющее ур—нію, отрицательно. Что касается геометрической задачи, приводящей къ тому же ур—нію, то ей могутъ удовлетворять только положительныя значенія x. Заключаемъ, что полученіе отрицательнаго рѣшенія должно указывать на невозможность задачи. И дѣйствительно, на окружности нѣтъ такихъ точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ концовъ діаметра была бы меньше діаметра.

Пусть $b = a$. Существуютъ 2 точки, обладающія тѣмъ свойствомъ, что сумма ихъ разстояній отъ A и B равна a: это точки A и B, что и указывается корнями $x' = 0$, $x'' = a$.

Когда $a < b < a\sqrt{2}$ или $AB < b < AH$, очевидно, дуга, описанная изъ A радіусомъ b, встрѣтитъ дугу AHB въ двухъ точкахъ E и E′, дающихъ двѣ точки D и D″ на дугѣ ACB. Это вполнѣ согласуется съ результатомъ алгебраическаго изслѣдованія, что въ данномъ случаѣ задача имѣетъ 2 положительныхъ корня.

При $b = a\sqrt{2}$ или AH, точка встрѣчи одна, H, и искомая точка на данной окружности одна, C, что согласуется съ результатомъ алгебраическаго изслѣдованія, съ полученіемъ въ этомъ случаѣ двухъ сливающихся корней.

Наконецъ, результатъ алгебраическаго изслѣдованія, что при $b > a\sqrt{2}$ ур—ніе имѣетъ мнимые корни, согласенъ съ геометрическимъ указаніемъ невозможности задачи при этомъ условіи: въ самомъ дѣлѣ, дуга, описанная изъ A радіусомъ, большимъ $a\sqrt{2}$, не встрѣтитъ дуги AHB.

543. Примѣръ IV. Возьмемъ теперь примѣръ нѣсколько сложнѣе.

Пусть дано рѣшить уравненіе

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} = 3b \quad . \;\; . \;\; . \;\; (1).$$

Во-первыхъ, замѣчаемъ, что какъ вторая часть ур—нія дѣйствительна, то и первая должна быть такова же, и для этого должно быть $a^2 - x^2 \geqslant 0$, откуда

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Изолируя радикалъ, получаемъ ур—ніе

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 3b - 2x \quad . \;\; . \;\; . \;\; (2),$$

которое, по возвышеніи въ квадратъ, даетъ ур—ніе

$$a^2 - x^2 = (3b - 2x)^2, \quad \text{или} \quad 5x^2 - 12bx + 9b^2 - a^2 = 0 \quad . \;\; . \;\; . \;\; (3).$$

Но то же самое раціональное ур—ніе (3) мы получили бы и изъ ур—нія

$$2x - \sqrt{a^2 - x^2} = 3b, \quad \text{или} \quad -\sqrt{a^2 - x^2} = 3b - 2x.$$

Слѣд., дѣйствительные корни (3), чтобы удовлетворять (2) или (1), должны еще удовлетворять требованію

$$3b - 2x > 0, \quad \text{или} \quad x < \frac{3}{2}b.$$

Переходимъ теперь къ изслѣдованію корней ур—нія (3), которые выражаются формулою

$$x = \frac{6b \pm \sqrt{5a^2 - 9b^2}}{5}.$$

Эти корни будутъ дѣйствительны, когда будетъ удовлетворено условіе

$$5a^2 - 9b^2 > 0, \quad \text{или} \quad (a\sqrt{5}+3b)(a\sqrt{5}-3b) > 0,$$

а какъ a и $b > 0$, то должно быть $b < \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Когда это условіе удовлетворено, то корни ур—нія (3) будутъ дѣйствительны.

Но когда x дѣйствительно, то вторая часть ур—нія (2) будетъ дѣйствительна, слѣд. и равная ей первая также будетъ дѣйствительна, а потому условіе $-a \leqslant x \leqslant a$ будетъ удовлетворено.

Выражаемъ теперь, что корни (3), чтобы удовлетворять данному ур—нію, должны быть $< \frac{3}{2}b$.

Подставляя въ триномъ (3) вмѣсто $x \dots \frac{3}{2}b$, имѣемъ

$$\frac{9}{4}b^2 - a^2 = \left(\frac{3}{2}b + a\right)\left(\frac{3}{2}b - a\right),$$

результатъ, который мѣняетъ знакъ при $b = \frac{2}{3}a$.

Сумма корней, $\frac{12}{5}b$, всегда > 0; произвед. корней, $\frac{9b^2 - a^2}{5}$, мѣняетъ знакъ при $b = \frac{1}{3}a$.

Такимъ образомъ критическія значенія b суть

$$\frac{1}{3}a, \quad \frac{2}{3}a \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{5}}{3}a,$$

получается слѣдующая таблица знаковъ:

Скала значеній b	0		$\frac{1}{3}a$		$\frac{2}{3}a$		$\frac{\sqrt{5}}{3}a$	∞
Реализантъ		+				+		
Произведеніе корней		−		+		+		
Сумма корней		+		+				
$l\ \frac{3}{2}b$				−		+		
1-й коэффиц.		+		+		+		

Разсмотримъ каждый интервалъ.

1) $b < \frac{2}{3}a$: корни дѣйствительны; $f\left(\frac{3}{2}b\right) < 0$, т. е. знакъ ея противоположенъ знаку коэффиціента при x^2, слѣд. $\frac{3}{2}b$ заключается между корнями:

$$x' < \frac{3}{2}b < x''.$$

Въ этомъ интервалѣ только одинъ корень уд—тъ данному ур.; это — меньшій корень ур—нія (3), который, пока $b < \frac{1}{3}a$ - отрицателенъ; при $b = \frac{1}{3}a$ равенъ 0, а при $b > \frac{1}{3}a$—положителенъ.

2) $b = \frac{2}{3}a$; $f\left(\frac{3}{2}b\right) = 0$, сл. $\frac{3}{2}b$ есть одинъ изъ корней. Который это корень, покажетъ слѣдующій случай.

3) $\frac{2}{3}a < b < \frac{a\sqrt{5}}{3}$: $f\left(\frac{3}{2}b\right) > 0$, сл. $\frac{3}{2}b$ находится внѣ корней.

Полусумма корней $= \frac{6}{5}b$, что меньше $\frac{3}{2}b$: расположеніе корней относительно $\frac{3}{2}b$ таково:

$$x' \;.\;.\;.\; x'' \;.\;.\;.\; \frac{3}{2}b.$$

Заключаемъ, что оба корня меньше $\frac{3}{2}b$: задача имѣетъ 2 рѣшенія.

Отсюда же заключаемъ, что въ предыдущемъ случаѣ $\frac{3}{2}b$ былъ большій корень.

4) $b = \frac{a\sqrt{5}}{3}$: ур—ніе имѣетъ равные корни: $x' = x'' = \frac{6}{5}b$; какъ это значеніе $< \frac{3}{2}b$, то задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

5) $b > \frac{a\sqrt{5}}{3}$: корни мнимые.

Резюме.

$0 < b < \frac{2}{3}a$: 1 корень . . . $x' = \frac{6b - \sqrt{5a^2 - 9b^2}}{5}$.

$b = \frac{2}{3}a$: 2 корня . . . $x' = \frac{9}{10}b$, $x'' = \frac{3}{2}b$.

$\frac{2}{3}a < b < \frac{a\sqrt{5}}{3}$: 2 корня . . . $x = \frac{6b \pm \sqrt{5a^2 - 9b^2}}{5}$.

$b = \frac{a\sqrt{5}}{3}$: 2 равныхъ корня . . . $x' = x'' = \frac{6}{5}b$.

$b > \frac{a\sqrt{5}}{3}$: Корни мнимые.

544. Перейдемъ къ случаю, когда ур—ніе содержитъ два квадратныхъ корня: пусть это ур—ніе будетъ $\sqrt{P}+\sqrt{Q}+R=0$. Изолируя ихъ въ первой части, возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; изолируемъ, затѣмъ, единственный оставшійся радикалъ, снова возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; въ результатѣ получимъ ур—ніе раціональное. Можно поступать еще такъ: изолируя одинъ изъ радикаловъ, возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ; изолируемъ остающійся послѣ этого радикалъ и снова возвышаемъ ур—ніе въ квадратъ: получаемъ раціональное ур—ніе.

Возьмемъ сначала частный примѣръ: рѣшить ур—ніе

$$\sqrt{40+x}=\sqrt{18+2x}+1.$$

Возвысивъ въ квадратъ, находимъ

$$40+x=18+2x+2\sqrt{18+2x}+1$$

или, изолируя радикалъ и сдѣлавъ приведеніе, находимъ:

$$21-x=2\sqrt{18+2x}.$$

Возвысивъ это ур—ніе въ квадратъ, по приведеніи въ порядокъ, найдемъ ур—ніе $x^2-50x+369=0$, откуда $x'=9$, $x''=41$. Эти корни не необходимо удовлетворяютъ данному ур—нію; они могутъ удовлетворять одному изъ уравненій:

$$\sqrt{40+x}=\sqrt{18+2x}+1\ .\ \ .\ \ .\ (1)$$

$$\sqrt{40+x}=-\sqrt{18+2x}+1\ .\ \ .\ \ .\ (2)$$

$$-\sqrt{40+x}=\sqrt{18+2x}+1\ .\ \ .\ \ .\ (3)$$

$$-\sqrt{40+x}=-\sqrt{18+2x}+1\ .\ \ .\ \ .\ (4).$$

Во-первыхъ, устраняемъ ур—ніе (2), ибо, написавъ его въ видѣ

$$\sqrt{40+x}+\sqrt{18+2x}=1,$$

замѣчаемъ, что при положительномъ x (а таковы x' и x'') первая часть всегда больше 1. Затѣмъ, ур—ніе (3) не можетъ быть удовлетворено никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x, ибо первая часть его <0, вторая же >0. Такимъ образомъ, найденные корни могутъ удовлетворять только ур—мъ (1) и (4). По ур—нію (1) разность $\sqrt{40+x}-\sqrt{18+2x}$, какъ равная $+1$, должна быть >0; по ур—нію (4), она должна быть <0. Слѣдовательно, необходимо, чтобы было: $\sqrt{40+x}>\sqrt{18+2x}$ или $40+x>18+2x$, или $x<22$. Слѣдовательно, данному ур—нію удовлетворяетъ корень $x'=9$; $x''=41$ удовлетворяетъ ур—нію (4). Легко подтвердить то и другое прямою подстановкою.

Постараемся теперь формулировать общія для разсматриваемаго случая правила, которыя позволяли бы отличать тѣ изъ корней раціональнаго резольвента, которые принадлежатъ данному ур—нію, отъ корней, ему не удовлетворяющихъ.

Комбинируя всѣми возможными способами двойные знаки передъ радикалами уравненія $\pm\sqrt{P}\pm\sqrt{Q}+R=0$, получимъ ур—нія

$$\sqrt{P}+\sqrt{Q}+R=0\ .\ .\ .\ (1),$$

$$\sqrt{P}-\sqrt{Q}+R=0\ .\ .\ .\ (2),$$

$$-\sqrt{P}+\sqrt{Q}+R=0\ .\ .\ .\ (3),$$

$$-\sqrt{P}-\sqrt{Q}+R=0\ .\ .\ .\ (4).$$

Перемноживъ ихъ почленно, найдемъ

$$(\sqrt{P}+\sqrt{Q}+R)(\sqrt{P}-\sqrt{Q}+R)(-\sqrt{P}+\sqrt{Q}+R)(-\sqrt{P}-\sqrt{Q}+R)=0 \ldots (5)$$

ур—ніе, необходимо раціональное. Въ самомъ дѣлѣ, его можно написать въ формѣ

$$[R^2-(\sqrt{P}+\sqrt{Q})^2][R^2-(\sqrt{P}-\sqrt{Q})^2]=0$$

или

$$(R^2-P-Q-2\sqrt{PQ})(R^2-P-Q+2\sqrt{PQ})=0,$$

или

$$(R^2-P-Q)^2-4PQ=0\ .\ .\ .\ (6),$$

которое также нашли бы и по двукратномъ возвышеніи въ квадратъ способомъ, указаннымъ выше.

Всякій корень ур—нія (6), въ силу (5), будетъ рѣшеніемъ одного изъ уравненій (1), (2), (3) и (4).

Комбинируя различнымъ образомъ множителей ур—нія (5), можно это ур. представить еще въ формахъ

$$[(R+\sqrt{P})^2-Q][(R-\sqrt{P})^2-Q]=0,$$

или

$$(R^2+P-Q)^2-4R^2P=0\ .\ .\ .\ (6').$$

Также

$$(R^2+Q-P)^2-4R^2Q=0\ .\ .\ .\ (6'').$$

Ур—нія (6′) и (6″) показываютъ, что всякій корень резольвента (6) дѣлаетъ полиномы P и Q положительными. Зная это, посмотримъ, какимъ образомъ рѣшенія (6) распредѣляются между ур—ми (1), (2), (3) и (4).

Корни ур—нія (6) принадлежатъ тому или другому изъ ур—ній

$$R^2-P-Q-2\sqrt{PQ}=0\ .\ .\ .\ (7),$$

$$R^2-P-Q+2\sqrt{PQ}=0\ .\ .\ .\ (8).$$

Тѣ, которые принадлежатъ (7), должны удовлетворять неравенству

$$R^2-P-Q>0\ .\ .\ .\ (m),$$

а тѣ, которые принадлежатъ (8), должны удовлетворять соотношенію

$$R^2-P-Q<0\;.\;.\;.\;(n).$$

Но (7) можно написать въ видѣ

$$(R+\sqrt{P}+\sqrt{Q})(R-\sqrt{P}-\sqrt{Q})=0;$$

слѣд. корни (7) удовлетворяютъ либо (1), либо (4): (1)-му, если они дѣлаютъ $R<0$; (4)-му, если они дѣлаютъ $R>0$.

Ур—ніе (8) можно написать въ видѣ

$$[R+(\sqrt{P}-\sqrt{Q})][R-(\sqrt{P}-\sqrt{Q})]=0;$$

его корни удовлетворяютъ либо (2)-му, либо (3)-му, а именно: (2)-му, если они сообщаютъ R и $\sqrt{P}-\sqrt{Q}$ противоположные знаки, т.-е. если они удовлетворяютъ неравенству

$$R(\sqrt{P}-\sqrt{Q})<0;$$

(3)-му, если удовлетворяютъ неравенству

$$R(\sqrt{P}-\sqrt{Q})>0.$$

Эти ирраціональныя соотношенія можно сдѣлать раціональными, помноживъ первыя ихъ части на положительное количество $\sqrt{P}+\sqrt{Q}$, что дастъ

$$R(P-Q)<0\;.\;.\;.\;(p),$$

$$R(P-Q)>0\;.\;.\;.\;(q).$$

Резюмируя сказанное, находимъ, что рѣшеніе резольвента будетъ принадлежать:

уравненію (1), если оно уд--тъ $R^2-P-Q>0$, $R<0$;
» (2), » » » $R^2-P-Q<0$, $R(P-Q)<0$;
» (3), » » » $R^2-P-Q<0$, $R(P-Q)>0$;
» (4), » » » $R^2-P-Q>0$, $R>0$.

545. Примѣръ. *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt{mx+a}+\sqrt{x+b}=c\;.\;.\;.\;(1),$$

въ которомъ $m\geqslant 1$.

По двукратномъ возвышеніи въ квадратъ или по перемноженіи четырехъ ур-ній съ различной комбинаціей знаковъ при радикалахъ, найдемъ резольвентъ

$$(m-1)^2c^2+2[(m-1)(a-b-c^2)-2c^2]x+(a-b-c^2)^2-4bc^2=0\;.\;.\;.\;(2).$$

Данное ур—ніе, написанное въ видѣ $\sqrt{mx+a}+\sqrt{x+b}-c=0$, подходитъ подъ форму (4); слѣд., чтобы тотъ или другой корень резольвента удовлетворялъ ему, необходимо, чтобы было $R^2-P-Q>0$ и $R>0$, или

$$c^2-(mx+a)-(x+b)>0\ .\ .\ .\ (3)\quad \text{и}\quad c>0\ .\ .\ .\ (4).$$

Чтобы корни резольвента были дѣйствительны, необходимо, чтобы было

$$mc^2+(m-1)(mb-a)\geqslant 0.$$

Когда $mb-a>0$, это условіе удовлетворено; если же $mb-a<0$, то должно быть

$$c^2>\frac{(m-1)(a-mb)}{m}.$$

Затѣмъ, неравенство (3) требуетъ, чтобы было

$$x<\frac{c^2-a-b}{m+1}.$$

Итакъ, данное ур—ніе будетъ имѣть столько корней, сколько резольвентъ имѣетъ дѣйствительныхъ корней меньшихъ $\frac{c^2-a-b}{m+1}$. Чтобы знать, какъ корни резольвента расположены относительно этого числа, нужно знать результатъ подстановки этого числа вмѣсто x въ ур—ніи (2). Найдемъ:

$$f\left(\frac{c^2-a-b}{m+1}\right)=-4mc^4+4(m-1)(a-bm)c^2+4(a-bm)^2\ .\ .\ .\ (5).$$

Корни этого квадратнаго въ c^2 тринома суть $a-mb$ и $\frac{mb-a}{m}$. Когда c^2 заключается между этими значеніями, то $f\left(\frac{c^2-a-b}{m+1}\right)$ будетъ >0, т.-е. того же знака, какъ коэффиціентъ при x^2 въ ур—ніи (2). Значитъ, $\frac{c^2-a-b}{m+1}$ будетъ лежать внѣ корней этого ур—нія: слѣдов., чтобы ур—ніе (2) имѣло корень меньшій этой дроби, необходимо, чтобы полусумма его корней была меньше $\frac{c^2-a-b}{m+1}$, что ведетъ къ условію

$$2mc^2+(m-1)(mb-a)<0,$$

которое противорѣчитъ условію дѣйствительности корней ур—нія (2).

Итакъ, необходимо, чтобы c^2 не находилось въ интервалѣ корней тринома (5), а лежало бы внѣ этого интервала. Отсюда необходимость различать 3 случая:

1) Если $a-mb<0$, то $\frac{mb-a}{m}>0$, и какъ c^2 положительно, то если взять $c^2>\frac{mb-a}{m}$, знакъ $f\left(\frac{c^2-a-b}{m+1}\right)$ будетъ отрицателенъ, и слѣдовательно $\frac{c^2-a-b}{m+1}$ будетъ лежать между корнями ур—нія (2), и потому одинъ изъ нихъ будетъ меньше этой дроби: задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

2) Если $a - mb > 0$, то $\frac{mb - a}{m} < 0$. Взявъ $c^2 > a - mb$, опять найдемъ, что задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

3) Если $a - mb = 0$ данное ур—ніе приметъ видъ

$$\sqrt{x+b}\,(1+\sqrt{m}) = c.$$

и всегда имѣетъ одинъ корень,

$$x = -b + \frac{c^2}{(1+\sqrt{m})^2}.$$

Остается разсмотрѣть, будутъ ли значенія обоихъ радикаловъ, $\sqrt{x+b}$ и $\sqrt{mx+a}$, дѣйствительны. Достаточно разсмотрѣть одинъ изъ нихъ, такъ какъ въ силу дѣйствительности c, если одинъ радикалъ дѣйствителенъ, то дѣйствителенъ и другой; если мнимъ одинъ, то мнимъ и другой. Чтобы $\sqrt{x+b}$ былъ дѣйствителенъ, должно быть $x > -b$. Подстановка $-b$ вмѣсто x въ триномъ (2) даетъ

$$f(-b) = (c^2 + bm - a)^2,$$

количество положительное; слѣд., $-b$ находится внѣ интервалла корней этого ур—нія, и потому, чтобы x было $> -b$. полусумма корней

$$\frac{2c^2 - (m-1)(a-b-c^2)}{(m-1)^2} \text{ должна быть } > -b,$$

что даетъ условіе $(m+1)c^2 + (m-1)(bm - a) > 0$, всегда выполненное, разъ условіе дѣйствительности корней резольвента удовлетворено.

546. Пусть уравненіе содержитъ три радикала:

$$\pm\sqrt{P} \pm \sqrt{Q} \pm \sqrt{R} = 0.$$

Если перемножить уравненія

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0 \;.\;.\;.\;(1)$$

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R} = 0 \;.\;.\;.\;(2)$$

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0 \;.\;.\;.\;(3)$$

$$-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0 \;.\;.\;.\;(4),$$

то получимъ резольвентъ въ формѣ

$$P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ - 2PR - 2QR = 0 \;.\;.\;.\;(5),$$

откуда легко заключить, что для всякаго корня этого ур—нія всѣ три количества P, Q и R одновременно положительны, или всѣ отрицательны. Въ самомъ дѣлѣ: не можетъ быть одновременно $P > 0$, $Q > 0$ и $R < 0$; ибо, положивъ $R = -R'$, первая часть ур. (5) была бы

$$P^2 + Q^2 + R'^2 - 2PQ + 2PR' + 2QR' = (P + R' - Q)^2 + 4QR',$$

а это, при нашемъ предположеніи, есть количество положительное.

Также, нельзя имѣть $P > 0$, $Q < 0$, $R < 0$: ибо, положивъ $Q = -Q'$, $R = -R'$, первая часть (5) будетъ

$$P^2 + Q'^2 + R'^2 + 2PQ' + 2PR' - 2Q'R' = (Q' - R)^2 + P^2 + 2PQ' + 2PR',$$

количество существенно-положительное.

Итакъ достаточно провѣрить, дѣлаетъ ли какой-либо корень ур—нія (5) одно изъ количествъ P, Q, R, положительнымъ.

Замѣтивъ, что ур. (1) не можетъ имѣть рѣшеній, ибо сумма положительныхъ количествъ не можетъ быть нулемъ, остается разсмотрѣть, какому изъ множителей (2), (3), (4) принадлежитъ тотъ или другой корень резольвента.

Разсмотримъ, напр., при какихъ условіяхъ нѣкоторый корень ур. (5) обратитъ въ нуль множитель $\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R}$?

Если этотъ корень удовлетворяетъ ур—нію (2), то онъ удовлетворяетъ и ур—нію

$$(\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R})(\sqrt{P} + \sqrt{Q} - \sqrt{R}) = 0 \;.\;.\;.\; (6),$$

первый множитель котораго не обращается въ нуль ни при какомъ дѣйствительномъ значеніи x. И обратно, всякій корень (6) удовлетворяетъ и ур—нію (2).

Но ур. (6) можно написать такъ

$$P + Q - R + 2\sqrt{PQ} = 0 \;.\;.\;.\; (7).$$

Всякій корень ур—нія (2), удовлетворяя (7)-му, долженъ удовлетворять условію

$$P + Q - R < 0 \;.\;.\;.\; (8).$$

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что корень ур—нія (5) будетъ удовлетворять ур—нію

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0, \text{ если } P + R - Q < 0 \;.\;.\;.\; (9),$$

и уравненію

$$-\sqrt{P} + \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0, \text{ если } -P + R + Q < 0 \;.\;.\;.\; (10).$$

Но какой-либо изъ корней ур—нія (5) служитъ корнемъ (2), (3) или (4); слѣд., необходимо, чтобы одно изъ неравенствъ (8), (9) или (10) удовлетворялось, т.-е. чтобы для одного изъ дѣйствительныхъ корней резольвента *одно* изъ положительныхъ количествъ P, Q, R было больше суммы двухъ другихъ. Очевидно, что таково будетъ только одно изъ нихъ, и корень ур—нія (5) удовлетворяетъ

уравненію $\sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$, если $P+Q<R$;
» $\sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0$, если $P+R<Q$;
» $-\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0$, если $Q+R<P$.

Уравненіе же $\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0$ не можетъ имѣть дѣйствительныхъ корней.

547. Примѣръ. *Рѣшить уравненіе*

$$\sqrt{a+x}\pm\sqrt{b+x}\pm\sqrt{c+x}=0,$$

гдѣ a, b, c—нѣкоторыя дѣйствительныя количества.

Въ этой формѣ записи содержатся 4 уравненія:

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0\ .\ .\ .\ (m),$$
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}-\sqrt{c+x}=0\ .\ .\ .\ (n),$$
$$\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0\ .\ .\ .\ (p),$$
$$\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}-\sqrt{c+x}=0\ .\ .\ .\ (q).$$

Перемножая эти уравненія, найдемъ резольвентъ

$$3x^2+2(a+b+c)x-(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)=0\ .\ .\ \ (1).$$

Условіе дѣйствительности корней этого уравненія будетъ

$$(a+b+c)^2+3(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)>0,$$

или

$$a^2+b^2+c^2-(bc+ca+ab)\geqslant 0,$$

или еще, расположивъ по степенямъ c, напр.,

$$c^2-(a+b)c+a^2+b^2-ab\geqslant 0.$$

Но корни тринома въ c мнимы, ибо его реализантъ

$$(a+b)^2-4(a^2+b^2-ab)$$

приводится къ $-3(a-b)^2$; слѣд., при всѣхъ значеніяхъ буквъ a, b, c триномъ положителенъ, и корни ур—нія (1) всегда дѣйствительны.

Посмотримъ теперь, какіе знаки даютъ эти корни подрадикальнымъ количествамъ уравненій (m) (n) . . . Подставимъ $-a$ вмѣсто x въ первую часть ур—нія (1); эта подстановка дастъ въ результатѣ: $-(b-c)^2$; слѣд., одинъ изъ корней $>-a$, другой $<-a$. Для перваго, слѣд., $x+a>0$, для второго $x+a<0$. На основаніи вышеизложеннаго анализа заключаемъ, что меньшій корень, x', будетъ меньше меньшаго изъ количествъ $-a$, $-b$, $-c$, и дѣлаетъ всѣ три радикала мнимыми; большій корень, x'', больше большаго изъ количествъ $-a$, $-b$, $-c$, и дѣлаетъ всѣ три радикала дѣйствительными

Разсмотримъ сначала большій корень x''. Во-1-хъ, онъ не можетъ удовлетворять ур—нію (m). Чтобы онъ удовлетворялъ ур—нію (n), необходимо, чтобы было $(a+x)+(b+x)<c+x$, или $x<c-a-b$. Подстановка въ ур. (1) $c-a-b$ вмѣсто x, какъ легко видѣть, даетъ результатъ

$$4(c-a)(c-b).$$

Пусть $a>b>c$, что нисколько не вредитъ общности заключеній; въ такомъ случаѣ, этотъ результатъ положителенъ, и, слѣд., $c-a-b$ лежитъ внѣ интервалла корней резольвента, и чтобы корень x'' былъ меньше $c-a-b$, необходимо, чтобы полусумма корней, равная $-\frac{a+b+c}{3}$, была меньше $c-a-b$, откуда легко найдемъ, что должно быть: $c>\frac{a+b}{2}$, или, что то же, $c>a$, $c>b$.

Сдѣлавъ подобное же изслѣдованіе по отношенію къ ур—мъ (p) и (q), убѣдимся, что корень x'' будетъ удовлетворять

уравненію (n), если $c\begin{matrix}>a\\>b\end{matrix}$;

уравненію (p), если $b\begin{matrix}>a\\>c\end{matrix}$;

уравненію (q), если $a\begin{matrix}>b\\>c\end{matrix}$.

Перейдемъ къ корню x', который дѣлаетъ всѣ три радикала мнимыми. Чтобы этотъ корень удовлетворялъ одному изъ ур—ній (m), (n) . . . , необходимо, чтобы коэффиціентъ при $\sqrt{-1}$ былъ нулемъ, т.-е. должно быть

$$\sqrt{-a-x}\pm\sqrt{-b-x}\pm\sqrt{-c-x}=0\ .\ .\ .\ (2).$$

откуда снова четыре ур—нія. Составляя резольвентъ, получимъ снова ур. (1), котораго корень x', дѣлающій радикалы ур. (2) дѣйствительными, необходимо удовлетворяетъ одному изъ ур—ній (2). Очевидно, что никакое значеніе x не можетъ удовлетворять ур—нію (m'). Корень x' будетъ удовлетворять ур—нію (n'), если будетъ

$$-c\begin{matrix}>-a\\>-b\end{matrix},\quad \text{т.-е. если}\quad c\begin{matrix}<a\\<b\end{matrix};$$

этотъ корень удовлетворяетъ

уравненію (p'), если $b\begin{matrix}<a\\<c\end{matrix}$,

» (q'), если $a\begin{matrix}<b\\<c\end{matrix}$.

Резюмируя сказанное, заключаемъ, что:

ур—ніе (m) не имѣетъ рѣшеній;

ур—нію (n) удовлетворяетъ корень: x', если $c \begin{smallmatrix} > a \\ < b \end{smallmatrix}$, и x'', если $c \begin{smallmatrix} < a \\ > b \end{smallmatrix}$,

» (p) » » x', » $b \begin{smallmatrix} < a \\ < c \end{smallmatrix}$, и x'', » $b \begin{smallmatrix} > a \\ > c \end{smallmatrix}$.

» (q) » » x', » $a \begin{smallmatrix} < b \\ < c \end{smallmatrix}$, и x'', » $a \begin{smallmatrix} > b \\ > c \end{smallmatrix}$.

548. Что касается провѣрки корней, то иногда ее можно дѣлать и другими пріемами. Пусть, напр., требуется рѣшить ур-ніе.

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}.$$

Возвышая первый разъ въ квадратъ, найдемъ: $2\sqrt{a^2-x^2} = a$; возвысивъ въ квадратъ другой разъ, получимъ: $4a^2 - 4x^2 = a^2$ или $x^2 = \frac{3}{4}a^2$, откуда $x = \pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Подставляя *то или другое* значеніе x въ данное ур., одинаково находимъ, по сокращеніи на $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Такъ какъ обѣ части этого равенства положительны, то для провѣрки его можемъ ихъ возвысить въ квадратъ; находимъ $1 + 1 + 1 = 1$, что невѣрно, слѣд. ни одинъ изъ корней не удовлетворяетъ данному ур-нію. Но если въ немъ передъ вторымъ радикаломъ взять $-$, то получится $1 - 1 + 1 = 1$, что вѣрно. Заключаемъ, что найденные корни принадлежатъ ур-нію

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a}.$$

549. Для провѣрки рѣшеній можно иногда съ успѣхомъ примѣнять преобразованіе сложнаго радикала въ алгебраическую сумму простыхъ радикаловъ. Пусть требуется рѣшить ур-ніе.

$$x + \sqrt{x} = a$$

и провѣрить рѣшенія. Изолируя радикалъ, имѣемъ $\sqrt{x} = a - x$, а возвышая въ квадратъ, получаемъ

$$x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0.$$

Корни этого ур-нія, которое общѣе даннаго, дѣйствительны при условіи $(2a+1)^2 - 4a^2 > 0$ или $a > -\frac{1}{4}$. Полагая это условіе выполненнымъ, находимъ 2 дѣйствительныхъ корня:

$$x' = \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}, \quad x'' = \frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Написавъ предложенное ур-ніе въ видѣ $\sqrt{x} = a - x$, подставляемъ первый корень x'; въ первой части получается сложный радикалъ, который разлагаемъ на два простыхъ:

$$\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1+2\sqrt{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2}}.$$

Когда $a > 0$ и равно $+a$, то $\sqrt{a^2} = a$; если же $a < 0$ и равно $-a$, то $\sqrt{a^2} = -a$; но легко видѣть, что въ обоихъ случаяхъ

$$\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}.$$

Вторая же часть $a - x$ ур-нія обращается въ

$$a - \frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1};$$

заключаемъ, что x', не дѣлая обѣ части ур-нія $\sqrt{x} = a - x$ равными, не удовлетворяетъ этому ур-нію; но легко видѣть, что этотъ корень удовлетворяетъ ур-нію $x - \sqrt{x} = a$.

Постановка второго корня x'' даетъ въ первой части ур-нія $\sqrt{x} = a - x$:

$$\sqrt{\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a+1+2\sqrt{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2a+1-2\sqrt{a^2}}.$$

При $a > 0$ это выраженіе приводится къ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; при $a < 0$ къ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; между тѣмъ какъ вторая часть, $a - x''$, даетъ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4a+1}$; заключаемъ, что x'' удовлетворяетъ предложенному ур-нію только при $a > 0$. Итакъ:

при $a < -\frac{1}{4}$ корни ур-нія мнимы;
при $-\frac{1}{4} < a < 0$ ур-ніе не имѣетъ рѣшеній;
при $a > 0$ оно имѣетъ 1 корень, равный $\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$.

550. При рѣшеніи ирраціональныхъ ур-ній, какъ и всегда, слѣдуетъ пользоваться всѣми средствами, ведущими къ упрощенію вычисленій; въ этомъ отношеніи съ успѣхомъ примѣняются иногда и нѣкоторые искусственные пріемы.

1. Такъ для рѣшенія ур-нія

$$\frac{\sqrt{5x-4}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{4x}-1}$$

примѣняемъ свойство пропорцій (§ 308, II. (10)), и тотчасъ получаемъ, по сокращеніи на 2: $\frac{\sqrt{5x-4}}{\sqrt{5-x}}=\sqrt{4x}$, откуда, по возвышеніи въ квадратъ и по освобожденіи отъ знаменателя: $5x-4=20x-4x^2$, или $4x^2-15x-4=0$. Легко провѣрить, что оба корня этого ур-нія: $x'=4$, $x''=-\frac{1}{4}$ удовлетворяютъ данному ур-нію.

2. Рѣшить ур-ніе $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$.

Примѣняя пріемъ, указанный въ § 540, прибавляемъ къ обѣимъ частямъ ур-нія по 18, и въ ур-ніи

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}=42$$

полагаемъ $\sqrt{x^2-7x+18}=y$; рѣшивъ ур-ніе въ y

$$y^2+y-42=0,$$

находимъ корни: $y'=6$, $y''=-7$. Отбрасывая второй, ибо въ данномъ ур-ніи передъ радикаломъ стоитъ знакъ $+$, получаемъ ур-ніе: $\sqrt{x^2-7x+18}=6$, откуда $x^2-7x-18=0$. Легко видѣть, что корни этого ур-нія: $x'=9$, $x''=-2$ удовлетворяютъ данному ур-нію.

3. Пусть требуется рѣшить ур-ніе

$$(x+2)^2+2\sqrt{x}(x+2)-3\sqrt{x}=46+2x,$$

это ур. легко привести къ виду: $x^2+2x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}=42$ или

$$(x+\sqrt{x})^2+(x+\sqrt{x})=42 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Положивъ $x+\sqrt{x}=y$, получаемъ ур-ніе $y^2+y-42=0$, имѣющее корни $y'=6$, $y''=-7$. Затѣмъ рѣшаемъ ур-нія: $x+\sqrt{x}=6$, или, освободивъ отъ радикала, $x^2-13x+36=0$; и $x+\sqrt{x}=-7$, или, по освобожденіи отъ радикала, $x^2+13x+49=0$. Первое имѣетъ корни 9 и 4; второе $\frac{-13\pm3\sqrt{3}\cdot i}{2}$. Повѣрка покажетъ, что изъ нихъ ур-нію (α) удовлетворяютъ только 4 и $-\frac{13+3\sqrt{3}\cdot i}{2}$.

Примѣчаніе. Для провѣрки корня $-\frac{13+3\sqrt{3}\cdot i}{2}$ преобразовываемъ

$$\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot i} \text{ по формулѣ § 417,6, въ } \frac{3\sqrt{3}+i}{2},$$

а слѣдовательно, $\sqrt{-\frac{13+3\sqrt{3}\cdot i}{2}}$ въ $\frac{3\sqrt{3}\cdot i-1}{2}$, и подставляемъ въ ($\alpha$).

4. Прежде освобожденія ур-нія отъ радикаловъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

полезно изслѣдовать, нѣтъ ли общаго множителя, на который можно бы было сократить уравненіе. Такъ, въ примѣрѣ

$$\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a,$$

разложивъ подрадикальные триномы на множителей, находимъ

$$\sqrt{(x-2a)(x-5a)}-\sqrt{(x-2a)(x+3a)}=x-2a.$$

Сокративъ на общаго множителя всѣхъ членовъ, $\sqrt{x-2a}$, найдемъ

$$\sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a}$$

и, по освобожденіи отъ радикаловъ, получаемъ ур. $3x^2-8ax-60a^2=0$, изъ котораго $x'=6a$, $x''=-\frac{10a}{3}$. Приравнявъ нулю множителя $\sqrt{x-2a}$, имѣемъ еще корень: $x'''=2a$.

Повѣрка покажетъ, что изъ числа найденныхъ корней, $6a$ не удовлетворяетъ предложенному уравненію, которое, такимъ образомъ, имѣетъ два корня: $-\frac{10a}{3}$ и $2a$.

Этимъ же пріемомъ упрощаемъ рѣшеніе уравненій

$$(1)\quad \sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11},$$

$$(2)\quad \sqrt{4x^2-7x-15}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2-9},$$

удаливъ изъ перваго предварительно общ. множ. $\sqrt{2x-1}$, а изъ второго $\sqrt{x-3}$. Рѣшеніе (1) приводится такимъ образомъ къ рѣшенію пары: $\sqrt{2x-1}=0$ и $\sqrt{x-4}+3=\sqrt{x+11}$, а второго—пары: $\sqrt{x-3}=0$ и $\sqrt{4x+5}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$. Найдемъ, что ур-нію (1) удовлетворяютъ корни: 5 и $\frac{1}{2}$, а ур-нію (2): 1 и 3.

5. Вотъ еще полезный искуственный пріемъ. Пусть имѣемъ ур-ніе

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1\ldots(1)$$

Имѣемъ *тождественно*

$$(2x^2+5x-2)-(2x^2+5x-9)=7\ldots(2)$$

Раздѣливъ (2) на (1), получимъ

$$\sqrt{2x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=7\ldots(3)$$

(2) есть *тождество*, вѣрное для *всякихъ* значеній x, тогда какъ (1) есть *уравненіе*, вѣрное лишь для нѣкоторыхъ значеній x; слѣд., и (3) есть ур-ніе, вѣрное для тѣхъ же значеній x. Складывая (1) съ (3), имѣемъ

$$\sqrt{2x^2+5x-2}=4.$$

откуда

$$x' = 2, \quad x'' = -4\tfrac{1}{4}.$$

Рѣшая этимъ пріемомъ ур-нія

$$(1)\ \sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x-4}=13,$$

$$(2)\ \sqrt{2x^2-7x+1}-\sqrt{2x^2-9x+4}=1,$$

$$(3)\ \sqrt{3x^2-7x-30}-\sqrt{2x^2-7x-5}=x-5,$$

пользуемся тождествами:

для (1): $(3x^2-2x+9)-(3x^2-2x-4)=13$

для (2): $(2x^2-7x+1)-(2x^2-9x+4)=2x-3,$

для (3): $(3x^2-7x-30)-(2x^2-7x-5)=x^2-25,$

и находимъ корни:

$$(1)\ 4 \text{ и } -\frac{10}{3}; \quad (2)\ 0 \text{ и } 5; \quad (3)\ 6 \text{ и } -\frac{5}{2}.$$

551. Приводимъ, въ заключеніе, примѣры на ирраціональныя ур-нія, содержащія радикалы выше второго порядка.

1. Рѣшить ур. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}.$

Возвышаемъ обѣ части въ кубъ, примѣняя формулу $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$; получаемъ:

$$a+x+a-x+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\,(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x})=2a.$$

Упрощая и замѣчая, что выраженіе въ скобкахъ, въ силу даннаго ур., равно $\sqrt[3]{2a}$, находимъ ур.

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[3]{2a}=0, \text{ или } \sqrt[3]{a^2-x^2}=0, \text{ откуда } a^2-x^2=0,$$

слѣд.

$$x=\pm a.$$

Оба корня удовлетворяютъ предложенному ур—нію.

2. Рѣшить ур—ніе $\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[\frac{1-a^2}{(1+a)^2}\right]^{\frac{1}{4}}.$

Сокративъ дробь второй части на $1+a$; положивъ, затѣмъ, $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=y,$ и слѣд. $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{y}$, получаемъ ур—ніе

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y+\frac{1}{y}=2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}, \text{ или } \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y^2-2\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y+1=0,$$

откуда

$$y=\sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Такимъ образомъ получаемъ ур. въ x: $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$, или $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+a}{1-a}$, откуда $x=-a$.

Корень этотъ удовлетворяетъ предложенному ур—нію.

3. **Рѣшить ур—ніе**

$$[illegible]\sqrt[3]{x}\,[illegible]\left(x-\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)=97x^{\frac{2}{3}}-\frac{1296}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Выполнивъ умноженіе въ первой части, освободивъ ур. отъ знаменателя и приведя въ порядокъ, находимъ:

$$x^{\frac{8}{3}}-97x^{\frac{4}{3}}+1296=0.$$

Это ур—ніе — квадратное относительно $x^{\frac{4}{3}}$ — даетъ: $x^{\frac{4}{3}}=81$, $x^{\frac{4}{3}}=16$, откуда:

$$x^4=81^3=(3^4)^3=(3^3)^4=27^4;\quad x^4=16^3=(2^4)^3=(2^3)^4=8^4.$$

Рѣшивъ оба двучленныя ур—нія четвертой степени, находимъ 8 корней:

$$\pm27;\ \pm27i;\ \pm8;\ \pm8i.$$

552. Въ заключеніе этой главы докажемъ теорему, что возможно всякое ирраціональное ур—ніе освободить отъ радикаловъ.

Теорема. *Всякое ирраціональное ур. можетъ быть освобождено отъ радикаловъ, каковы бы они ни были и сколько бы ихъ ни было.*

Пусть данное ур. содержитъ радикалъ $\sqrt[m]{z}$, гдѣ z — выраженіе, содержащее неизвѣстныя. Обозначивъ $\sqrt[m]{z}$ буквою x и замѣнивъ различныя степени $\sqrt[m]{z}$ степенями x, всегда можемъ привести ур. къ виду ур—нія раціональнаго относительно x. Освободивъ его отъ дробей, получимъ ур. вида:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ .\ .\ .\ =0\ldots(1).$$

гдѣ A_0, A_1,... не содержитъ $\sqrt[m]{z}$, но могутъ содержать другіе радикалы. Если здѣсь окажутся члены съ степенями x — *са*, большими m, то въ такихъ членахъ можно степени x сдѣлать ниже. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ членъ съ x^k, гдѣ $k\geqq m$; раздѣливъ k на m и обозначивъ цѣлое число въ частномъ буквою q, а остатокъ r, напишемъ:

$$A_kx^k=A_kx^{mq+r}=A_kx^{mq}.x^r;$$

но $z = x^m$, откуда: $x^{ml} = z^l$; слѣд.

$$A_k x^k = A_k z^l x^r,$$

гдѣ $r < m$, а коэффицентъ при x^r не содержитъ радикала $\sqrt[m]{z}$.

Понизивъ такимъ образомъ всѣ степени x, въ которыхъ показатели $\geqslant m$, и собравъ члены съ одинаковыми степенями x, получимъ ур.

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1} = 0 \,..\, (2).$$

Умножая это ур. сначала на x, потомъ на $x^2 \ldots$, на x^{m-1}, и понижая каждый разъ степени x, высшія или равныя m-ой, получимъ $m-1$ ур—ній:

$$A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + \ldots + A_{m-1} z = 0$$

$$A_0 x^2 + A_1 x^3 + A_2 x^4 + \ldots + A_{m-2} z + A_{m-1} zx = 0$$

. . . .

. . . .

$$A_0 x^{m-1} + A_1 z + A_2 zx + \ldots + A_{m-1} zx^{m-2} = 0.$$

Эти ур—нія, вмѣстѣ со (2), даютъ систему m уравненій съ $m-1$ количествами: x, x^2, $x^3 \ldots$, x^{m-1}, которыя и можно исключить изъ этой системы; въ результатѣ исключенія получится одно ур., не содержащее буквы x, т.-е. свободное отъ радикала $\sqrt[m]{z}$. И т. д.

Примѣръ. Освободить по этому способу отъ радикаловъ ур—ніе

$$a + 5\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} = 0.$$

Положивъ $\sqrt[3]{x} = u$, и сл. $\sqrt[3]{x^2} = u^2$, найдемъ

$$a + 5u - 2u^2 = 0 \ldots (1).$$

Умноживъ сперва на u, потомъ на u^2, получимъ:

$$au + 5u^2 - 2u^3 = 0$$

$$au^2 + 5u^3 - 2u^4 = 0.$$

Но $u^3 = x$, $u^4 = ux$; слѣд. послѣднія 2 ур. будутъ вида

$$au + 5u^2 - 2x = 0 \,.\,.\, (2)$$

$$au^2 + 5x - 2ux = 0 \,.\,.\, (3).$$

Исключая изъ ур. (1), (2) и (3) количество u, найдемъ

$$8x^2 - 125x - 30ax - a^3 = 0,$$

ур—ніе свободное отъ радикаловъ.

Освобожденіе ур—нія (2) отъ радикаловъ можно еще выполнить такъ. Умножимъ обѣ части его на полиномъ

$$B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_{m-2}x^{m-2} + x^{m-1},$$

гдѣ коэффиціенты на время оставляемъ неопредѣленными. Умноженіе даетъ

$$A_0B_0 + (A_0B_1 + B_0A_1)x + \ldots + A_{m-1}x^{2m-2} = 0.$$

Понизивъ степени x, гдѣ онѣ $> m$, получимъ ур.

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{m-1}x^{m-1} = 0 \quad . \quad . \quad (4),$$

гдѣ C_0, C_1 . . . суть 1-й степени относительно коэффиціентовъ B. Пользуясь неопредѣленностью послѣднихъ, полагаемъ

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0 \ \ldots\ C_{m-1} = 0,$$

откуда найдемъ всѣ $m - 1$ коэффиціентовъ B_0, B_1 . . . B_{m-2}. Подставивъ ихъ въ ур. (4), получимъ

$$C_0 = 0$$

ур—ніе, не содержащее радикала $\sqrt[m]{z}$.

Примѣчаніе. Этотъ способъ уничтоженія ирраціональности въ ур—ніяхъ умноженіемъ на нѣкоторый полиномъ, очевидно, можно прилагать и для уничтоженія ирраціональности въ знаменателяхъ дробей: для этого нужно только умножить числителя и знаменателя на прилично выбранный многочленъ.

ГЛАВА XXXVII.

Системы уравненій второй степени и высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

Системы уравненій, изъ которыхъ одно второй, остальныя — первой степени. — Системы двухъ уравненій второй степени. — Системы уравненій второй степени болѣе чѣмъ съ двумя неизвѣстными. —Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ.

553. Уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными x и y есть цѣлое раціональное ур—ніе, содержащее члены: съ квадратами обоихъ неизвѣстныхъ, съ ихъ произведеніемъ, съ первыми степенями неизвѣстныхъ, и члены, независящіе отъ неизвѣстныхъ; слѣд. это есть ур—ніе вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Подобно этому, общій видъ ур—нія второй степени съ тремя неизвѣстными есть

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0$$

и т. д.

Системою уравненій второй степени съ двумя или нѣсколькими неизвѣстными называютъ такую систему, въ которой по крайней мѣрѣ одно ур—ніе—второй степени, а остальныя—первой или второй степени.

I. Системы ур—ній, изъ которыхъ одно—второй степени.

554. Система ур—ній съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно—второй, а другое—первой степени, имѣетъ видъ:

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \,.\;.\;.\;.\;.\;. \,(1) \\ Lx+My+N=0 \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \,(2) \end{cases}$$

Выражая изъ (2) y въ зависимости отъ x, имѣемъ

$$y=-\frac{Lx+N}{M}.$$

Внося это значеніе въ ур. (1), получимъ:

$$Ax^2-\frac{Bx(Lx+N)}{M}+\frac{C(Lx+N)^2}{M^2}+Dx-\frac{E(Lx+N)}{M}+F=0.$$

Выполняя дѣйствія, располагая члены по степенямъ x и полагая для краткости

$$P=AM^2-BLM+CL^2,\quad Q=-BMN+2CLN+DM^2-ELM,$$
$$R=CN^2-EMN+FM^2,$$

замѣняемъ данную систему ей эквивалентною:

$$Px^2+Qx+R=0,\quad y=-\frac{Lx+N}{M}.$$

Первое ур—ніе дастъ для x два значенія: x' и x''; внося ихъ поочередно во второе ур., найдемъ соотвѣтствующія значенія для y: y' и y''. Итакъ, данная система ур—ній имѣетъ двѣ системы рѣшеній:

$$x=x',\ y=y' \text{ и } x=x'',\ y=y''.$$

Эти рѣшенія будутъ мнимы, если $Q^2-4PR<0$, представятъ двѣ дѣйствительныя системы при $Q^2-4PR>0$; и сливаются въ одну систему рѣшеній при $Q^2-4PR=0$.

Примѣръ. ***Рѣшить систему***

$$5x^2-8xy+y^2-7x+5y+4=0,$$
$$6x-y-4=0.$$

Изъ второго ур—нія имѣемъ: $y = 6x - 4$; подставляя это значеніе y въ первое ур., находимъ: $7x^2 - 7x = 0$, откуда: $x' = 0$, $x'' = 1$. При $x' = 0$ имѣемъ $y' = -4$; при $x'' = 1$ получаемъ $y'' = 2$. Итакъ, находимъ двѣ системы рѣшеній:

$$x' = 0,\ y' = -4;\ x'' = 1,\ y'' = 2.$$

555. Пусть дана система n ур—ній съ n неизвѣстными, и пусть одно изъ этихъ ур—ній — второй степени, а остальныя — первой. При помощи $n - 1$ ур—ній первой степени можно $n - 1$ неизвѣстныхъ выразить черезъ n-ое; такимъ образомъ получится $n - 1$ новыхъ ур—ній 1-й степени вида

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= a'x + b' \\ u &= a''x + b'' \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Внося всѣ эти значенія въ ур—ніе второй степени, получимъ квадратное ур. съ неизвѣстнымъ x; изъ него найдемъ для x два значенія: x' и x''. Каждому изъ этихъ значеній соотвѣтствуетъ своя система значеній неизвѣстныхъ y, z, u, ... Данныя ур—нія имѣютъ двѣ системы рѣшеній.

Примѣръ. *Рѣшить систему*

$$\begin{aligned} x^2 + 3z^2 + 2yz - 10xy - 2x + 5y - 25 &= 0, \\ 5x + 22y + 7z &= 4, \\ 21x - 7y + z &= 31. \end{aligned}$$

Выражая изъ двухъ послѣднихъ ур—ній y и z черезъ x, имѣемъ

$$y = 2x - 3,\ z = -7x + 10;$$

внося въ первое ур—ніе, находимъ квадратное ур. въ x:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда: $x' = 1$, $x'' = 2$. Слѣд. рѣшенія предложенной системы будутъ:

$$x' = 1,\ y' = -1,\ z' = 3;\ \text{и}\ x'' = 2,\ y'' = 1,\ z'' = -4.$$

556. Разсмотримъ рѣшеніе нѣкоторыхъ замѣчательныхъ системъ, прилагая особые искуственные пріемы, болѣе изящные, нежели указанный общій пріемъ.

I. *Рѣшить систему*

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b^2 \end{aligned}\right\}.$$

Такъ какъ здѣсь дается сумма и произведеніе неизвѣстныхъ, то послѣднія опредѣлятся какъ корни квадратнаго ур—нія, имѣющаго коэффиціентомъ при первой степени неизвѣстнаго количество $-a$, а извѣстнымъ членомъ b^2:

$$z^2 - az + b^2 = 0,$$

откуда

$$z' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}, \quad z'' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Одно значеніе z принимаемъ за x, другое за y; такимъ образомъ получаемъ двѣ системы рѣшеній:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y' &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \\ y'' &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} \end{aligned}\right.$$

Что такъ должно быть, понятно a priori, ибо x и y въ данныя уравненія входятъ одинаковымъ образомъ.

Другой пріемъ. Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ, имѣемъ: $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$; помноживъ второе ур. на 4 и вычтя изъ предыдущаго, находимъ: $x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b^2$, или $(x - y)^2 = a^2 - 4b^2$; откуда $x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b^2}$. Такимъ образомъ, предложенная система можетъ быть замѣнена двумя ей эквивалентными:

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= \sqrt{a^2 - 4b^2} \end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} x + y &= a \\ x - y &= -\sqrt{a^2 - 4a^2}. \end{aligned}\right.$$

Рѣшая ту и другую, найдемъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

II. *Рѣшить систему*

$$x - y = a$$
$$xy = b^2.$$

Легко эту систему привести къ предыдущей: стоитъ только положить $y = -y'$. Такимъ образомъ получимъ ур—нія

$$x + y' = a, \quad xy' = -b^2,$$

изъ которыхъ видно, что x и y' суть корни ур—нія

$$z^2 - az - b^2 = 0,$$

слѣд., вторая система имѣетъ рѣшенія:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y' &= \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x &= \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y' &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда y вмѣсто $-y'$, найдемъ рѣшенія предложенной системы:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x &= \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \\ y &= \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Другой пріемъ. Возводя первое изъ данныхъ ур—ній въ квадратъ, умножая второе на 4 и складывая, получаемъ

$$(x + y)^2 = a^2 + 4b^2, \text{ откуда } x + y = \pm\sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Такимъ образомъ предложенная система замѣняется двумя:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = a \\ x + y = +\sqrt{a^2 + 4b^2} \end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x - y = a \\ x + y = -\sqrt{a^2 + 4b^2}, \end{array}\right.$$

изъ которыхъ и находимъ прежнія двѣ системы рѣшеній.

III. *Рѣшить систему*

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x + y = b.$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части второго ур—нія, имѣемъ $x^2 + 2xy + y^2 = b^2$; вычитая изъ этого ур—нія почленно первое, имѣемъ: $2xy = b^2 - a^2$, откуда

$$xy = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Такимъ образомъ извѣстны: сумма b и произведеніе $\frac{b^2 - a^2}{2}$ неизвѣстныхъ x и y; слѣд. x и y суть корни ур—нія

$$z^2 - bz + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0.$$

Итакъ, имѣемъ двѣ системы рѣшеній:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \dfrac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \dfrac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \end{array}\right.$$

IV. *Рѣшить систему*

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x - y = b.$$

Рѣшеніе этой системы приводится къ предыдущей; ибо, положивъ $y = -y'$, получаемъ систему

$$x^2 + y'^2 = a^2, \; x + y' = b,$$

откуда прямо можемъ написать обѣ системы рѣшеній:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \\ y = -y' = \dfrac{-b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \\ y = -y' = \dfrac{-b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}. \end{array}\right.$$

V. *Рѣшить систему*

$$x^2 - y^2 = a^2$$
$$x + y = b.$$

Исключивъ y, найдемъ ур—ніе $2bx - b^2 = a^2$ — первой степени; изъ него

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \text{ и слѣдовательно } y = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Можно рѣшить эту систему еще такъ: замѣчая, что $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, мы, раздѣливъ первое ур. на второе, найдемъ ур.

$$x - y = \frac{a^2}{b};$$

комбинируя это ур—ніе съ ур—мъ $x + y = b$, найдемъ x и y.

Подобнымъ же образомъ рѣшается система

$$x^2 - y^2 = a^2$$
$$x - y = b.$$

II. Система двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.

557. *Вообще, система двухъ ур—ній второй степени съ двумя неизвѣстными приводитъ къ полному ур—нію четвертой степени.*

Пусть данная система будетъ:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \;.\;.\;.\; (1)$$
$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0 \;.\;.\;.\; (2)$$

Исключимъ сначала y^2, умноживъ ур. (1) на c', (2) на c и вычтя почленно одно ур. изъ другого: найдемъ ур—ніе

$$(ac' - ca')x^2 + (bc' - cb')xy + (dc' - cd')x + (ec' - ce')y + fc' - cf' = 0,$$

или, обозначивъ каждый изъ коэффиціентовъ одною буквою:

$$lx^2 + mxy + nx + py + q = 0 \;.\;.\;.\; (3).$$

Это ур—ніе, въ сочетаніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (1), составитъ новую систему, эквивалентную данной. Изъ ур. (3) находимъ

$$y = -\frac{lx^2 + nx + q}{mx + p};$$

подставивъ это значеніе y въ ур. (1), получимъ

$$ax^2 - \frac{bx(lx^2 + nx + q)}{mx + p} + \frac{c(lx^2 + nx + q)^2}{(mx + p)^2} + dx - \frac{e(lx^2 + nx + q)}{mx + p} - f = 0.$$

Освободивъ это ур. отъ дробей, выполнивъ всѣ вычисленія и приведя въ порядокъ, получимъ, вообще, *полное* ур. четвертой степени:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \;.\;.\;.\; (4).$$

которое, въ соединеніи съ (3), составляетъ систему, эквивалентную данной Полное ур. четвертой степени (4) въ общемъ видѣ, хотя и можетъ быть рѣшено средствами элементарной алгебры, но обыкновенно не вводится въ кругъ ур—ній, разсматриваемыхъ въ низшихъ отдѣлахъ алгебры; элементарная алгебра занимается рѣшеніемъ ур—нія 4-й степени только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, когда напр. оно биквадратное, или возвратное, или степень его понижается до второй; въ такихъ случаяхъ безъ особаго труда найдемъ четыре значенія для x: подставивъ каждое изъ нихъ въ ур. (3), получимъ четыре соотвѣтствующія значенія для y.

Такимъ образомъ, данная система принимаетъ, вообще, четыре рѣшенія.

Примѣръ. ***Рѣшить систему***

$$x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \;.\;.\;.\; (1)$$
$$2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0 \;.\;.\;.\; (2).$$

Исключивъ y^2, получимъ ур—ніе

$$x^2 - 10xy + 6x - 18y + 21 = 0 \;.\;.\;.\; (3),$$

изъ котораго

$$y = \frac{x^2 + 6x + 21}{10x + 18} \;.\;.\;.\; (3').$$

Подставивъ найденное для y выраженіе (3′) въ ур. (1), находимъ

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \;.\;.\;.\; (4)$$

ур—ніе, составляющее съ (3) систему, эквивалентную предложенной.

Но ур. (4) — биквадратное; рѣшивъ его, получимъ для x четыре значенія

$$x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 3,\quad x_4 = -3.$$

Вычисливъ по формулѣ (3′), соотвѣтствующія значенія y, найдемъ

$$y_1 = 1,\quad y_2 = 2,\quad y_3 = 1,\quad y_4 = -1.$$

Итакъ, данная система имѣетъ четыре рѣшенія:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -1. \end{cases}$$

558. Когда одно изъ ур—ній разлагается на два раціональныхъ множителя первой степени, то рѣшеніе всегда можно привести къ квадратнымъ ур—мъ.

Въ самомъ дѣлѣ, выразивъ изъ ур—нія (1) § 557 y по x, имѣемъ

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{(bx+e)^2 - 4c(ax^2+dx+f)}}{2c}.$$

Расположивъ подрадикальное выраженіе по степенямъ x, получимъ

$$(b^2-4ac)x^2 + 2(be-2cd)x + e^2 - 4cf;$$

оно будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$(be-2cd)^2 = (b^2-4ac)(e^2-4cf);$$

какъ скоро это условіе существуетъ, значенія y будутъ раціональны:

$$y = \frac{-bx-e \pm (Px+Q)}{2c},$$

гдѣ $Px+Q$ есть $\sqrt{}$ изъ подрадикальнаго выраженія; имѣемъ

$$y' = \frac{(P-b)x+Q-e}{2c}, \quad y'' = -\frac{(P+b)x+Q+e}{2c};$$

слѣд. ур. (1) можно представить въ видѣ $c(y-y')(y-y'') = 0$; слѣд. это ур. будетъ удовлетворено, во-первыхъ, значеніями x и y, удовлетворяющими ур—нію

$$y = \frac{(P-b)x+Q-e}{2c} \ldots (3),$$

а во-вторыхъ, такими значеніями, которыя, обращая въ нуль $y - y''$, удовлетворяютъ ур—нію

$$y = -\frac{(P+b)x+Q+e}{2c} \ldots (4),$$

такъ что вопросъ сводится къ рѣшенію двухъ системъ: (2), (3) и (2), (4): каждая изъ нихъ составлена изъ ур—нія 1-й ст. и ур—нія 2-й ст., а потому приведетъ къ ур—нію 2-й ст. въ x, для котораго и получится 4 значенія; подставляя ихъ въ ур—нія (3) и (4), найдемъ соотвѣтствующія значенія y.

Примѣръ. *Рѣшить систему*

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 + 3x - 2y - 5 = 0,$$
$$x^2 + xy - y^2 + x - y - 6 = 0.$$

Изъ перваго имѣемъ

$$y = \frac{5x+2 \pm \sqrt{x^2-16x+64}}{6} = \frac{5x+2 \pm (x-8)}{6},$$

откуда

$$y = x-1, \quad y = \frac{2x+5}{3}.$$

Подставляя вмѣсто y его величину $x - 1$ во второе данное ур—ніе, получаемъ: $x^2 + x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; а соотвѣтствующія значенія y: $y_1 = 1$, $y_2 = -4$.

Для $y = \frac{2x+5}{3}$ имѣемъ ур—ніе $x^2 - 2x - 94 = 0$, изъ котораго $x_3 = 3{,}015$ и $x_4 = -2{,}834$; а соотв. значенія y: $y_3 = 3{,}677$ и $y_4 = -0{,}224$. Итакъ данная система имѣетъ рѣшенія:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 3{,}015 \\ y_3 = 3{,}677 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_4 = -2{,}834 \\ y_4 = -0{,}224. \end{cases}$$

559. Когда одно изъ ур—ній *однородно* по отношенію къ x и y, можно пользоваться слѣдующимъ пріемомъ. Пусть, напр., ур. (1) § 557 однородно, т.-е. приводится къ

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

то, раздѣливъ всѣ его члены на y^2, дадимъ ему видъ:

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b \cdot \frac{x}{y} + c = 0.$$

Рѣшая это квадратное относительно $\frac{x}{y}$ ур—ніе, найдемъ для отношенія $\frac{x}{y}$ два значенія: $\frac{x}{y} = m$, $\frac{x}{y} = m'$, откуда

$$x = my, \quad x = m'y.$$

Комбинируя каждое изъ этихъ ур—ній со (2), получимъ двѣ системы, изъ коихъ каждая состоитъ изъ одного ур—нія 1-й ст. и одного 2-й степени.

Примѣръ. *Рѣшить систему*

$$3x^2 + 13xy - 10y^2 = 0 \;.\;\;.\;\;.\;(1)$$
$$2x^2 + 3xy - y^2 + x + 5y - 34 = 0 \;.\;\;.\;\;.\;(2).$$

Ур. (1) даетъ: $x = \frac{2}{3}y$ и $x = -5y$. Комбинируя первое изъ этихъ ур—ній со (2), находимъ два рѣшенія

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = -4, \quad y_2 = -6.$$

Рѣшая систему, образуемую ур—мъ (2) съ $x = -5y$, находимъ еще два рѣшенія

$$x_3 = 5, \quad y_3 = -1 \quad \text{и} \quad x_4 = -5, \quad y_4 = 1$$

Не останавливаясь далѣе на этихъ частностяхъ, не имѣющихъ, къ тому же, большихъ приложеній въ начальной алгебрѣ, перейдемъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ замѣчательныхъ простыхъ системъ, часто встрѣчающихся въ приложеніяхъ.

560. *Рѣшить систему*

$$x^2+y^2=a,\quad xy=b$$

Умноживъ второе на 2 и сложивъ съ первымъ, а потомъ вычтя изъ перваго, находимъ

$$x^2+2xy+y^2=a+2b,\ \text{или}\ (x+y)^2=a+2b\ \ldots (1)$$

$$\text{и}\ x^2-2xy+y^2=a-2b,\ \text{или}\ (x-y)^2=a-2b\ \ldots (2).$$

Изъ ур—ній (1) и (2) находимъ

$$x+y=\pm\sqrt{a+2b},\qquad x-y=\pm\sqrt{a-2b}.$$

Отсюда, складывая, а потомъ вычитая, имѣемъ

$$x=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}],\quad y=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}].$$

Комбинируя знаки всевозможными способами, получимъ четыре значенія для x и столько же для y; чтобы изъ нихъ составить системы рѣшеній, удовлетворяющихъ даннымъ ур—мъ, достаточно замѣтить, что произведеніе x на y, въ силу второго ур—нія, должно давать b. Легко убѣдиться, что это требованіе будетъ выполнено, если въ формулахъ x и y передъ первымъ радикаломъ возьмемъ одинаковые знаки, а передъ вторымъ противоположные. Такимъ образомъ получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}[\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}] \\ y_1=\frac{1}{2}[\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}] \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=\frac{1}{2}[\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}] \\ y_2=\frac{1}{2}[\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\frac{1}{2}[-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}] \\ y_3=\frac{1}{2}[-\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}] \end{cases}\quad \begin{cases} x_4=\frac{1}{2}[-\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}] \\ y_4=\frac{1}{2}[-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}]. \end{cases}$$

Другой способъ. Возвышая въ квадратъ второе данное ур., замѣняемъ данную систему болѣе общею

$$x^2+y^2=a,\ x^2y^2=b^2\ \ldots (\alpha)$$

Зная сумму a и произведеніе b^2 количествъ x^2 и y^2, найдемъ ихъ какъ корни квадратнаго ур—нія

$$z^2-az+b^2=0;$$

$$x^2=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2},\quad y^2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

Извлекая квадратные корни, получимъ:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}.$$

откуда легко составить прежнія комбинаціи соотвѣтствующихъ значеній x и y. Легко ихъ привести къ прежнему виду. Возьмемъ, напр., формулу 3 и приложимъ къ ней преобразованіе сложнаго радикала

$$\pm\sqrt{A+\sqrt{B}}=\pm\left\{\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right\},$$

имѣя

$$A=\frac{a}{2},\quad B=\frac{a^2}{4}-b^2,\quad A^2-B=b^2.$$

Найдемъ

$$\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}=\pm\frac{1}{2}\left\{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right\}.$$

Такимъ же образомъ преобразуемъ и y.

561. *Рѣшить систему*

$$x^2+2xy+y^2-ax-ay=0,\ x^2-2xy+y^2-bx+by=0.$$

Эту систему можно написать въ видѣ:

$$(x+y)^2-a(x+y)=0,\ (x-y)^2-b(x-y)=0,$$

или:

$$(x+y)(x+y-a)=0,\ (x-y)(x-y-b)=0.$$

Рѣшеніе данной системы распадается на четыре другія:

$$\begin{cases}x+y=0,\\x-y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0,\\x-y-b=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=0,\\x+y-a=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y-a=0,\\x-y-b=0,\end{cases}$$

изъ которыхъ получаемъ:

$$\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\frac{b}{2}\\y_2=-\frac{b}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=\frac{a}{2}\\y_3=\frac{a}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=\frac{a+b}{2}\\y_4=\frac{a-b}{2}.\end{cases}$$

III. Системы уравненій второй степени болѣе нежели съ двумя неизвѣстными.

562. Примѣръ I. *Рѣшить систему*

$$x(x+y+z)=a^2,\ y(x+y+z)=b^2,\ z(x+y+z)=c^2.$$

Складывая и вынося за скобки $x+y+z$, получаемъ

$$(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2,\text{ откуда } x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Замѣняя въ каждомъ изъ данныхъ ур—ній $x+y+z$ его величиною, получимъ двѣ системы рѣшеній, взявъ передъ радикаломъ сперва $+$, потомъ $-$:

$$\left\{\begin{aligned} x&=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ y&=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ z&=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ y&=\frac{-b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ z&=\frac{-c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\end{aligned}\right.$$

563. Примѣръ II. *Рѣшить систему*

$$x^2+yz=c \quad (1) \qquad y^2+xz=c \quad (2) \qquad z^2+xy=a \;.\;.\;.\; (3)$$

Вычитая (2) изъ (1), находимъ

$$(x-y)(x+y)-z(x-y)=0, \quad \text{или} \quad (x-y)(x+y-z)=0.$$

Данная система распадается на двѣ:

$$\begin{aligned} x-y&=0 \quad (\alpha) \\ y^2+xz&=c \quad (2) \\ z^2+xy&=a \quad (3) \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} x+y-z&=0 \quad (\beta) \\ y^2+xz&=c \quad (2) \\ z^2+xy&=a. \quad (3) \end{aligned}$$

Рѣшимъ, напр., вторую. Приравнивая значенія z изъ (β) и (2), получаемъ

$$x+y=\frac{c-y^2}{x}, \text{ или } x^2+y^2+xy=c, \text{ или } (x+y)^2-xy=c,$$

или, такъ какъ изъ (β) имѣемъ $x+y=z$, то

$$z^2-xy=c.$$

Это ур. вмѣстѣ съ (3) даетъ

$$z^2=\frac{a+c}{2}, \text{ откуда } z=\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}, \text{ и } xy=\frac{a-c}{2}.$$

Такимъ образомъ z найдено; для опредѣленія x и y замѣчаемъ, что извѣстны: сумма $x+y$, равная z, т.-е. $\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}$, и произведеніе xy, равное $\frac{a-c}{2}$. Сл. x и y опредѣляются какъ корни ур—нія

$$X^2\mp\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot X+\frac{a-c}{2}=0,$$

откуда:

$$X=\left\{\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a+c}{8}-\frac{a-c}{2}}=\frac{\pm\sqrt{a+c}\pm\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}}.$$

Каждое значеніе z даетъ намъ двѣ системы значеній x и y, ибо x безразлично м. б. взято равнымъ X' или X'', и слѣд. y равнымъ X'' или X'. Итакъ, получимъ 4 системы рѣшеній:

$$\left\{\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x &= \frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y &= \frac{\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x &= \frac{\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y &= \frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} z &= -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x &= \frac{-\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y &= \frac{-\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} z &= -\sqrt{\frac{a+c}{2}} \\ x &= \frac{-\sqrt{a+c}-\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \\ y &= \frac{-\sqrt{a+c}+\sqrt{5c-3a}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right.$$

IV. Системы уравненій высшихъ степеней, приводимыя къ квадратнымъ

564. Примѣръ I. *Рѣшить систему*

$$x+y=17\ .\ .\ .\ (1) \qquad x^3+y^3=1343\ .\ .\ .\ (2).$$

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, находимъ

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=4913\ .\ .\ .\ (3).$$

Это ур—ніе общѣе ур—нія (1); именно, мы знаемъ, что если обозначить одинъ изъ мнимыхъ кубичныхъ корней изъ 1 буквою α, то ур—нію (3) удовлетворяютъ значенія x и y, повѣряющія каждое изъ ур—ній: $(x+y)=17\alpha$, $x+y=17\alpha^2$, $x+y=17\alpha^3$. Но если мы замѣнимъ въ немъ $x+y$ числомъ 17, то этимъ мы выразимъ, что корни его удовлетворяютъ ур—нію (1), и слѣд. паразитные корни будутъ устранены. Итакъ, замѣнивъ въ ур—ніи (3) $x+y$ числомъ 17, подставляемъ вмѣсто него ур—ніе $x^3+y^3+51xy=4913$, или, въ силу ур—нія (2)

$$51xy=4913-1343, \text{ или } xy=70.$$

Зная сумму и произведеніе x и y, найдемъ эти количества, какъ корни квадратнаго ур—нія

$$u^2-17u+70=0,$$

откуда.

$$x'=7,\ y'=10, \text{ или } x''=10,\ y''=7.$$

Кромѣ того, данная система имѣетъ третью систему рѣшеній, образуемую безконечными и противоположными по знаку величинами x и y.

Другой способъ. Можно бы было употребить еще слѣдующій методъ. Ур—ніе (2) можно представить въ видѣ:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=1343, \text{ или, замѣнивъ } x+y \text{ числомъ } 17:$$

$$x^2-xy+y^2=79.$$

Прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $3xy$, получимъ:

$$(x+y)^2=79+3xy, \text{ или } 289=79+3xy, \text{ или } xy=70$$

Далѣе вычисленіе оканчивается какъ выше указано.

565. Примѣръ II. *Рѣшить систему*

$$x+y=a\ .\ .\ .\ (1) \qquad x^5+y^5=b^5\ .\ .\ .\ (2)$$

Возвысивъ въ пятую степень обѣ части ур—нія (1) и сгруппировавъ извѣстнымъ образомъ члены, получимъ:

$$x^5+y^5+5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)=a^5,$$

или

$$x^5+y^5+5xy[(x+y)^3-3(x+y)xy]+10(x+y)x^2y^2=a^5\ .\ .\ .\ (3)$$

Это ур. не эквивалентно (1): если обозначимъ буквою α одинъ изъ мнимыхъ корней 5-го порядка изъ 1, то ур—нію (3) удовлетворнютъ корни каждаго изъ уравненій:

$$x+y=a\alpha,\ x+y=a\alpha^2,\ x+y=a\alpha^3,\ x+y=a\alpha^4,\ x+y=a\alpha^5.$$

Но если мы замѣнимъ въ немъ $x+y$ количествомъ a, то этимъ самымъ исключимъ изъ него рѣшенія четырехъ паразитныхъ уравненій, и останется уравненіе

$$x^5+y^5+5xy(a^3-3axy)+10ax^2y^2=a^5\ .\ .\ .\ (4).$$

которое съ (2) образуетъ систему, эквивалентную данной.

Ур. (4) можно представить въ видѣ

$$5a(xy)^2-5a^3(xy)+a^5-b^5=0.$$

Будучи квадратнымъ относительно xy, оно дастъ два значенія для xy: каждое изъ нихъ комбинируемъ съ ур—ніемъ $x+y=a$. Такимъ образомъ получимъ четыре системы рѣшеній: пятую систему составятъ значенія x и y безконечныя по величинѣ и противоположныя по знаку.

566. Примѣръ III. *Рѣшить систему*

$$x+y+z=a\ldots(1) \quad x^2+y^2+z^2=a^2\ \ldots(2) \quad x^3+y^3+z^3=a^3\ \ldots(3)$$

Возвысивъ обѣ части ур—нія (1) въ квадратъ, получаемъ

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=a^2,$$

или, по причинѣ ур—нія (2):

$$xy+xz+yz=0\ .\ .\ .\ (4)\quad \text{откуда}\quad xy=-z(x+y)\ .\ .\ .\ (5).$$

Возвысивъ ур. (1) въ кубъ, получимъ:

$$z^3+(x+y)^3+3z(x+y)(x+y+z)=a^3,$$

или, принимая во вниманіе ур—нія (1) и (3):

$$3xy(x+y)+3az(x+y)=0,$$

а, въ силу соотношенія (4),

$$xy(x+y)-axy=0,\quad \text{или}\quad xy(x+y-a)=0\ .\ .\ .\ (5).$$

Это ур—ніе требуетъ, чтобы было: или $xy=0$, или $x+y=a$. Если $xy=0$, то должно быть: или $x=0$, или $y=0$. При $x=0$, ур—ніе (4) дастъ $yz=0$. Слѣд. необходимъ еще, чтобы было: или $y=0$, или $z=0$, причемъ при $y=0$ будетъ $z=a$, а при $z=0$ имѣемъ $y=a$. Итакъ имѣемъ систему

$$x'=0,\quad y'=0,\quad z'=a;$$
$$x''=0,\quad y''=a,\quad z''=0.$$

Если $x+y=a$, тогда $z=0$; и по причинѣ (4) нужно еще, чтобы было $x=a$ и $y=0$; или $x=0$ и $y=a$. Отсюда третья система рѣшеній.

$$x'''=a,\quad y'''=0,\quad z'''=0.$$

Иначе, необходимо и достаточно, чтобы два изъ неизвѣстныхъ были нули, а третье a.

567. Примѣръ IV. *Рѣшить систему*

$$xu=yz,\quad x+y+z+u=a,$$
$$x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\quad x^4+y^4+z^4+u^4=c^4.$$

Примемъ за вспомогательныя неизвѣстныя: произведенія $xu=yz=q$, и суммы $x+u=t$ и $y+z=v$. Такимъ образомъ прямо получимъ:

$$t+v=a\ .\ .\ .\ (1)\qquad t^2+v^2-4q=b^2\ .\ .\ .\ (2)$$
$$t^4+v^4-4q(t^2+v^2)+4q^2=c^4\ .\ .\ .\ (3)$$

Выразивъ q изъ ур—нія (2) и подставивъ въ (3), имѣемъ

$$4(t^4+v^4)-4(t^2+v^2)(t^2+v^2-b^2)+(t^2+v^2-b^2)^2=4c^4,$$

или

$$-8v^2t^2+4b^2(t^2+v^2)+(t^2+v^2-b^2)^2=4c^4.$$

Подставивъ сюда вмѣсто t^2+v^2 его величину a^2-2vt, выведенную изъ (1), и обозначивъ vt буквою S, для опредѣленія S имѣемъ ур—ніе

$$4S^2+4(a^2+b^2)S+4c^4-(a^2+b^2)^2=0.$$

Найдя корни S′ и S″ этого ур., найдемъ v и t изъ ур—ній

$$X^2-aX+S'=0, \qquad X^2-aX+S''=0.$$

Первое дастъ для v и t систему v', t'; второе систему v'', t''; изъ ур—нія (2) найдемъ соотвѣтствующія значенія для q: q и q. Наконецъ, найдемъ двѣ системы значеній для x и u изъ ур—ній

$$X^2-t'X+q'=0, \qquad X^2-t''X+q''=0,$$

и двѣ соотвѣтственныя системы значеній для y и z изъ ур—ній

$$Y^2-v'Y+q'=0, \qquad Y^2-v'Y+q''=0.$$

568. Примѣръ V. Рѣшить систему

$$x^4+y^4-x^2y^2=a(x+y)^2\;.\;.\;.\;(1) \qquad xy(x-y)^2=b(x+y)^2\;.\;.\;.\;(2).$$

1-й способъ. Помноживъ (2) на 4 и сложивъ съ (1), получимъ:

$$(x+y)^4-15x^2y^2=(a+4b)(x+y)^2\;.\;.\;.\;(3).$$

Положивъ $x+y=u$, $xy=v$, дадимъ ур—мъ (2) и (3) видъ

$$v(u^2-4v)=bu^2, \qquad u^4-15v^2=(a+4b)u^2,$$

исключивъ u^2, получимъ квадратное ур. относительно v.

2-й способъ (неопредѣленныхъ коэффиціентовъ). — Помножимъ ур—нія (1) и (2) соотвѣтственно на неопредѣленные коэффиценты λ и μ, затѣмъ опредѣлимъ λ и μ такъ, чтобы первая часть новаго уравненія, которое однородно по отношенію къ x и y, дѣлилась бы, какъ и вторая часть, на $x+y$. Эта первая часть, очевидно, есть $\lambda(x^4+y^4-x^2y^2)+\mu xy(x-y)^2$; и какъ она должна быть нулемъ при замѣнѣ въ ней x количествомъ $-y$, то имѣемъ условіе: $\lambda-4\mu=0$. Можно взять μ равнымъ 1, тогда $\lambda=4$, т.-е.: чтобы выдѣлить множителя $x+y$ въ первой части новаго ур—нія, нужно помножить на 4 обѣ части ур—нія (1) и сложить со (2). Найдемъ:

$$(x+y)^2(4x^2+4y^2-7xy)=(4a+b)(x+y)^2:$$

итакъ, множитель $(x+y)$, и даже его квадратъ, обнаруженъ въ первой части предыдущаго ур—нія. Приходимъ такимъ образомъ къ рѣшенію системъ

$$x+y=0, \qquad xy(x-y)^2=b(x+y)^2;$$
$$4(x^2+y^2)-7xy=4a+b, \qquad xy(x-y)^2=b(x+y)^2.$$

Первая система даетъ $x = y = 0$. Для рѣшенія второй полагаемъ $x + y = 2s$, $x - y = 2t$. Затѣмъ получаемъ выраженія $x^2 + y^2$ и xy въ s и t, и подставляя ихъ въ оба предыдущія ур—нія, получаемъ два ур—нія въ s и t, которыя рѣшить не трудно.

569. Примѣръ VI. Рѣшить систему:

$$(x^3 + y^3)(x + y) = a(x^2 + y^2) \ldots (1) \qquad x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2) \ldots (2).$$

Множа данныя ур—нія соотвѣтственно на λ и μ и складывая почленно, находимъ въ первой части полиномъ

$$\lambda(x^3 + y^3)(x + y) + \mu(x^4 + y^4 - 3x^2y^2) \; . \; . \; . \; (3).$$

Опредѣлимъ λ и μ такъ, чтобы полиномъ (3) дѣлился на $x^2 + y^2$. Разсматривая $x^2 + y^2$ какъ произведеніе комплексовъ $x + yi$, $x - yi$, посмотримъ, каково д. б. соотношеніе между λ и μ, чтобы полиномъ (3) дѣлился на $x - yi$. Для этого надо, чтобы результатъ подстановки yi вмѣсто x въ этотъ полиномъ былъ нулемъ. Находимъ условіе: $2\lambda + 5\mu = 0$. Подстановка $x + yi$ дала бы тотъ же результатъ; слѣд., при λ и μ, удовлетворяющихъ этому условію, полиномъ (3) раздѣлится на $x^2 + y^2$. Можно взять, напр. $\lambda = 5$ и $\mu = -2$. Итакъ, умноживъ ур—нія (1) и (2) соотвѣтственно на 5 и -2 и сложивъ ихъ, получаемъ

$$(x^2 + y^2)[3(x^2 + y^2) + 5xy] = (5a - 2b)(x^2 + y^2).$$

Вопросъ приведенъ къ рѣшенію двухъ системъ:

$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = 0;$$
$$x^4 + y^4 - 3x^2y^2 = b(x^2 + y^2), \quad 3(x^2 + y^2) + 5xy = 5a - 2b.$$

Первая система даетъ: $x = y = 0$. Для рѣшенія второй полагаемъ: $x + y = u$, $xy = v$, и выражаемъ $x^2 + y^2$ и $x^4 + y^4$ черезъ u и v; такимъ обр. получаемъ два ур—нія

$$u^4 - bu^2 - 2(2u^2 - b)v - v^2 = 0, \quad 3u^2 - v = 5a - 2b;$$

исключивъ изъ нихъ v, найдемъ биквадратное ур. въ u.

ГЛАВА XXXVIII.

Уравненія кубичное и четвертой степени.

Рѣшеніе полнаго кубичнаго уравненія.

570. Выводъ формулы корней. Всякое кубичное уравненіе дѣленіемъ на коэффиціентъ при x^3 всегда можно представить въ видѣ

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Въ такомъ ур. всегда можно уничтожить членъ съ квадратомъ неизвѣстнаго, тѣмъ самымъ пріемомъ, какимъ уничтожали второй членъ въ квадратномъ ур—ніи. Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ вмѣсто x въ наше ур—ніе $y+h$, гдѣ y—новое неизвѣстное, а h—пока совершенно произвольное количество, и расположивъ члены по степенямъ y, найдемъ

$$y^3+(3h+a)y^2+(3h^2+2ah+b)y+h^3+ah^2+bh+c=0.$$

Пользуясь неопредѣленностью количества h, распорядимся имъ такъ, чтобы коэффиціентъ при y^2 обратился въ ноль; именно, положимъ $3h+a=0$, откуда $h=-\frac{a}{3}$; подставивъ въ послѣднее ур—ніе $-\frac{a}{3}$ вмѣсто h, и положивъ для краткости

$$-\frac{a^2}{3}+b=p,\quad -\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=q,$$

получимъ ур—ніе

$$y^3+py+q=0\ .\ .\ .\ (1)$$

которое и будемъ считать нормальною формою кубичнаго ур—нія.

Чтобы рѣшить это ур—ніе, положимъ

$$y=u+v,$$

гдѣ u и v пока произвольныя количества, связанныя только однимъ условіемъ, что сумма ихъ даетъ корень ур—нія (1). Подстановка въ это ур—ніе дастъ

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$

или

$$u^3+v^3+(u+v)(p+3uv)+q=0\ .\ .\ .\ (2),$$

т.-е. одно ур—ніе съ двумя неизвѣстными, которое, поэтому, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній: давая v какое-нибудь частное значеніе, получимъ ур. съ неизвѣстнымъ u, которое дастъ соотвѣтственное значеніе этого неизвѣстнаго. Изъ безчисленнаго множества способовъ удовлетворить этому ур—нію выберемъ слѣдующій, которымъ вопросъ приводится къ рѣшенію квадратнаго ур—нія и двухъ кубичныхъ.

Обратимъ въ нуль членъ $(u+v)(p+3uv)$. Въ этихъ видахъ нужно положить либо $u+v=0$, либо $p+3uv=0$. Но первое невозможно, такъ какъ въ этомъ случаѣ было бы и $y=0$, и ур—ніе (1) обратилось бы въ $q=0$, между тѣмъ какъ q отлично отъ нуля. Итакъ, должно положить $p+3uv=0$, или $uv=-\frac{p}{3}$, а слѣд. ур—ніе (2) дастъ $u^3+v^3=-q$. Такимъ образомъ рѣшеніе ур—нія (1) мы привели къ рѣшенію совмѣстныхъ ур—ній

$$uv=-\frac{p}{3}\ \text{и}\ u^3+v^3=-q;$$

найдя отсюда u и v, останется внести ихъ значенія въ формулу $y=u+v$, которая и дастъ y.

Чтобы рѣшить систему ур—ній съ неизвѣстными u и v, возвысимъ первое въ кубъ, такъ что получимъ

$$u^3\,.\,v^3=-\frac{p^3}{27},\quad u^3+v^3=-q,$$

откуда u^3 и v^3 найдемъ какъ корни квадратнаго ур—нія

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0\ .\ .\ .\ (3)$$

которое называется *резольвентомъ* (разрѣшающимъ) ур—нія (1) *); одно значеніе t дастъ u^3, другое v^3. Такимъ образомъ, рѣшая (3), найдемъ:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ldots (4) \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \ldots (5)$$

и слѣд. y, равный $u + v$, будетъ

$$y = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ldots (6).$$

Въ этой формулѣ, называемой *формулой Кардани*, и заключается рѣшеніе кубичнаго ур—нія. Названіе Кардановой присвоено ей вслѣдствіе того, что впервые обнародована была этимъ ученымъ, въ 1545 г., но найдена была *Тартальей*; впрочемъ, есть основанія къ предположенію, что рѣшеніе кубичнаго ур—нія найдено было еще ранѣе, въ 1505 г., *Сципіономъ Ферро*.

Въ правой части ур—нія (6) указана сумма двухъ кубичныхъ корней. Но мы знаемъ, что кубичный корень изъ даннаго числа имѣемъ 3 различныхъ значенія; слагая каждое значеніе перваго куб. корня съ каждымъ значеніемъ 2-го, мы, повидимому, должны найти 9 значеній для y, тогда какъ ур—ніе 3 степени не можетъ имѣть больше трехъ корней. Но это такъ и есть. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу ур—нія $uv = -\frac{p}{3}$, u и v нужно комбинировать въ такія пары, чтобы произведеніе ихъ давало $-\frac{p}{3}$. Эти пары можно найти такъ.

Если правую часть ур—нія (4) назовемъ для краткости A^3, то три значенія u, опредѣляемыя кубичнымъ ур—мъ $u^3 = A^3$, будутъ

$$u_1 = A, \quad u_2 = \omega A, \quad u_3 = \omega^2 A,$$

гдѣ A есть одинъ какой-либо изъ кубичныхъ корней числа A^3, а ω и ω^2 — два мнимые кубичные корня изъ 1. Точно также, если правую часть ур—нія (5) назовемъ B^3, и одинъ изъ кубичныхъ корней числа B^3 назовемъ B, то будемъ имѣть

$$v_1 = B, \quad v_2 = \omega B, \quad v_3 = \omega^2 B.$$

Если, теперь, одна пара значеній u и v, дающая въ произведеніи $-\frac{p}{3}$, будетъ A и B, то другою парою будетъ: ωA и $\omega^2 B$, потому что произведеніе $\omega A \,.\, \omega^2 B = \omega^3 AB = AB = -\frac{p}{3}$, ибо $\omega^3 = 1$; третья же пара будетъ $\omega^2 A$ и ωB, ибо $\omega^2 A \,.\, \omega B = \omega^3 AB = AB = -\frac{p}{3}$. Легко видѣть, что никакія другія сочетанія не дадутъ въ произведеніи $-\frac{p}{3}$, и сл. должны быть отброшены.

Итакъ, три корня кубичнаго ур—нія (1) будутъ

$$y' = A + B$$
$$y'' = \omega A + \omega^2 B$$
$$y''' = \omega^2 A + \omega B,$$

гдѣ A и B суть два кубичныхъ корня изъ A^3 и B^3, произведеніе которыхъ даетъ $-\frac{p}{3}$.

---

*) *Резольвентомъ* даннаго ур—нія называютъ ур—ніе, обладающее слѣдующими свойствами: 1) корни его могутъ быть найдены; 2) разъ эти корни найдены, можно вычислить и корни даннаго.

571. Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $x^3 + 12x + 63 = 0$.

Положивъ $x = u + v$, имѣемъ

$$u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv + 4) + 63 = 0.$$

Положивъ $uv + 4 = 0$, или $u^3v^3 = -64$, имѣемъ $u^3 + v^3 = -63$. Слѣдов., u^3 и v^3 будутъ корнями ур—нія $t^2 + 63t - 64 = 0$, изъ котораго

$$t' = 1, \quad t'' = -64; \quad \text{слѣд. } u^3 = 1, \quad v^3 = -64.$$

Итакъ:

$$x_1 = 1 - 4 = -3,$$

$$x_2 = 1 \cdot \omega - 4 \cdot \omega^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 5\sqrt{3} \cdot i}{2};$$

$$x_3 = 1 \cdot \omega^2 - 4 \cdot \omega = \frac{3 - 5\sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

Примѣчаніе. Вышеизложенный методъ рѣшенія кубичнаго ур—нія, принадлежащій Hudde, примѣнимъ ко всякому кубичному ур—нію, будутъ ли коэффиціенты p и q числа дѣйствит. или мнимыя.

572. Изслѣдованіе корней кубичнаго ур—нія для случая, когда коэффиціенты p и q дѣйствительны. —Нужно различать 3 случая, въ зависимости отъ знака количества $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

I. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Въ этомъ случаѣ $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ — количество дѣйствительное, слѣд. u^3 и v^3 также дѣйствительныя количества, а потому для u и v существуетъ по одному дѣйствительному значенію: назовемъ ихъ A и B. Такъ какъ произведеніе ихъ даетъ $-\frac{p}{3}$, то они образуютъ пару; и если замѣнить ω и ω^2 ихъ значеніями, то получатся слѣдующія 3 значенія для x:

$$x' = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

$$x'' = \mathrm{A}\omega + \mathrm{B}\omega^2 = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} + \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B})\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$x''' = \mathrm{A}\omega^2 + \mathrm{B}\omega = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2} - \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{B})\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Значеніе x' — дѣйствительно. Что касается двухъ остальныхъ значеній x, то они—мнимы и притомъ сопряженны, такъ какъ A — B не есть нуль; иначе A^3 и B^3 были бы равны, что противно условію. Итакъ: *когда* $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, *одинъ корень ур—нія* $x^3 + px + q = 0$ *дѣйствителенъ, два другіе—мнимые сопряженные.*

II. Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, u^3 и v^3 дѣлаются равными, слѣд. и дѣйствительныя значенія кубичныхъ корней изъ нихъ, A и B, равны, и именно $-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, слѣд.

$$x' = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

А какъ А = В, то два другіе корня, также дѣйствительные, равны между собою:

$$x'' = x''' = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Итакъ, *въ данномъ случаѣ всѣ три корня кубичнаго ур—нія дѣйствительны, причемъ два изъ нихъ равны между собою.*

III. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Такъ какъ $\frac{q^2}{4}$ есть количество положительное, то данный случай требуетъ, чтобы p было количествомъ существенно отрицательнымъ, и численное значеніе $\frac{p^3}{27}$ было бы больше $\frac{q^2}{4}$. Въ этомъ случаѣ u^3 и v^3 представляются подъ видомъ мнимыхъ сопряженныхъ выраженій, А и В также мнимы, слѣд. всѣ три корня, выражаемые Кардановой формулой, являются въ формѣ сложныхъ мнимыхъ выраженій. Но легко видѣть, что возможно такое кубическое ур—ніе, всѣ три корня котораго были бы дѣйствительные и неравные между собою. Таково, напр., кубичное ур—ніе $(x - 1)(x + 3)(x - 7) = 0$, корни котораго: $x' = 1$, $x'' = -3$ и $x''' = 7$ — дѣйствительные и неравные. А какъ изъ двухъ разсмотрѣнныхъ случаевъ въ первомъ только одинъ корень дѣйствителенъ, а во второмъ, хотя всѣ корни дѣйствительны, но два изъ нихъ равны между собою, то нужно ожидать, что дѣйствительные неравные корни должны получаться именно въ случаѣ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, хотя формула Кардана и даетъ ихъ въ видѣ мнимыхъ выраженій. Въ самомъ дѣлѣ, можно показать, что мнимость эта — только **кажущаяся. Пусть будутъ**

$$a + bi, \quad (a + bi) \cdot \omega, \quad (a + bi) \cdot \omega^2$$

три мнимыхъ кубичныхъ корня изъ u^3. Такъ какъ v^3 есть выраженіе мнимое, сопряженное выраженію u^3, то по § 429, примѣчаніе, кубичные корни изъ v^3 будутъ

$$a - bi, \quad (a - bi)\omega, \quad (a - bi) \cdot \omega^2.$$

Сочетать значенія перваго ряда съ значеніями втораго нужно такъ, чтобы произведеніе сочетаемыхъ значеній было дѣйствительно; слѣд., можно $a + bi$ сочетать съ $a - bi$, и такимъ образомъ три значенія x будутъ

$$(7) \begin{cases} x' = A + B = 2a \\ x'' = A\omega + B\omega^2 = -a + b\sqrt{3}, \\ x''' = A\omega^2 + B\omega = -a - b\sqrt{3}; \end{cases}$$

всѣ они—дѣйствительны. Кромѣ того, легко видѣть, что въ числѣ ихъ нѣтъ равныхъ. Во-первыхъ, нельзя положить $2a = -a \pm b\sqrt{3}$, ибо отсюда послѣдовательно имѣли бы: $b = \pm a\sqrt{3}$, $A = a(1 \pm i\sqrt{3})$, и $A^3 = a^3(1 \pm i\sqrt{3})^3$ — равенство невозможное, потому что первая часть, по предположенію, мнима, вторая же есть число дѣйствительное. Затѣмъ, нельзя имѣть $-a - b\sqrt{3} = -a + b\sqrt{3}$, ибо отсюда вышло бы $b = 0$, что невозможно, такъ какъ мнимое количество u^3 не можетъ имѣть дѣйствительнаго кубичнаго корня (§ 429, III). Итакъ:

Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, *всѣ три корня ур—нія* $x^3 + px + q = 0$ *числа дѣйствительныя и неравныя.*

Вычисленіе корней кубичнаго ур—нія.—Формула Кардана имѣетъ весьма существенные недостатки. Во-первыхъ, въ случаѣ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ дѣйствительный корень выражается посредствомъ радикаловъ даже тогда, когда онъ соизмѣримъ. Такъ, если взять Эйлеровъ примѣръ, ур—ніе $x^3 - 6x - 40 = 0$, то дѣйств. корень его, какъ легко видѣть, равенъ 4, тогда какъ по Кардановой формулѣ онъ выразится въ видѣ $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. Но еще важнѣе тотъ недостатокъ формулы Кардана, что при условіи $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ она даетъ корни въ мнимой формѣ, тогда какъ въ этомъ случаѣ всѣ 3 корня дѣйствительны. Если бы отъ этой мнимости мы захотѣли освободиться алгебраическими средствами, т. е. алгебраически вычислить количества a и b, которыхъ значенія позволяютъ вычислить x по формуламъ (7), то пришлось бы рѣшить кубичныя ур—нія того же вида, какъ и предложенное; ихъ дѣйств. корни, какъ и у даннаго ур—нія, были бы осложнены мнимыми количествами. Поэтому случай этотъ и названъ *неприводимымъ*. Но если мы предложимъ себѣ вычислить корни тригонометрически, то значенія x легко будетъ получить посредствомъ логарифмовъ. Итакъ, рѣшимъ ур—ніе тригонометрически, въ предположеніи $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Здѣсь p количество существенно отрицательное; если буквами p и q обозначить абсолютныя величины коэффиціентовъ, то ур—ніе будетъ

$$y^3-py\pm q=0,$$

гдѣ уже знаки окончательные, и $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$.

Для рѣшенія ур—нія съ + передъ q положимъ $y=r\,.\sin\varphi$, гдѣ r и φ пока неизвѣстны; ур—ніе будетъ (по раздѣленіи на r^3)

$$\sin^3\varphi-\frac{p}{r^2}\,.\,\sin\varphi+\frac{q}{r^3}=0\ .\ .\ .\ (8)$$

Какъ скоро можно будетъ для r и φ найти дѣйствительныя величины, удовлетворяющія этому ур—нію, то вопросъ будетъ рѣшенъ, ибо извѣстно будетъ и $y=r\sin\varphi$. Но такія значенія r и φ найти не трудно. Взявъ формулу, связывающую синусъ тройной дуги съ синусомъ простой

$$\sin^3\varphi-\frac{3}{4}\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 3\varphi=0,$$

усматриваемъ, что ур—ніе (8) будетъ удовлетворено, если взять

$$\frac{p}{r^2}=\frac{3}{4}\quad\text{и}\quad\frac{q}{r^3}=\frac{1}{4}\,.\,\sin 3\varphi.$$

Первое изъ этихъ ур—ній даетъ значеніе r:

$$r=2\sqrt{\frac{p}{3}}\ .\ .\ .\ (9).$$

Изъ второго имѣемъ

$$\sin 3\varphi=\frac{4q}{r^3}=\sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}\ .\ .\ .\ (10),$$

и какъ изъ даннаго условія имѣемъ $27q^2<4p^3$, то $\sin 3\varphi$ выражается правильною дробью, и потому всегда можно найти уголъ 3φ, котораго синусъ равенъ (10). Такимъ образомъ извѣстны будутъ r и φ, а слѣд. и y. Но одинаковый синусъ имѣютъ безчисленное множество угловъ: во-первыхъ, острый уголъ θ, а затѣмъ, углы

$$\pi-\theta,\ 3\pi-\theta,\ .\ .\ .\ .\ ;\ 2\pi+\theta,\ 4\pi+\theta,\ .\ .\ .$$

а слѣд. для φ будемъ имѣть $\frac{\theta}{3}$, и затѣмъ

$$\frac{\pi-\theta}{3},\quad \frac{3\pi-\theta}{3},\ \ldots;\quad \frac{2\pi+\theta}{3},\quad \frac{4\pi+\theta}{3},\ \ldots$$

Но легко видѣть, что различныхъ значеній для y получится только 3.

$$y_1 = r\,.\,\sin\frac{\theta}{3},\quad y_2 = r\,.\,\sin\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right),\quad y_3 = -r\,.\,\sin\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right),$$

или

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,\sin\frac{\theta}{3},\quad y_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,\sin\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right),\quad y_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\,.\,\sin\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right).$$

Итакъ, вычисляемъ острый уголъ θ по формулѣ (10), беремъ его треть и вносимъ въ послѣдния 3 формулы, которыя и дадутъ искомые 3 дѣйствительныхъ корня.

Въ случаѣ ур—нія $y^3 - py + q = 0$, найдемъ для r ту же формулу, а для угла θ ур—ніе

$$\sin 3\varphi = -\frac{4q}{r^3},$$

откуда для 3φ найдемъ отрицательное значеніе, слѣд. и корни получатся по абсолютному значенію тѣ же какъ и прежде, но знаки ихъ будутъ противоположны.

Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $y^3 - 39y + 70 = 0$.

Въ данномъ случаѣ $p = 39$, $q = 70$; слѣд., $r = 2\sqrt{13}$ и $\sin 3\varphi = \frac{35}{\sqrt{13^3}}$.

Таблицы дадутъ

$$\log\sin 3\varphi = 9{,}8731529,\quad \text{откуда}\quad 3\varphi = 48^0 18' 22'',77 = \theta,$$

и слѣд.,

$$\frac{\theta}{3} = 16^0 6' 7'',59,$$

$$60^0 - \frac{\theta}{3} = 43^0 53' 52'',41$$

$$60^0 + \frac{\theta}{3} = 76^0 6' 7'',59.$$

Найдя въ таблицахъ логариѳмы синусовъ этихъ трехъ угловъ, также $\log r$, получимъ

$$\log y_1 = 0{,}3010299,\qquad y_1 = +2;$$
$$\log y_2 = 0{,}6989700,\qquad y_2 = +5;$$
$$\log(-y_3) = 0{,}8450980,\qquad y_3 = -7.$$

Повѣрка. Для повѣрки достаточно сложить корни: сумма должна давать ноль, что въ данномъ случаѣ и имѣетъ мѣсто.

Указанный способъ повѣрки основывается на соотношеніи между коэффиціентами и корнями, къ разсмотрѣнію котораго и переходимъ.

573. Соотношенія между коэффиціентами и корнями кубичнаго уравненія $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Такъ какъ кубичное ур—ніе имѣетъ 3 корня, то его можно представить въ видѣ $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$, откуда, раскрывъ скобки и сравнивая съ даннымъ ур—мъ, найдемъ соотношенія

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a},$$

т.-е. сумма всѣхъ корней = взятому съ обратнымъ знакомъ частному отъ раздѣленія второго коэффиціента на 1-й; сумма парныхъ произведеній корней равна частному отъ раздѣленія третьяго коэффиціента на первый; а произведеніе всѣхъ корней = минусъ частному отъ раздѣленія послѣдняго коэффиціента на первый. Функціи корней, здѣсь разсматриваемыя, относятся къ такъ называемымъ *симметрическимъ функціямъ*, характеризующимся тѣмъ свойствомъ, что величина такихъ функцій не измѣняется отъ перестановки входящихъ въ нихъ буквъ одной на мѣсто другой, послѣдовательно, комбинируя ихъ попарно. Легко, въ самомъ дѣлѣ, провѣрить, что ни величина, ни знакъ этихъ функцій не перемѣняется отъ перемѣны x_1 на x_2, x_2 на x_1 и т. д.

Рѣшеніе полнаго уравненія четвертой степени.

574. Предложено было нѣсколько способовъ рѣшенія ур—нія 4-й степени; и во всѣхъ этихъ методахъ нахожденіе корней ур—нія 4-й степени зависитъ отъ предварительнаго рѣшенія *кубичнаго* уравненія. Впервые общее рѣшеніе ур—нія 4-й степени найдено было *Феррари*, ученикомъ Кардано, и это рѣшеніе, равно какъ и рѣшеніе, данное *Декартомъ*, принадлежатъ къ простѣйшимъ.

575. Способъ Феррари.—Чтобы рѣшить ур—ніе

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

придадимъ къ обѣимъ частямъ $(ax+b)^2$, вслѣдствіе чего найдемъ

$$x^4+px^3+(q+a^2)x^2+(r+2ab)x+s+b^2=(ax+b)^2,$$

и опредѣлимъ a и b такъ, чтобы 1-я часть сдѣлалась точнымъ квадратомъ нѣкотораго тринома $x^2+\frac{p}{2}x+\lambda$. Сравненіе коэффиціентовъ покажетъ, что это будетъ достигнуто, какъ скоро будутъ удовлетворены ур—нія

$$2\lambda+\frac{p^2}{4}=q+a^2,\quad p\lambda=r+2ab \quad \text{и} \quad \lambda^2=s+b^2.$$

Исключая a и b, получимъ для опредѣленія λ кубичное уравненіе

$$8\lambda^3-4q\,.\,\lambda^2+2(pr-4s)\lambda-p^2s+4qs-r^2=0,$$

которое всегда, какъ извѣстно, имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ дѣйствительный корень; найдя этотъ корень, мы будемъ знать a и b. Такимъ образомъ найдемъ уравненіе

$$\left(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda\right)^2=(ax+b)^2,$$

откуда

$$x^2+\frac{p}{2}x+\lambda=\pm(ax+b),$$

гдѣ a, b, λ извѣстны, и слѣд. всѣ 4 корня x найдены будутъ изъ квадратныхъ ур—ній

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = ax + b \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{p}{2}x + \lambda = -ax - b,$$

и задача рѣшается вполнѣ.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$.

Придавая къ обѣимъ частямъ $(ax + b)^2$, найдемъ

$$x^4 - 2x^3 + (a^2 - 5)x^2 + 2(ab + 5)x + b^2 - 3 = (ax + b)^2.$$

Приравнявъ первую часть $(x^2 - x + \lambda)^2$, сравненіемъ коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x получимъ

$$a^2 - 6 = 2\lambda, \quad ab + 5 = -\lambda, \quad b^2 - 3 = \lambda^2,$$

откуда, исключивъ a и b, имѣемъ

$$2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 7 = 0;$$

испытаніе $+1$ и -1 покажетъ, что $\lambda = -1$; отсюда

$$a^2 = 4, \; ab = -4, \; b^2 = 4;$$

такъ что можно положить

$$(x^2 - x - 1)^2 = (2x - 2)^2, \quad \text{или} \quad x^2 - x - 1 = \pm(2x - 2).$$

Рѣшая полученныя два квадратныхъ уравненія, имѣемъ

$$x_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}), \quad x_4 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}).$$

576. Способъ Декарта.—Въ 1637 году Декартъ далъ слѣдующій способъ рѣшенія ур—нія 4-й степени, подобно предыдущему основанный также на способѣ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, имъ же изобрѣтенномъ. Освободивъ отъ коэффиціента при x^4 и отъ члена съ кубомъ x, т.-е. приведя ур—ніе къ виду

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

предположимъ, что оно рѣшено и что первая часть разложена на двучленные множители. Если соединить эти множители попарно, то можно представить себѣ первую часть приведенною къ произведенію

$$(x^2 + mx + n)(x^2 + m'x + n').$$

Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, найдемъ для опредѣленія неопредѣленныхъ коэффиціентовъ m, n, m', n' ур—нія

$$m + m' = 0 \,.\,.\,.\, (1) \quad mm' + n + n' = p \,.\,.\,.\, (2) \quad mn' + m'n = q \,.\,.\,.\, (3) \quad nn' = r \,.\,.\,.\, (4).$$

Подставляя $m' = -m$ въ остальныя ур—нія, получимъ

$$-m^2 + n + n' = p \,.\,.\,.\, (5) \quad m(n' - n) = q \,.\,.\,.\, (6) \quad nn' = r \,.\,.\,.\, (7).$$

Изъ (5) и (6) имѣемъ

$$n = \frac{1}{2}\left(m^2 + p - \frac{q}{m}\right), \quad n' = \frac{1}{3}\left(m^2 + p + \frac{q}{m}\right).$$

и внеся въ (7), получаемъ

$$\frac{1}{4}\left[(m^2 + p)^2 - \frac{q^2}{m^2}\right] = r,$$

или

$$m^6 + 2pm^4 + (p^2 - 4r)m^2 - q^2 = 0,$$

третьей степени отн. m^2. Рѣшивъ это ур., найдемъ m, а затѣмъ m', n и n', послѣ чего останется рѣшить два квадратныхъ ур—нія $x^2 + mx + n = 0$ и $x^2 + m'x + n' = 0$, которыя и дадутъ 4 искомыхъ корня предложеннаго.

Примѣръ. Рѣшить ур—ніе $x^4 - 12x^2 + 21x - 10 = 0$.

Поступая указаннымъ образомъ, найдемъ, что разрѣшающее кубичное ур. будетъ (положивъ $m^2 = z$):

$$z^3 - 24z^2 + 184z - 441 = 0,$$

или, положивъ для уничтоженія члена съ z^2, $z = k + h$, найдемъ

$$k^3 - 8k + 7 = 0 \quad \text{и} \quad h = 8.$$

Это куб. ур., очевидно, имѣетъ корень $k = + 1$; слѣд. $z = 9$, откуда $m = \pm 3$. Взявъ $m = 3$, найдемъ $m' = - 3$, $n = - 5$, $n' = + 2$. Такимъ образомъ, квадратныя ур—нія, на которыя распадается данное, будутъ

$$x^2 + 3x - 5 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Рѣшая ихъ, найдемъ всѣ 4 корня предложеннаго ур—нія:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}\left[-3 + \sqrt{29}\right], \quad x_4 = \frac{1}{2}\left[-3 - \sqrt{29}\right].$$

577. Соотношенія между коэффиціентами и корнями уравненія 4-й степени. — Ур—ніе 4-й степени имѣетъ 4 корня, слѣд. его можно представить въ формѣ

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0.$$

Раскрывъ скобки и сравнивая съ даннымъ ур—ніемъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

найдемъ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a},$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}.$$

Таковы соотношенія между коэффиціентами и корнями ур—нія 4-й степени. Легко замѣтить ихъ аналогію съ подобными же свойствами для ур—ній квадратнаго и кубическаго, и нетрудно выразить эти соотношенія словами.

578. Теорема. *Во всякомъ ур—ніи съ дѣйствительными коэффиціентами мнимые корни входятъ попарно.*

Пусть данное ур. съ дѣйствительными коэффиціентами есть $f(x) = 0$, и положимъ, что оно имѣетъ мнимый корень $a + bi$. Докажемъ, что мнимое сопряженное $a - bi$ будетъ также корнемъ этого ур—нія.

Составивъ произведеніе $[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$, или $(x-a)^2+b^2$, раздѣлимъ $f(x)$ на $(x-a)^2+b^2$, и пусть частное будетъ Q, а возможный остатокъ $Rx+R'$; имѣемъ

$$f(x)=Q[(x-a)^2+b^2]+Rx+R'.$$

Положимъ въ этомъ тождествѣ $x=a+bi$. Такъ какъ $a+bi$, по предположенію, есть корень даннаго ур—нія, то $f(x)$ обратится при этой подстановкѣ въ нуль; $(x-a)^2+b^2$ также обращается въ нуль; слѣд. остается: $R(a+bi)+R'=0$. Приравнивая нулю дѣйствительную и мнимую части, имѣемъ

$$Ra+R'=0,\quad Rb=0.$$

Но b, по условію, не есть нуль, слѣд. $R=0$; а потому и $R'=0$. Заключаемъ, что остатокъ обращается въ нуль, т.-е. что $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^2+b^2$, или на $[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$, это значитъ, что $x-(a-bi)$ входитъ множителемъ въ $f(x)$, которая, так. обр., при $x=a-bi$ обращается въ нуль: $a-bi$ есть также корень ур—нія $f(x)=0$.

Изъ этой теоремы, по отношенію къ кубичному ур—нію, слѣдуетъ, что оно не можетъ имѣть трехъ мнимыхъ корней: имѣя два мнимыхъ корня, третій корень всегда дѣйствителенъ. Слѣд., кубичное ур. всегда имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ дѣйствительный корень.

Кромѣ того, эта теорема облегчаетъ вычисленіе корней куб. ур—нія. Разъ мы нашли одинъ мнимый корень, другой нѣтъ надобности вычислять особо: слѣдуетъ прямо написать мнимое, сопряженное найденному корню.

579. Мы убѣдились, что для всякаго уравненія 3-й и 4-й степени, взятаго въ общемъ видѣ (т.-е. съ буквенными коэффицентами) можно найти рѣшенія въ алгебраической формѣ, т.-е. выразить корни посредствомъ радикаловъ. Если же степень уравненія, взятаго въ общемъ видѣ, будетъ выше четвертой, то Норвежскій ученый *Абель* доказалъ невозможность алгебраическаго рѣшенія такихъ ур—ній (т.-е. невозможность выразить ихъ корни въ радикалахъ). Но въ случаѣ ур—ній съ численными коэффицентами всегда можно вычислить ихъ дѣйствительные корни съ какою угодно точностью, какова бы ни была степень уравненія.

ГЛАВА XXXIX.

Численные вопросы высшихъ степеней.

580. Когда отвѣтъ на вопросъ, приводящій къ квадратному уравненію, выражается мнимыми корнями, это служитъ признакомъ невозможности задачи. Если же корни дѣйствительны, то могутъ имѣть мѣсто слѣдующіе случаи:

1. Оба корня положительны. Тогда задача допускаетъ два рѣшенія, если только корни неравны; въ случаѣ равныхъ корней вопросъ имѣетъ одно рѣшеніе. Однако же, если одно или оба значенія неизвѣстнаго выходятъ изъ тѣхъ предѣловъ, между которыми, по смыслу вопроса, должно заключаться неизвѣстное, то вопросъ имѣетъ или одно рѣшеніе, или же невозможенъ.

2. Если одно или оба значенія неизвѣстнаго будутъ отрицательны, то всегда можно составить такое уравненіе, котораго корни равны, но противоположны корнямъ даннаго: нужно только въ ур—ніе задачи подставить $-x$ вмѣсто x. Если окажется возможнымъ подобрать задачу, слегка разнящуюся отъ предложенной и отвѣчающую видоизмѣненному ур—нію, этимъ путемъ значеніе отрицательнаго корня и будетъ истолковано.

Эти замѣчанія относятся и къ уравненіямъ второй степени съ нѣсколькими неизвѣстными. Въ поясненіе сказаннаго привожу примѣры.

Задача I. *Два торговца продали нѣсколько головъ рогатаго скота за 1350 р.; первый на 5 головъ больше второго. Если бы первый продалъ столько головъ, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первый получилъ бы 540 р., а второй 840 р. Сколько головъ продалъ каждый и по какой цѣнѣ?*

Пусть будетъ x—число головъ, проданныхъ первымъ; тогда число головъ, проданныхъ вторымъ, будетъ $x - 5$. Первый за $x - 5$ головъ получилъ бы 540 р.; слѣд. за одну голову онъ получалъ по $\frac{540}{x-5}$ р., а за x головъ выручилъ $\frac{540x}{x-5}$ р. Второй за x головъ получилъ бы 840 р., слѣд. онъ бралъ за одну голову $\frac{840}{x}$ р., а за $x - 5$ головъ получилъ $\frac{840(x-5)}{x}$ р. Слѣд. оба продали скота на $\frac{540x}{x-5} + \frac{840(x-5)}{x} = 1350$ р.

По освобожденіи отъ дробей и по упрощеніи находимъ ур—ніе $x^2 - 55x + 700 = 0$, откуда: $x' = 35$; $x'' = 20$. Слѣд. $x' - 5 = 30$; $x'' - 5 = 15$.

Итакъ, *задача имѣетъ два рѣшенія:* 1-й продалъ 35 головъ по 18 р. за голову, а второй 30 головъ по 24 рубля за голову (въ самомъ дѣлѣ, $18 \times 35 + 24 \times 30 = 630 + 720 = 1350$); или же: 1-й продалъ 20 головъ по 36 р., а 2-й 15 по 42 р., что опять составляетъ 1350 р.

Задача II. *Отданъ въ банкъ капиталъ и черезъ годъ получено прибыли 200 р. Капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами былъ оставленъ въ банкѣ еще на годъ. Послѣ этого капиталъ съ наросшими на него процентными деньгами составлялъ 2420 р. Какъ великъ былъ первоначальный капиталъ?*

Пусть первоначальный капиталъ былъ x р. Черезъ годъ онъ обратился въ $x + 200$ р., слѣд. принесъ $\frac{20000}{x}$ процентовъ. Въ концѣ второго года этотъ капиталъ, принося $\frac{20000}{x}$ %, обратился въ $(x + 200)\left(1 + \frac{200}{x}\right) = 2420$ р.

Освободивъ отъ дробей и упростивъ, имѣемъ ур. $x^2 - 2020x + 40000 = 0$, откуда: $x' = 2000$ р.; $x'' = 20$ р. Такимъ образомъ опять получили два положительныхъ корня: вычисляя проценты, приносимые этими капиталами, находимъ, что первый даетъ 10%, второй 1000%. Такъ какъ въ дѣйствительности банки не даютъ такихъ высокихъ процентовъ, какъ 1000%, то заключаемъ, что корень $x'' = 20$ р. не м. б. допущенъ, и задача имѣетъ одно рѣшеніе: $x' = 2000$ р.

Задача III. *Нѣкто купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 240 руб.; если бы за ту же сумму онъ получилъ 3-мя аршинами менѣе, то аршинъ обошелся бы 4-мя рублями дороже. Сколько аршинъ сукна куплено?*

Пусть куплено было x арш.; цѣна 1 арш. равна, слѣдоват., $\frac{240}{x}$ р. Если бы за ту же сумму онъ получилъ 3-мя арш. меньше, т.-е. $x - 3$ аршина, то цѣна аршина была бы $\frac{240}{x}+4$; а всѣ $x-3$ аршина стоили бы опять 240 р.; слѣд. ур—ніе будетъ

$$\left(\frac{240}{x}+4\right)(x-3)=240\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Приведя его къ виду $x^2-3x-180=0$ и рѣшивъ, найдемъ два корня: $x'=15$, $x''=-12$. Положительный корень, какъ не трудно убѣдиться, даетъ прямой отвѣтъ на задачу. Что касается отрицательнаго корня: -12, онъ не можетъ представлять отвѣта на данную задачу, ибо неизвѣстное (число купленныхъ аршинъ сукна), по существу своему, положительно. Но мы можемъ попытаться *истолковать* это рѣшеніе, т.-е. подыскать задачу, аналогичную данной, отвѣтомъ на которую служила бы абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія.

Для этого въ первоначальное ур—ніе (1) вмѣсто x подставимъ $(-x)$; получимъ $\left(\frac{240}{-x}+4\right)(-x-3)=240$, или, умноживъ оба множителя 1-й части на (-1):

$$\left(\frac{240}{x}-4\right)(x+3)=240\ .\ .\ .\ (2).$$

Мы уже знаемъ, что рѣшенія этого ур—нія суть: $x'=-15$, $x''=+12$, равныя рѣшеніямъ ур—нія (1), но съ противоположными знаками. Положительное рѣшеніе $+12$ будетъ служить отвѣтомъ на задачу, соотвѣтствующую уравненію (2): задача эта, очевидно, такова: «нѣкто купилъ нѣсколько аршинъ сукна за 240 р.: если бы за ту же сумму онъ получилъ 3-мя аршинами *больше*, то аршинъ обошелся бы 4-мя рублями *дешевле*. Сколько аршинъ онъ купилъ?» Отвѣтомъ на эту задачу и служитъ число 12 аршинъ.

Задача IV. *Нѣкоторое число* N *есть произведеніе трехъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ; раздѣливъ* N *послѣдовательно на каждое изъ этихъ чиселъ и сложивъ частныя, находимъ въ суммѣ* 239. *Найти* N?

Пусть 3 послѣдовательныя искомыя нечетныя числа будутъ $2x-1$, $2x+1$, $2x+3$; $N=(2x-1)(2x+1)(2x+3)$. Ур—ніе задачи будетъ:

$$(2x+1)(2x+3)+(2x-1)(2x+3)+(2x-1)(2x+1)=239,\ \ldots\ (1),$$

или, по выполненіи всѣхъ дѣйствій и по упрощеніи: $x^2+x=20$, откуда: $x'=4$, $x''=-5$.

Положительное рѣшеніе даетъ для трехъ искомыхъ чиселъ: 7, 9 и 11. Повѣрка: $9\times11+7\times11+7\times9$ дѣйствительно $=239$.

Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія подставляемъ въ первоначальное ур. (1) $-x$ вмѣсто x, находимъ: $(1-2x)(3-2x)+(-2x-1)(3-2x)+(-2x-1)(1-2x)=239$, или, перемѣнивъ въ каждомъ членѣ знаки обоихъ множителей, находимъ ур—ніе

$$(2x-1)(2x-3)+(2x+1)(2x-3)+(2x+1)(2x-1)=239,$$

корни котораго суть: -4 и $+5$. Взявъ корень $+5$, находимъ, что искомыя числа суть: $2x-3=7$; $2x-1=9$; $2x+1=11$. Такимъ образомъ, рѣшеніе $x=5$ даетъ тотъ же отвѣтъ, что и $x=3$, требуя только, чтобы искомыя числа были обозначены формулами $2x-3$, $2x-1$ и $2x+1$ вмѣсто того, чтобы обозначать ихъ знаками $2x-1$, $2x+1$ и $2x+3$. Но и то и другое обозначенія одинаково возможны, и замѣчательно, что алгебра показываетъ намъ a posteriori, что все равно, какое изъ этихъ обозначеній мы примемъ.

Задача V. *Мужчины и женщины, въ числѣ 32 лицъ, работаютъ на фабрикѣ, причемъ каждый мужчина зарабатываетъ въ день 2-мя рублями больше, нежели каждая женщина; не смотря на это, ежедневный заработокъ всѣхъ мужчинъ таковъ же, какъ и заработокъ женщинъ, и составляетъ 60 р. Найти число мужчинъ?*

Пусть мужчинъ было x; число женщинъ будетъ $32-x$. Каждый мужчина зарабатываетъ въ день $\frac{60}{x}$, каждая женщина $\frac{60}{32-x}$ р. Уравненіе задачи будетъ:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{32-x}=2\ .\ .\ .\ (1).$$

Окончательное ур—ніе $x^2-92x+960=0$ даетъ: $x'=80$, $x''=12$; слѣд. $32-x'=-48$; $32-x''=20$.

Рѣшеніе $x''=12$ для числа мужчинъ, дастъ число женщинъ 20; причемъ ежедневный заработокъ мужчины составляетъ $60:12$ или 5 руб.; заработокъ женщины $=60:20=3$ р. Слѣд. это рѣшеніе удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ задачи.

Но рѣшеніе $x=80$ для числа мужчинъ, будучи больше числа лицъ обоего пола (32), даетъ къ тому же для числа женщинъ отрицательное количество -48; слѣдов. второе рѣшеніе не соотвѣтствуетъ предложенному вопросу. Для истолкованія этого рѣшенія положимъ $32-x=y$, откуда $x=32-y$, и подставимъ эти величины въ ур. (1); найдемъ ур. $\frac{60}{32-y}-\frac{60}{y}=2$, которому удовлетворяетъ $y=-48$; подставивъ $(-y)$ вмѣсто y, получаемъ ур—ніе

$$\frac{60}{32+y}+\frac{60}{y}=2\ .\ .\ .\ (2),$$

изъ котораго y (число женщинъ) $=48$, а $32+y$ (число мужчинъ) $=80$. Эти положительныя рѣшенія отвѣчаютъ на задачу, соотвѣтствующую ур—нію (2); задача эта такова: «мужчины и женщины работаютъ на фабрикѣ, причемъ *число мужчинъ 32 больше числа женщинъ; мужчина и женщина зарабатываютъ вмѣстѣ 2 р. въ день;* всѣ мужчины зарабатываютъ въ день 60 руб.; столько же и женщины. Найти *число женщинъ?»* Отвѣтъ: 80 мужчинъ, зарабатывающихъ по 75 к. въ день, и 48 женщинъ, получающихъ по 1 р. 25 к. въ день.

Задача VI *Нѣкто, имѣя капиталъ въ 120000 р., раздѣлилъ его на двѣ части, которыя помѣстилъ подъ проценты. Первая часть даетъ ему ежегоднаго дохода 2800 руб.; вторая, принося 1 процентомъ больше, даетъ дохода 2500 р. въ годъ. Каковы обѣ части, и по сколько процентовъ онѣ приносятъ?*

Пусть первая часть приноситъ $x\%$: въ такомъ случаѣ 1 р. прибыли получится со $\frac{100}{x}$ р., а 2800 р. прибыли получится съ $\frac{280000}{x}$ р. Разсуждая такимъ же образомъ, найдемъ, что вторая часть капитала равна $\frac{250000}{x+1}$ руб. А какъ сумма обѣихъ частей равна 120000 р., то имѣемъ ур—ніе

$$\frac{280000}{x}+\frac{250000}{x+1}=120000,$$

или $12x^2-41x-28=0$, откуда: $x'=4$, $x''=-\frac{7}{12}$.

Положительное рѣшеніе $+4$ дастъ прямой отвѣтъ на вопросъ, и показываетъ, что вторая часть приноситъ $5^0/_0$. Слѣд. 1-я часть $=\frac{280000}{4}=70000$ р.; 2-я часть $=\frac{250000}{5}=50000$ р. Сумма ихъ дѣйствительно составляетъ 120000 р.

Истолкованіе отрицательнаго рѣшенія, $-\frac{7}{12}$, повело бы къ условіямъ, несовмѣстнымъ съ понятіемъ о процентѣ; потому рѣшеніе это должно быть прямо отброшено. Полученіе посторонняго рѣшенія зависитъ отъ того, что ур—ніе, къ которому привела частная задача, общѣе этой послѣдней; оно отвѣчаетъ на всѣ вопросы, которые привели бы къ тому же ур—нію, какъ и разсматриваемый частный вопросъ, и которыхъ безчисленное множество. Поэтому неудивительно, что одно изъ рѣшеній этого ур—нія чуждо частному вопросу.

ЗАДАЧА VII. *Вакхъ, заставъ Силена спящимъ около бочки, наполненной виномъ, сталъ пить въ продолженіи $\frac{3}{5}$ того времени, въ какое Силенъ могъ бы выпить всю бочку. Послѣ этого Силенъ проснулся и выпилъ оставшееся вино. Если бы Вакхъ и Силенъ пили вмѣстѣ, то они выпили бы всю бочку 6-ю часами скорѣе, и на долю Вакха пришлось бы только $\frac{2}{3}$ того, что онъ на самомъ дѣлѣ оставилъ Силену. Во сколько часовъ каждый изъ нихъ можетъ выпить цѣлую бочку?*

Означимъ время, въ которое Вакхъ можетъ выпить всю бочку, черезъ $3x$, а время, въ которое Силенъ можетъ выпить ту же бочку, черезъ $5y$. Сначала Вакхъ пьетъ въ продолженіи $3y$ часовъ, и какъ въ одинъ часъ онъ выпиваетъ $\frac{1}{3x}$ бочки, то въ $3y$ часовъ выпьетъ $\frac{y}{x}$ бочки. Затѣмъ, легко видѣть, что вмѣстѣ они выпили бы всю бочку въ $\frac{15xy}{3x+5y}$ час. Вакхъ оставилъ Силену $1-\frac{y}{x}$ бочки, и слѣд. послѣдній пилъ вино въ продолженіе $\left(1-\frac{y}{x}\right).5y$ часовъ: поэтому оба они пили въ теченіе $3y+\left(1-\frac{y}{x}\right).5y$ или $\frac{(8x-5y)y}{x}$ часовъ. Приравнявъ разность временъ, указанную въ условіи, 6 часамъ, получимъ ур—ніе

$$\frac{(8x-5y)y}{x}-\frac{15xy}{3x+5y}=6.$$

Выразимъ теперь, что количество вина, выпитаго Вакхомъ, было бы во второмъ случаѣ равно $\frac{2}{3}$ того, что онъ на самомъ дѣлѣ оставилъ Силену. Такъ какъ Вакхъ выпиваетъ въ часъ $\frac{1}{3x}$ бочки, то въ $\frac{5xy}{3x+5y}$ часовъ, въ теченіи которыхъ онъ пилъ бы во второмъ случаѣ, онъ выпилъ бы часть бочки, равную $\frac{5y}{3(3x+5y)}$. Такимъ образомъ второе ур—ніе будетъ:

$$\frac{5y}{3(3x+5y)} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{y}{x}\right).$$

Освободивъ ур—нія отъ дробей, дадимъ имъ видъ

$$25xy^2 - 25y^2 + 9xy - 18x^2 - 30xy = 0$$
$$10y^2 + 11xy - 6x^2 = 0,$$

откуда $x = 5$, $y = 2$; слѣд. искомыя числа часовъ суть 15 и 10.

ГЛАВА XL.

Изслѣдованіе измѣненія нѣкоторыхъ функцій. Maxima и minima.

581. Предварительныя свѣдѣнія и опредѣленія. Количество наз. *перемѣннымъ*, если оно можетъ измѣнять свою величину; перемѣнное наз. *независимымъ*, если его измѣненія произвольны; если же измѣненія перемѣннаго y зависятъ отъ другаго перемѣннаго x, такъ что каждому значенію x соотвѣтствуетъ одно или нѣсколько совершенно опредѣленныхъ значеній перемѣннаго y, то y наз. *зависимымъ* перемѣннымъ или *функціей* перемѣннаго x. Такъ, окружность и площадь круга, измѣняясь съ измѣненіемъ радіуса, суть функціи радіуса, который въ данномъ случаѣ играетъ роль независимаго перемѣннаго; площадь треугольника есть функція основанія и высоты; объемъ прямоугольнаго параллелепипеда есть функція трехъ его измѣреній и т. п. Чтобы обозначить, что y есть функція x, пишутъ: $y = f(x)$.

Функція непрерывная. Если измѣнять x отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ постепенно, такъ чтобы это перемѣнное принимало послѣдовательно всѣ промежуточныя значенія между α и β, то если при этомъ $f(x)$ остается дѣйствительною, конечною, а ея приращенія сами могутъ быть сдѣланы какъ угодно малыми,— она наз. функціею *непрерывною* между α и β.

Итакъ, чтобы $f(x)$ была непрерывна въ интервалѣ отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$, она должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) не имѣть въ этомъ интервалѣ мнимыхъ значеній, 2) не обращаться въ $\pm\infty$; 3) когда x-су даемъ безконечно малое приращеніе, то и соотвѣтствующее приращеніе функціи д. б. безконечно-мало. Другими словами, непрерывная функція не должна переходить отъ одного своего значенія къ другому скачками, не проходя всѣхъ промежуточныхъ значеній. Напр., такая функція не можетъ изъ положительной сдѣлаться отрицательною, не проходя черезъ нуль. Если независимое перемѣнное x непрерывно измѣнять отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$, то сама функція, предполагая, что она въ этомъ интервалѣ непрерывна, можетъ измѣняться, или постоянно возрастая, или постоянно убывая, или—то возрастая, то убывая.

Maxima и minima. Когда функція, сначала возраставшая, начинаетъ уменьшаться, то въ самый моментъ перехода отъ увеличенія къ уменьшенію она принимаетъ значеніе большее сосѣднихъ; это значеніе наз. *наибольшимъ значеніемъ* или *maximum*'омъ функціи. Наоборотъ, если функція, сначала уменьшавшаяся, начинаетъ потомъ увеличиваться, то въ самый моментъ перехода отъ уменьшенія къ увеличенію она принимаетъ значеніе, меньшее непосредственно предшествовавшихъ и непосредственно слѣдующихъ; такое значеніе наз. ея *наименьшею величиною* или *minimum*'омъ.

Пусть γ будетъ то значеніе x, содержащееся между α и β, при которомъ функція принимаетъ значеніе c, и пусть h будетъ положительное количество, какъ угодное близкое къ нулю. Если эта функція при возрастаніи x отъ $\gamma-h$ до γ возрастала, а затѣмъ при увеличеніи x отъ γ до $\gamma+h$ идетъ убывая, то c и есть maximum функціи при $x=\gamma$. Наоборотъ, если функція уменьшалась при возрастаніи x отъ $\gamma-h$ до γ, затѣмъ увеличивается при возрастаніи x отъ γ до $\gamma+h$, то c и будетъ minimum'омъ функціи при $x=\gamma$. Maxima и minima, какъ мы ихъ только что опредѣлили, не слѣдуетъ смѣшивать съ *самою большою* или съ *самою меньшею величиною* функціи. Во многихъ вопросахъ независимое перемѣнное не можетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$, т.-е. черезъ всю область дѣйствительныхъ чиселъ, но въ своихъ измѣненіяхъ бываетъ ограничено конечными предѣлами, и если въ тотъ моментъ, какъ независимое перемѣнное x достигло своего предѣла, функція получаетъ значеніе большее или меньшее прежнихъ своихъ значеній, то это самое большее или самое меньшее ея значеніе не составляютъ maximum'а или minimum'а въ выше опредѣленномъ смыслѣ, такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ не можетъ быть сравненія этихъ значеній съ непосредственно слѣдующими: послѣднихъ не существуетъ. Такъ функція $\sqrt{1-x}$ дѣйствительна только для x, не превышающихъ 1; и если измѣнять x отъ $-\infty$ до $+1$, то функція будетъ идти уменьшаясь отъ ∞ до 0, котораго она достигаетъ при $x=1$; здѣсь 0 есть самое меньшее значеніе функціи, но не есть *minimum* въ выше-опредѣленномъ смыслѣ, ибо при $x>1$ функція уже становится мнимою, сл. ея значенія не могутъ быть сравниваемы съ предшествующими.

Эти особыя maxima и minima иногда называются *абсолютными*, въ отличіе отъ наибольшихъ или наименьшихъ значеній функціи по сравненію съ сосѣдними, называемыхъ *относительными*.

Въ виду сказаннаго, нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что одна и та же функція можетъ имѣть нѣсколько относительныхъ maxima или minima, или въ томъ, что относит. minimum функціи можетъ быть больше ея maximum'а.

Разрывъ непрерывности. Нѣкоторыя функціи (не цѣлыя относительно x) могутъ для нѣкоторыхъ значеній перемѣннаго x претерпѣвать разрывъ непрерывности.

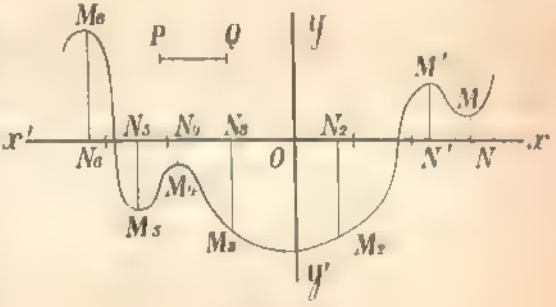
Такъ, функція $\frac{1}{2x-3}$ обращается въ ∞ при $x=\frac{3}{2}$; въ этомъ случаѣ говорятъ, что она непрерывна при всякомъ значеніи x, кромѣ $x=\frac{3}{2}$; при $x=\frac{3}{2}$, обращаясь въ ∞, функція теряетъ свойство непрерывности.

Функція $\sqrt{x^2-5x+6}$, которую можно представить въ видѣ $\sqrt{(x-2)(x-3)}$, также не при всякомъ x непрерывна. Въ самомъ дѣлѣ, теорема о знакѣ квадратнаго тринома показываетъ, что триномъ x^2-5x+6 остается положительнымъ при всякомъ x, не содержащемся между его корнями 2 и 3; но при $2<x<3$ становится отрицательнымъ, а функція мнимою. Слѣд. послѣдняя непрерывна для всякаго x, заключающагося между $-\infty$ и $+2$, а также между 3 и $+\infty$; и теряетъ непрерывность при всякомъ x, лежащемъ между 2 и 3.

582. Графическое изображеніе измѣненій функціи. Измѣненія функціи можно сдѣлать наглядными, слѣдующимъ пріемомъ.

Пусть данная функція будетъ $f(x)$; изображая ее буквою y, получимъ уравненіе $y = f(x)$ . . . (1)

Начертивъ двѣ перпендикулярныя прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ O: xx' и yy', и принявъ произвольную прямую PQ за единицу, будемъ изображать величины независимаго перемѣннаго x прямыми, наносимыми на оси xx', вправо отъ точки O, если x положительно, и влѣво, если x отрицательно. Такъ, если $x = +3$, то отложивъ вправо отъ O три раза линію PQ, получимъ прямую ON, которая и изобразитъ $x = +3$. Взявъ $x = -1$, должны отложить линію PQ разъ влѣво отъ точки O: прямая ON_3 изобразитъ $x = -1$. Разстоянія ON, ON_3, называются ***абсциссами***.



Черт. 57.

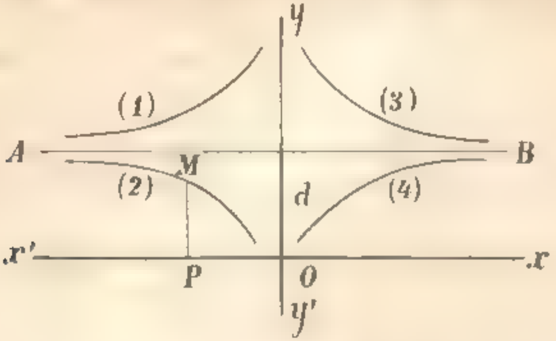
Для всякаго даннаго x можно вычислить величину функціи (т.-е. y), подставивъ вмѣсто x его величину въ ур—ніи (1). Пусть, напр., при $x = +3$ получится $y = +0,7$. Возставивъ въ точкѣ N перпендикуляръ къ линіи xx' вверхъ, отложимъ на немъ линію NM, равную 0,7 PQ. Линія NM и изобразитъ на чертежѣ величину данной функціи, соотвѣтствующую величинѣ $+3$ независимаго перемѣннаго. Подставивъ въ ур. (1) вмѣсто x другое число, напр., -1, получимъ, напр., $y = -3$. Возставивъ въ точкѣ N_3 перпендикуляръ къ линіи xx' внизъ, отложимъ на немъ прямую $N_3M_3 = 3PQ$. Линія N_3M_3 изобразитъ величину функціи, соотвѣтствующую значенію -1 перемѣннаго x. Перпендикуляры NM, N_3M_3, . . . откладываемые вверхъ отъ линіи xx, если $y > 0$, и внизъ, если $y < 0$, называются ***ординатами***.

Давъ достаточно большое число различныхъ значеній x-су, вычисливъ по ур—нію (1) соотвѣтствующія значенія y, нанесемъ тѣ и другія указаннымъ образомъ на чертежъ, и соединяемъ всѣ полученныя вершины M, M_1, . . . ординатъ кривою. *Измѣненія ординатъ этой кривой и покажутъ, какъ измѣняется функція при измѣненіи перемѣннаго x* — Кривая эта называется, поэтому, ***кривою функціи***.

Абсциссы и ординаты называются ***координатами*** точекъ кривой; прямыя xx' и yy' — *осями координатъ*, первая — осью абсциссъ (или иксовъ), вторая — осью ординатъ (или игрековъ). Точка O наз. началомъ координатъ.

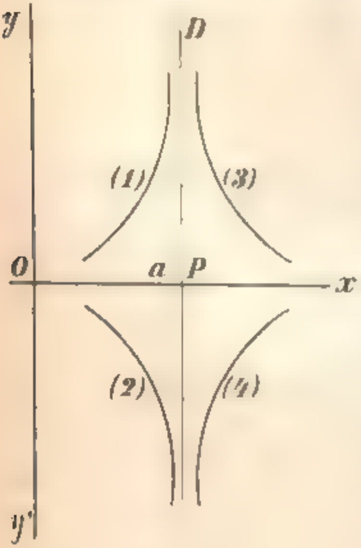
Кривая функціи, указывая наглядно измѣненія функціи, имѣетъ еще ту выгоду, что, разъ она начерчена, она съ перваго взгляда показываетъ *maxima* и *minima*; въ самомъ дѣлѣ, эти значенія, по самому ихъ опредѣленію, суть ничто иное какъ ординаты самыхъ высшихъ и самыхъ низшихъ точекъ кривой. Такъ, ординаты N_1M_1, N_4M_4, N_6M_6 суть maxima, а NM, N_5M_5 — minima.

Когда разсматриваемая функція — дробная, то можетъ случиться, что при $x = \pm \infty$ величина ея y стремится къ конечному значенію d. Въ такомъ случаѣ построеніе кривой покажетъ (черт. 58), что по мѣрѣ удаленія точки P влѣво,



Черт. 58.

т.-е. по мѣрѣ приближенія x къ $-\infty$, ордината MP будетъ стремиться къ d, и слѣд. точка M болѣе и болѣе будетъ приближаться къ прямой AB, параллельной оси $x'x$ и отстоящей отъ нея на d; кривая будетъ имѣть видъ (1) или (2), смотря по тому, будетъ ли функція приближаться къ d уменьшаясь, или же увеличиваясь. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что ***прямая*** AB ***служитъ ассимптотою кривой***; кривая неограниченно приближается къ прямой AB, никогда ея не достигая, ибо ордината (или, что то же, величина функціи), обращается въ d только при $x = -\infty$. Такъ какъ при $x = +\infty$ функція получаетъ опять величину d, какъ и при $x = -\infty$, то получится другая вѣтвь кривой, (3) или (4), имѣющая ту же ассимптоту AB. Въ данномъ случаѣ ассимптота параллельна оси x.



Черт. 59.

Если разсматриваемая функція есть дробь, то можетъ случиться, что знаменатель ея обращается въ нуль при нѣкоторомъ дѣйствительномъ значеніи x, напр., при $x = a$. Тогда при $x = a - h$ (гдѣ h какъ угодно мало), т.-е. при x стремящемся къ a, но остающемся всегда $< a$, дробь стремится къ $+\infty$, либо къ $-\infty$; иначе говоря, по мѣрѣ приближенія абсциссы къ OP (черт. 59), ордината неограниченно возрастаетъ въ положительномъ, либо въ отрицательномъ направленіи; получается вѣтвь кривой (1), либо (2). Если, затѣмъ, x сдѣлается немного больше a, принявъ значеніе $a + h$, большее a, функція останется безконечно большою, или того же знака, какъ прежде, или перемѣнивъ знакъ; но эта величина, сначала безконечно большая, будетъ по абсолютному значенію становиться все меньше и меньше, по мѣрѣ того какъ x будетъ удаляться отъ a, и получится вѣтвь кривой (3) или (4).

Прямая PD будетъ *ассимптотою* кривой, параллельною оси Oy.

Переходимъ къ изученію измѣненія нѣкоторыхъ элементарныхъ функцій.

I. Изслѣдованіе функціи первой степени.

583. Теорема. *Функція первой степени,*

$$y = ax + b$$

непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній перемѣннаго x; при увеличеніи x она прогрессивно возрастаетъ, когда $a > 0$, и уменьшается, когда $a < 0$.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ x функція дѣйствительна и конечна. Затѣмъ, пусть x_0 будетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе перемѣннаго x; соотвѣтствующее значеніе y пусть будетъ y_0, такъ что

$$y_0 = ax_0 + b.$$

Дадимъ x_0 нѣкоторое приращеніе h, и пусть соотвѣтствующее приращеніе y_0 будетъ K; то $y_0 + K = a(x_0 + h) + b$; вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ:

$$K = [a(x_0 + h) + b] - (ax_0 + b) = ah.$$

Такъ какъ a конечно, то по мѣрѣ приближенія h къ нулю, и произведеніе ah приближается къ нулю; слѣд. ah, т.-е. приращеніе K функціи м. б. сдѣлано какъ угодно мало. Это имѣетъ мѣсто при всякомъ x_0, слѣд. функція непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній x.

2. Возьмемъ рядъ возрастающихъ значеній x:

$$x' < x'' < x''' < \ldots \qquad (1)$$

Если $a > 0$, то умноженіе на a не измѣнитъ смысла неравенствъ, и получимъ: $ax' < ax'' < ax''' < \ldots$ Придавая по b, также не нарушимъ неравенствъ, слѣд.

$$ax' + b < ax'' + b < ax''' + b < \ldots$$

Если же $a < 0$, то изъ (1) найдемъ: $ax' > ax'' > ax''' \ldots$; а отсюда

$$ax' + b > ax'' + b > ax''' + b > \ldots$$

Итакъ, когда x возрастаетъ, то функція постоянно возрастаетъ при $a > 0$, и постоянно уменьшается при $a < 0$.

Примѣръ 1. Функція $y = 5x - 2$ при возрастаніи x возрастаетъ; при x безконечномъ она безконечна; когда x, увеличиваясь, проходитъ чрезъ значеніе $\frac{2}{5}$, обращающее функцію въ 0, она изъ отрицательной обращается въ положительную:

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdots < \cdots < \cdots \frac{2}{5} \cdots < \cdots < \cdots +\infty \\ y & -\infty \cdots < \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdots < \cdots +\infty. \end{array}$$

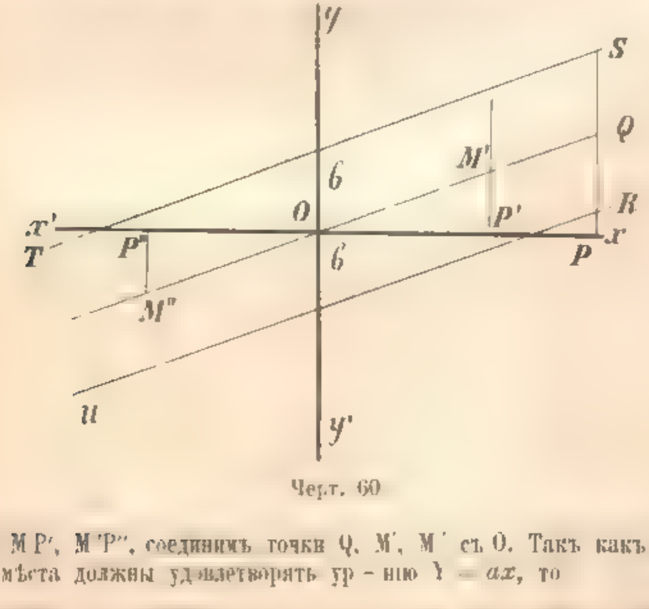
Примѣръ II. Функція $y = -2x + 1$ при возрастаніи x идетъ убывая; когда x безконечно, абсолютная величина ея безконечна; когда x, увеличиваясь проходитъ чрезъ значеніе $\frac{1}{2}$, обращающее функцію въ 0, она изъ положительной обращается въ отрицательную:

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdots < \cdots < \cdots \frac{1}{2} \cdots < \cdots < \cdots +\infty \\ y & +\infty \cdots > \cdots > \cdots 0 \cdots > \cdots > \cdots -\infty. \end{array}$$

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, функція $ax + b$ не имѣетъ относительныхъ maxima и minima, ибо она измѣняется не колеблясь; она имѣетъ *абсолютный minimum*, равный $-\infty$, и *абсолютный maximum*, равный $+\infty$.

584. **Теорема.** *Линія, изображающая функцію, связанную съ независимымъ перемѣннымъ уравненіемъ первой степени, есть прямая.*

Возьмемъ уравненіе $y = ax + b$ и, положивъ $Y = ax$, построимъ сперва геометрическое мѣсто точекъ, которыхъ координаты удовлетворяютъ ур-нію $Y = ax$. Пусть Q, M′, M″ (черт. 60) будутъ точки искомаго мѣста; проведя ихъ ординаты QP, M′P′, M″P″, соединимъ точки Q, M′, M″ съ O. Такъ какъ координаты искомаго мѣста должны удовлетворять ур-нію $Y = ax$, то



Черт. 60

$$\frac{QP}{OP} = a, \quad \frac{M'P'}{OP'} = a, \quad \frac{-M''P''}{-OP''} = a, \text{ и т. д., откуда } \frac{QP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \cdots$$

Изъ этого слѣдуетъ, что треугольники QOP, $M'OP'$, $M''OP''$, ... имѣютъ по равному (прямому) углу, заключенному между пропорціональными сторонами, сл. подобны. Изъ подобія же ихъ слѣдуетъ равенство угловъ QOP, $M'OP'$, $M''OP''$,.., доказывающее, что линіи OQ, OM', OM''.... совпадаютъ, а слѣд. точки Q, M', M'',.. лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Итакъ, геометрическое мѣсто уравненія $Y = ax$ есть прямая OQ.

Чтобы отъ ординатъ Y перейти къ ординатамъ y, соотвѣтствующимъ тѣмъ же значеніямъ x, достаточно къ первымъ прибавить b (въ ту или другую сторону, см. по знаку b): получится прямая ST, либо RU, параллельная первой.

Итакъ, *функція $ax + b$ во всякомъ случаѣ представляетъ ординаты прямой.*

II. Изслѣдованіе квадратнаго тринома.

585. Теорема. *Квадратный триномъ*

$$y = ax^2 + bx + c$$

есть функція непрерывная для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x отъ $-\infty$ до $+\infty$; когда $a > 0$, функція эта имѣетъ minimum, при $a < 0$ она имѣетъ maximum; maximum и minimum выражаются формулою

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

а соотвѣтствующія значенія x формулою: $-\dfrac{b}{2a}$; наконецъ, функція имѣетъ равныя величины, когда x получаетъ значенія, равноотстоящія отъ $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ и наоборотъ.

1. Во-первыхъ, очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ значеніи x триномъ дѣйствителенъ и конеченъ. Давъ перемѣнному x значенія x_0 и $x_0 + h$, обозначивъ соотвѣтствующія величины y черезъ y_0 и $y_0 + K$, находимъ:

$$\begin{aligned} K = (y_0 + K) - y_0 &= [a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c] - (ax_0^2 + bx_0 + c) \\ &= ah^2 + (2ax_0 + b)h = h[2ax_0 + b + ah]. \end{aligned}$$

Множитель въ скобкахъ, будучи цѣлымъ относительно x_0 и h, конеченъ при всякихъ конечныхъ значеніяхъ x_0 и h, а слѣд. произведеніе этого конечнаго количества на h можно сдѣлать какъ угодно близкимъ къ нулю, приближая къ нулю приращеніе h; иначе говоря, когда h стремится къ 0, то и K стремится къ предѣлу = нулю, слѣд. триномъ есть функція непрерывная.

2. Замѣтимъ, что квадратъ какого-либо выраженія измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и абсолютная величина этого выраженія. Если положительныя числа идутъ возрастая, то и квадраты ихъ идутъ возрастая. Если отрицательныя числа идутъ возрастая, ихъ квадраты уменьшаются. Помня это, дадимъ триному знакомую уже форму:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad . \; . \quad (1).$$

Будемъ измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, замѣтивъ въ числѣ этихъ значеній то, при которомъ $x + \frac{b}{2a}$ обращается въ нуль, именно $x = -\frac{b}{2a}$. Напишемъ рядъ значеній x, возрастающихъ отъ $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$, а потомъ отъ $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$:

$$x = -\infty \ldots < \ldots < \ldots -\frac{b}{2a} \ldots < \ldots < \ldots +\infty.$$

Придавая къ каждому, воображаемому въ этомъ ряду количеству, по $\frac{b}{2a}$, мы не измѣнимъ смысла неравенствъ; слѣд. измѣненія $x + \frac{b}{2a}$ будутъ идти слѣдующимъ образомъ:

$$x + \frac{b}{2a} \Big| \underbrace{-\infty \ldots < \ldots < \ldots}_{-} 0 \underbrace{\ldots < \ldots < \ldots +\infty}_{+}.$$

Возвышая значенія $x + \frac{b}{2a}$, воображаемыя здѣсь, въ квадратъ, и замѣчая, что квадраты отрицательныхъ значеній пойдутъ уменьшаясь, а положительныхъ увеличиваясь, получимъ слѣдующій рядъ измѣненій выраженія $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = +\infty \ldots > \ldots > \ldots 0 \ldots < \ldots < \ldots +\infty.$$

Замѣтимъ здѣсь, что выраженіе $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ идетъ уменьшаясь до того момента, когда x достигаетъ критическаго значенія $-\frac{b}{2a}$, а потомъ идетъ, безпредѣльно увеличиваясь. Такимъ образомъ, выраженіе $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ проходитъ черезъ *minimum*, равный 0, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$.

Придавая къ каждому члену, воображаемому въ послѣднемъ ряду, постоянное количество $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, мы не нарушимъ смысла измѣненій, и получимъ нижеслѣдующій рядъ измѣненій выраженія $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Big| +\infty \ldots > \ldots > \ldots -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \ldots < \ldots < \ldots +\infty.$$

Наконецъ, чтобы отъ этого выраженія перейти къ триному, нужно ввести множителя a; но здѣсь нужно различать два случая: $a > 0$ и $a < 0$. Въ первомъ случаѣ умноженіе на a не нарушитъ смысла неравенствъ, во второмъ, умноженіе на a измѣнитъ смыслъ всѣхъ неравенствъ. Итакъ, окончательно имѣемъ слѣдующую таблицу измѣненій тринома:

$$\begin{array}{lllllllllll}
 & x = & -\infty \ldots & < \ldots & < \ldots & -\frac{b}{2a} & \ldots < & \ldots < & \ldots +\infty \\
ax^2 + bx + c \text{ при } a > 0 & & +\infty \ldots & > \ldots & > \ldots & -\frac{b^2 - 4ac}{4a} & \ldots < & \ldots < & \ldots +\infty \\
ax^2 + bx + c \text{ при } a < 0 & & -\infty \ldots & < \ldots & < \ldots & -\frac{b^2 - 4ac}{4a} & \ldots > & \ldots > & \ldots -\infty.
\end{array}$$

Отсюда непосредственно видно, что:

1) При $a > 0$ триномъ $ax^2 + bx + c$ идетъ уменьшаясь до того момента, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$, а съ этого момента онъ идетъ возрастая неограниченно; слѣд. при $a > 0$ триномъ имѣетъ *minimum*, равный

$$\frac{b^2-4ac}{4a},$$

когда x получаетъ значеніе $-\frac{b}{2a}$.

2) При $a < 0$ триномъ $ax^2 + bx + c$ идетъ возрастая до того момента, когда x достигаетъ величины $-\frac{b}{2a}$, затѣмъ онъ неограниченно уменьшается; слѣд. при $a < 0$ триномъ имѣетъ *maximum*, равный

$$-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

котораго достигаетъ при $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Дадимъ перемѣнному x два значенія, одинаково по абсолютной величинѣ разнящіяся отъ $-\frac{b}{2a}$; эти значенія будутъ вида

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - h \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + h.$$

Подставивъ эти значенія x въ формулу (1), найдемъ, что триномъ въ обоихъ случаяхъ обращается въ $a\left(h^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$, т. е. получаетъ равныя значенія.

Обратно, пусть триномъ получаетъ равныя величины при двухъ значеніяхъ x' и x'' перемѣннаго x, т.-е. пусть

$$ax'^2 + bx' + c = ax''^2 + bx'' + c,$$

откуда

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0,$$

или, раздѣливъ обѣ части на $a(x' - x'')$, найдемъ

$$x' + x'' + \frac{b}{a} = 0;$$

пусть $x' < x''$; мы можемъ предыдущее равенство написать въ видѣ

$$x'' - \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{2a} - x',$$

а это означаетъ, что избытокъ количества x'' надъ $-\frac{b}{2a}$ равенъ избытку $-\frac{b}{2a}$ надъ x', или, другими словами, что x' и x'' равно отстоятъ отъ $-\frac{b}{2a}$; если большее изъ этихъ количествъ равно $-\frac{b}{2a} + h$, то меньшее будетъ $-\frac{b}{2a} - h$.

586 *Примѣчаніе I.* Изъ предыдущей теоремы непосредственно заключаемъ, что:

Когда $a > 0$ триномъ два раза проходитъ черезъ нуль, если его minimum отрицателенъ, одинъ разъ — когда этотъ minimum $= 0$, и не обращается въ нуль, если minimum положителенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, триномъ непрерывенъ и измѣняется въ разсматриваемомъ случаѣ отъ $-\infty$ до minimum'a, а потомъ отъ minimum'a до $+\infty$, проходя чрезъ прежнія значенія; слѣд. онъ можетъ обратиться въ нуль только тогда, когда его minimum < 0, и въ такомъ случаѣ два раза пройдетъ черезъ нуль.

Значенія x, обращающія триномъ въ нуль, даютъ въ этомъ случаѣ полусумму равную $-\frac{b}{2a}$, ибо они равноотстоятъ отъ этой величины.

Иначе говоря: когда $a > 0$, уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ имѣетъ дѣйствительные неравные корни, если $-\frac{b^2-4ac}{4a} < 0$, или $b^2 - 4ac > 0$, а сумма корней равна $-\frac{b}{a}$; но имѣетъ равные корни, если $-\frac{b^2-4ac}{4a} = 0$, или $b^2 - 4ac = 0$, а общая величина ихъ есть $-\frac{b}{2a}$; наконецъ, корни его мнимы, когда $-\frac{b^2-4ac}{4a} > 0$, или $b^2 - 4ac < 0$.

Все это — знакомые результаты, найденные здѣсь только инымъ путемъ.

Такимъ же образомъ, одного взгляда на таблицу измѣненій тринома достаточно, чтобы убѣдиться, что при $a < 0$ необходимо, чтобы maximum былъ положителенъ, для того, чтобы функція прошла черезъ 0, но тогда она и другой разъ пройдетъ черезъ ту же величину. Этотъ случай изслѣдуется какъ и предыдущій.

Примѣчаніе II. Когда триномъ не можетъ обратиться въ нуль, всѣ его значенія — того же знака, какъ a; тоже самое имѣетъ мѣсто, когда maximum или minimum равенъ нулю.

Когда триномъ проходитъ два раза черезъ нуль, знакъ его противоположенъ знаку a для всѣхъ значеній x, содержащихся между этими двумя частными значеніями x, но знакъ его одинаковъ съ знакомъ a для всѣхъ остальныхъ значеній x.

$$\begin{array}{l|lll}
 & x = -\infty \ldots < & x_1 < \ldots = -\frac{b}{2a} \ldots < x_2 \ldots & < \ldots +\infty \\
ax^2+bx+c \text{ при } a>0 & \underbrace{+\infty \ldots > \ldots 0}_{\text{знакъ коэф. } +a} & \underbrace{> \ldots -\frac{b^2-4ac}{4a} \ldots}_{\text{знакъ коэф. } -a} & \underbrace{0 \ldots < \ldots +\infty}_{\text{зн. коэф. } +a} \\
ax^2+bx+c \text{ при } a<0 & \underbrace{-\infty \ldots < \ldots 0}_{\text{знакъ коэф.} +a} & \underbrace{< \ldots -\frac{b^2-4ac}{4a} \ldots}_{\text{знакъ коэф. } -a} & \underbrace{> 0 \ldots > \ldots -\infty}_{\text{зн. коэф. } +a}
\end{array}$$

Такимъ образомъ уже знакомые намъ результаты относительно измѣненія знака тринома ясно вытекаютъ изъ непрерывности измѣненій этой функціи.

Примѣчаніе III. Относительный maximum или minimum тринома $ax^2 + bx + c$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и абсолютный.

Пусть напр., $a > 0$; таблица измѣненій показываетъ, что

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

дѣйствительно меньше всѣхъ другихъ значеній функціи; слѣд. это — *minimum абсолютный.*

Это же непосредственно слѣдуетъ изъ формулы

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣнное количество $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, будучи квадратомъ, имѣетъ наименьшую величину нуль, при $x = -\frac{b}{2a}$.

Слѣд. наименьшая величина скобокъ есть $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$; умножая на положительное a, найдемъ и для y наименьшую величину, которая, слѣд.,

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

587. Графическое представленіе хода измѣненій квадратнаго тринома.

Укажемъ планъ построенія кривыхъ, изображающихъ измѣненія тринома, различая два главныхъ случая: $a > 0$ и $a < 0$, и въ каждомъ изъ нихъ 3 подраздѣленія: $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Пусть $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$; въ этомъ случаѣ таблица измѣненій тринома (§ 586) показываетъ, что при $x = -\frac{b}{2a}$ онъ имѣетъ отрицательный minimum $= -\frac{b^2-4ac}{4a}$; затѣмъ, при x, равныхъ корнямъ (x_1 и x_2), обращается въ нуль; наконецъ, по мѣрѣ: уменьшенія перемѣннаго x отъ x_1 до $-\infty$ и увеличенія отъ x_2 до $+\infty$, триномъ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$. При каждыхъ двухъ значеніяхъ x, равноотстоящихъ отъ $-\frac{b}{2a}$, значенія тринома одинаковы по величинѣ и по знаку. Отсюда такое построеніе. Откладываемъ (черт. 61) на оси абсциссъ, вправо или влѣво, смотря по знаку, отрѣзокъ $OA = -\frac{b}{2a}$. Въ точкѣ A проводимъ параллель BC къ оси yy' и откладываемъ на ней отрѣзокъ $AB = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ внизъ отъ точки A (т. к. minimum этотъ < 0); такимъ образомъ получаемъ наименьшую ординату, и точка B есть низшая точка кривой. Вправо и влѣво отъ точки A откладываемъ линіи $AH = AH' = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; получаемъ точки H и H', которыми опредѣляются корни OH и OH' тринома; для этихъ значеній x ординаты $= 0$, слѣд. въ точкахъ H и H' кривая пересѣкаетъ ось x-въ. Соединивъ точку B съ точками H и H' кривою, продолжаемъ части BH и BH' этой кривой вверхъ, располагая обѣ вѣтви симметрично относительно прямой BC. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ (§ 585, 3), что для всякихъ двухъ значеній x, равноотстоящихъ отъ OA, значенія y равны, т.-е. что если взять $AP = AP'$, то перпендикуляры PM и P'M' къ оси xx' въ точкахъ P и P', представляющіе ординаты кривой, равны; слѣд. хорда MM' будетъ параллельна оси x-въ и раздѣлится прямою AC пополамъ. Слѣд. линія AC дѣлитъ пополамъ всѣ хорды кривой, ей перпендикулярныя, т.-е. дѣлитъ кривую на двѣ симметричныя части. Поэтому AC наз. *осью* кривой, точка B *вершиною* кривой. Самая кривая есть *парабола*.

Для болѣе точнаго построенія кривой нужно дать x-су большее число значеній и вычислить соотвѣтствующія значенія тринома, нанося ихъ на ординатахъ: такимъ образомъ получится большее число точекъ кривой и фигура ея опредѣлится точнѣе. Такимъ образомъ, ходъ измѣненій тринома изображается наглядно и выясняются всѣ частности. Напр., видно, что кривая можетъ пересѣкать ось x-овъ только тогда, когда minimum отрицателенъ, и т. п.

Разъ кривая построена тщательно, т.-е. при помощи достаточнаго числа точекъ, она можетъ служить для болѣе быстраго опредѣленія величинъ функціи (y), соотвѣтствующихъ данной величинѣ перемѣннаго x, и обратно, для опредѣленія значеній x, соотвѣтствующихъ данному y. Въ первомъ случаѣ достаточно нанести данный x по оси $x'x$ отъ точки O, вправо или влѣво, см. по знаку; пусть P будетъ найденная точка; затѣмъ взять точку M кривой, въ которой перпендикуляръ къ оси $x'x$, возставленный въ точкѣ P, пересѣкнетъ кривую. Длина MP и представитъ абсолютную величину тринома, о знакѣ же судимъ по положенію точки M относительно оси x-овъ.

Для опредѣленія значеній x-са, при которыхъ триномъ принимаетъ данную величину k, наносятъ на ось y-въ, начиная отъ точки O, въ направленіи, опредѣляемомъ знакомъ k, длину $OK = k$; черезъ точку K проводятъ параллель оси x-въ; пусть она встрѣчаетъ кривую въ точкахъ M и M′; абсциссы OP и OP′ этихъ точекъ и будутъ искомыя значенія x.

Сказаннаго достаточно для построенія кривыхъ во всѣхъ случаяхъ; разъясненія излишни. Поэтому мы прямо прилагаемъ таблички измѣненій тринома для каждаго случая, а противъ нихъ кривыя, выражающія эти измѣненія.

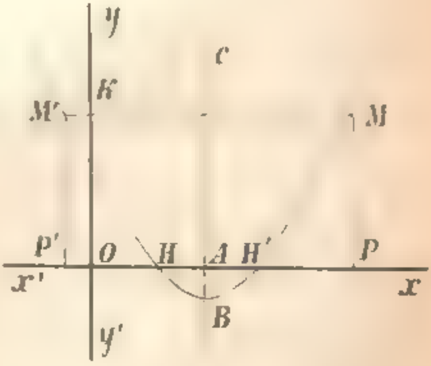
Значеніе линій указано вслѣдъ за каждымъ чертежомъ.

I случай: $a > 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0;\ x_1 < x_2$.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

x	y
$-\infty$	$+\infty$
x_1	0
$-\frac{b}{2a}$	min. $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$
x_2	0
$+\infty$	$+\infty$



Черт. 61.

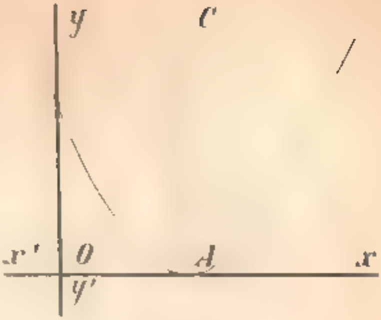
$$OA = -\frac{b}{2a};\quad AB = \frac{b^2 - 4ac}{4a};\quad OH = x_1;\quad OH' = x_2$$

2. $b^2 - 4ac = 0$; $x_1 = x_2$.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

x	y
$-\infty$	$+\infty$
$-\frac{b}{2a}$	min. $y = 0$
$+\infty$	$+\infty$

$$OA = -\frac{b}{2a}$$



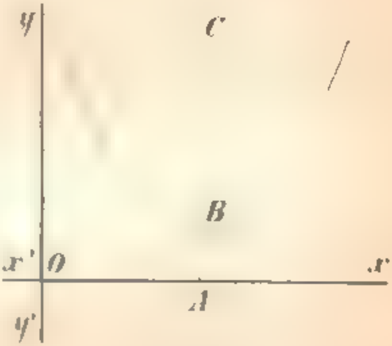
Черт. 62.

3. $b^2 - 4ac < 0$; x_1 и x_2 мнимые.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

x	y
$-\infty$	$+\infty$
$-\frac{b}{2a}$	min. $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$
$+\infty$	$+\infty$

$OA = -\frac{b}{2a}$; $AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.



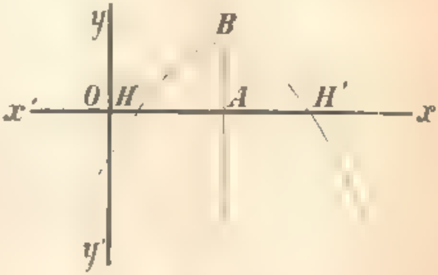
Черт. 63.

II случай: $a < 0$.

1. $b^2 - 4ac > 0$; $x_1 < x_2$.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

x	y
$-\infty$	$-\infty$
x_1	0
$-\frac{b}{2a}$	max. $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$
x_2	0
$+\infty$	$-\infty$

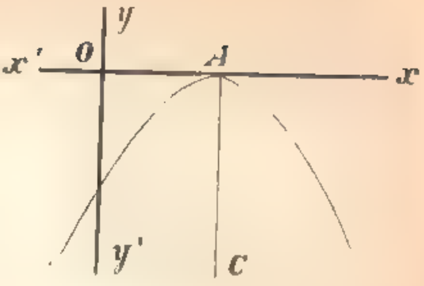


Черт. 64.

$OA = -\frac{b}{2a}$; $AB = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$; $OH = x_1$. $OH' = x_2$.

2. $b^2 - 4ac = 0$; $x_1 = x_2$.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$



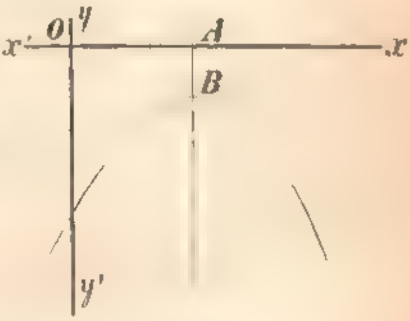
Черт. 65.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$-\frac{b}{2a}$	max. $y = 0$
$+\infty$	$-\infty$

$$OA = -\frac{b}{2a}.$$

3. $b^2 - 4ac < 0$; x_1 и x_2 мнимые.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$



Черт. 66.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$-\frac{b}{2a}$	max. $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$
$+\infty$	$-\infty$

$$OA = -\frac{b}{2a};\quad AB = +\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

588. Примѣръ 1. *Изслѣдовать измѣненія тринома* $y = \frac{3}{2}x^2 + 12x + 18$ *при измѣненіи* x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Представимъ триномъ въ видѣ

$$y = \frac{3}{2}[(x + 4)^2 - 4].$$

Отсюда, по предыдущему, прямо слѣдуетъ таблица измѣненій:

x	$-\infty \cdots$	$< \cdots$	$-6 \cdots$	$< -4 \cdots$	$< \cdots$	$-2 \cdots$	$< \cdots$	$+\infty$
y	$+\infty \cdots$	$> \cdots$	$0 \cdots$	$> -6 \cdots$	$< \cdots$	$0 \cdots$	$< \cdots$	$+\infty$

т.-е. данный триномъ уменьшается отъ $+\infty$ до -6, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до -4; потомъ онъ увеличивается отъ -6 до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ -4 до $+\infty$. Слѣд. триномъ имѣетъ minimum $= -6$ при $x = -4$; проходитъ дважды чрезъ каждую величину, большую -6, и никогда не дѣлается меньше -6.

Графически измѣненія функціи изобразятся измѣненіемъ ординаты параболы, которой ось параллельна оси y, причемъ координаты низшей точки (вершины) суть: $x = -4$, $y = -6$; кривая два раза пересѣкаетъ ось x, въ точкахъ, коихъ абсциссы суть: -2 и -6 (черт. 67).

Примѣръ II. *Изслѣдовать измѣненія тринома $y = -x^2 + 2x - 3$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

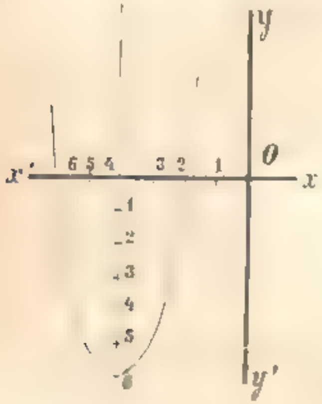
Представимъ триномъ въ видѣ:

$$y = -[(x-1)^2 + 2].$$

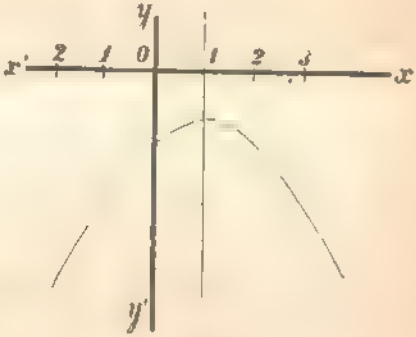
Имѣемъ таблицу измѣненій

$$\begin{array}{c|l}
x & -\infty \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot < \cdot \cdot < \cdot \cdot + \infty \\
y & -\infty \cdot < \cdot \cdot \cdot < \cdot \cdot \cdot -2 \cdot \cdot > \cdot \cdot \cdot > \cdot \cdot \cdot -\infty
\end{array}$$

Заключаемъ, что триномъ увеличивается отъ $-\infty$ до -2, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+1$; затѣмъ онъ уменьшается отъ -2 до $-\infty$, когда x возрастаетъ отъ $+1$ до $+\infty$. Слѣдоват. функція имѣетъ maximum (-2), соотвѣтствующій $x = +1$; слѣд. она не проходитъ черезъ 0, но проходитъ дважды чрезъ всякое значеніе, меньшее -2. Парабола, представляющая ходъ измѣненій тринома, вся лежитъ въ области отрицательныхъ игрековъ (черт. 68).



Черт. 67.



Черт. 68.

III Изслѣдованіе биквадратнаго тринома.

589. Теорема. *Биквадратный триномъ*

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

есть функція непрерывная для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Функція эта необходимо имѣетъ maximum, либо minimum, равный c; кромѣ того, когда a и b имѣютъ противоположные знаки, она еще имѣетъ либо два maximum'а, либо два minimum'а; если же a и b имѣютъ знаки одинаковые, то никакого max. или minim., кромѣ c, триномъ не имѣетъ.

1. Очевидно, что при всякомъ дѣйствительномъ и конечномъ значеніи x триномъ дѣйствителенъ и конеченъ. Давъ перемѣнному x нѣкоторое приращеніе

h и вычтя изъ новаго состоянія функціи прежнее, найдемъ соотвѣтствующее приращеніе y (k):

$$k = a(x+h)^4 + b(x+h)^2 + c - ax^4 - bx^2 - c = h[4ax^3 + 2bx + h(6ax^2 + 4axh + ah^2 + b)].$$

Множитель въ квадратныхъ скобкахъ конеченъ при всякихъ конечныхъ x и h, и слѣд. при безконечно маломъ h, вторая часть м. б. сдѣлана какъ угодно малою; слѣд. триномъ непрерывенъ.

2. Представимъ триномъ въ видѣ

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Первый случай: $a > 0$, $b < 0$.

Какъ и для квадратнаго тринома, составляемъ таблицу:

$$\begin{array}{llllllllll}
x & \infty \cdots < \cdots & \sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdots < \cdots & 0 \cdots < \cdots & \sqrt{\frac{b}{2a}} < & \infty \\
x^2 & \infty \cdots > \cdots & \frac{b}{2a} \cdots > \cdots & 0 \cdots < \cdots & -\frac{b}{2a} < & +\infty \\
\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 & \infty \cdots > \cdots & 0 \cdots < \cdots & \frac{b^2}{4a} \cdots > \cdots & 0 < & \infty
\end{array}$$

Слѣд. $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ проходитъ черезъ minimum 0, когда x проходитъ чрезъ величину $\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; затѣмъ тотъ же квадратъ проходитъ чрезъ maximum $\frac{b^2}{4a^2}$, когда x обращается въ 0; уменьшается до minimum'а равнаго нулю, когда x увеличивается до $\sqrt{\frac{b}{2a}}$, а потомъ увеличивается до безконечности.

Прибавляя постоянное количество $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, и умножая на положительное количество a, мы не измѣнимъ смысла неравенствъ, и найдемъ:

$$\begin{array}{l|llllll}
x & \infty \cdots < \cdots & -\sqrt{\frac{b}{2a}} < \cdots & 0 \cdots < \cdots & \sqrt{\frac{b}{2a}} \cdots < \cdots & \infty \\
y & \infty \cdots > \cdots & -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdots < \cdots & c \cdots & \cdots - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdots < \cdots & \infty
\end{array}$$

Итакъ, въ случаѣ: $a > 0$, $b < 0$, биквадратный триномъ имѣетъ два minimum'а, равные $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, и одинъ maximum, равный c. Minima триномъ имѣетъ при $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, maximum при $x = 0$.

Для слѣдующихъ случаевъ мы прямо даемъ результаты, которые получаются тѣмъ же пріемомъ.

Второй случай: $a > 0$, $b \geq 0$.

$$\begin{array}{l|l}
x & -\infty \cdots < \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdots < \cdots +\infty \\
y & +\infty \cdots > \cdots > \cdots c \cdots < \cdots < \cdots +\infty
\end{array}$$

триномъ имѣетъ minimum $= c$, при $x = 0$.

Третій случай: $a < 0,\ b \lessgtr 0$.

$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdots < \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdots < \cdots +\infty \\ y & -\infty \cdots < \cdots < \cdots c \cdots > \cdots > \cdots -\infty \end{array}$$

триномъ имѣетъ maximum $= c$, при $x = 0$.

Четвертый случай: $a < 0,\ b > 0$.

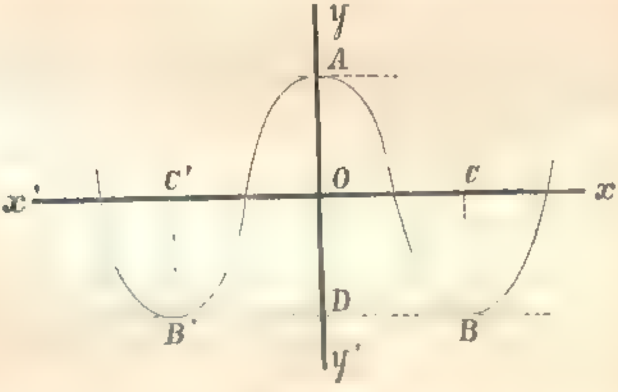
$$\begin{array}{c|l} x & -\infty \cdots < \cdots < -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdots < +\sqrt{-\frac{b}{2a}} \cdots < \cdots +\infty \\ y & -\infty \cdots < \cdots < -\frac{b^2-4ac}{4a} > \cdots c \cdots < \cdots < \cdots -\frac{b^2-4ac}{4a} \cdots > \cdots -\infty \end{array}$$

Въ этомъ случаѣ триномъ имѣетъ два maximum'а, равные $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, которыхъ онъ достигаетъ при $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, и одинъ minimum $= c$, при $x = 0$.

590. Графическое представленіе. 1. Пусть напр.

$$a > 0, \quad b < 0, \quad b^2 - 4ac > 0, \quad c > 0.$$

При этихъ условіяхъ триномъ имѣетъ положительный maximum c и два отрицат. минимальныя значенія, равныя $-\frac{b^2-4ac}{4a}$; max. c триномъ имѣетъ при $x = 0$, minima при $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Отсюда построеніе: беремъ (черт. 69)



Черт. 69.

$OA = c$; $OC = OC' = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$; $OD = \frac{b^2-4ac}{4a}$. Maximum соотвѣтствуетъ точкѣ A кривой, minima — точкамъ B и B'. Ось xx' пересѣкаетъ кривую въ четырехъ дѣйствительныхъ точкахъ, слѣд. триномъ 4 раза обращается въ нуль, при x попарно равныхъ, но противоположныхъ по знаку. Это совершенно сообразно съ тѣмъ результатомъ, что при данныхъ условіяхъ биквадратное уравненіе $ax^4 + bx^2 + c = 0$ имѣетъ 4 различныхъ дѣйствительныхъ корня.

Возьмемъ численный примѣръ для разсматриваемаго случая.

Примѣръ. *Изслѣдовать измѣненіе y, связанной съ x уравненіемъ $2y = x^4 - 6x^2 + 5$, при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

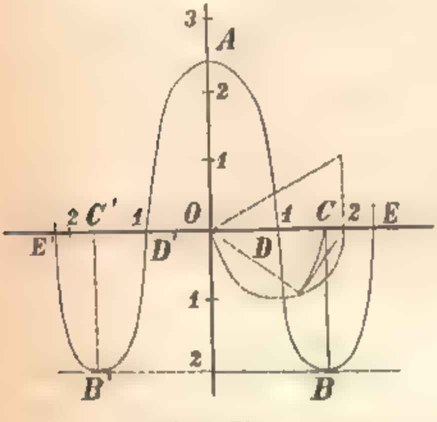
Въ числѣ критическихъ значеній x опредѣливъ и корни тринома $x^4 - 6x^2 + 5$, которые равные $\pm\sqrt{5}$ и ± 1, даемъ y форму:

$$y = \frac{1}{2}[(x^2 - 3)^2 - 4],$$

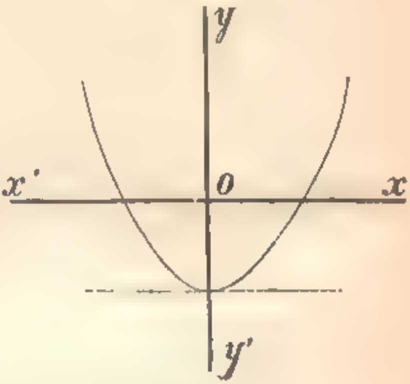
и находимъ слѣдующую таблицу измѣненій y:

$$\begin{array}{lccccccccccccccccc}
x & -\infty & \cdots & -\sqrt{5} & < & -\sqrt{3} & \cdots & -1 & \cdots & 0 & < & +1 & < & +\sqrt{3} & < & +\sqrt{5} & < & +\infty \\
y & +\infty & > & 0 & > & -2 & < & 0 & < & \frac{5}{2} & > & 0 & > & -2 & < & 0 & < & +\infty \\
 & & & & & \text{minim.} & & & & \text{max.} & & & & \text{minim.} & & & &
\end{array}$$

Отсюда заключаемъ, что функція уменьшается отъ $+\infty$ до -2, когда x увеличивается отъ $-\infty$ до $-\sqrt{3}$, проходя чрезъ 0 при $x = -\sqrt{5}$; затѣмъ она увеличивается до $\frac{5}{2}$ при возрастаніи x до 0, проходя чрезъ нулевое значеніе при $x = -1$. Съ этого момента функція проходитъ прежнія значенія, въ обратномъ порядкѣ. На чертежѣ (черт. 70):



Черт. 70.



Черт. 71.

$$OC' = OC = \sqrt{3};$$

$$C'B' = CB = 2;$$

$$OA = \frac{5}{2};$$

$$OE' = OE = \sqrt{5}; \quad OD' = OD = 1.$$

2. Пусть будетъ: $a > 0$, $b > 0$.

При этихъ условіяхъ триномъ ax^4+bx^2+c уменьшается отъ $+\infty$ до c, а потомъ возрастаетъ отъ c до $+\infty$, проходя черезъ minimum c при $x=0$. Въ нуль онъ можетъ обратиться только два раза, при двухъ равныхъ и противоположныхъ значеніяхъ x, и то лишь въ томъ случаѣ, когда $c<0$.

Эти измѣненія представлены на чертежѣ 71-омъ, причемъ предполагается $c<0$.

IV. Изслѣдованіе дроби: $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$.

591. Даемъ перемѣнному x нѣкоторое приращеніе h; для соотвѣтствующаго приращенія k дроби находимъ:

$$k=\frac{a(x+h)+b}{a'(x+h)+b'}-\frac{ax+b}{a'x+b'}=\frac{h(ab'-a'b)}{(a'x+b')(a'x+b+a'h)}.$$

Отсюда заключаемъ: 1) когда x приближается къ $-\frac{b'}{a'}$, знаменатель выраженія k приближается къ 0, а слѣд. коэффиціентъ при h, т.-е дробь $\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')(a'x+b'+a'h)}$ приближается къ ∞, поэтому и приращеніе k функціи приближается къ ∞, т.-е. функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. При всѣхъ другихъ значеніяхъ x, по мѣрѣ приближенія h къ 0, и k стремится къ 0, т.-е. функція непрерывна. Итакъ, дробь y непрерывна въ каждомъ изъ интерваловъ:

$$\text{отъ } -\infty \text{ до } -\frac{b'}{a'} \quad \text{и} \quad \text{отъ } -\frac{b'}{a'} \text{ до } +\infty,$$

претерпѣвая разрывъ непрерывности только при $x=-\frac{b'}{a'}$, общему предѣлу этихъ интерваловъ.

2) Знакъ выраженія k зависитъ только отъ числителя; въ самомъ дѣлѣ, знаменатель можно представить въ видѣ $(a'x+b')^2+h\,.\,a'(a'x+b)$, а это выраженіе, при достаточно маломъ h, существенно—положительно, ибо знакъ его будетъ зависить только отъ перваго члена $(a'x+b')^2$, который (какъ квадратъ) положителенъ при всякомъ дѣйствительномъ x. Но числитель $ab'-a'b$, какъ количество постоянное, всегда имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ, сл. функція всегда идетъ: или возрастая, или уменьшаясь; т.-е. въ каждомъ изъ интерваловъ непрерывности дробь

идетъ постоянно увеличиваясь, если $ab'-a'b>0$;
идетъ постоянно уменьшаясь, если $ab'-a'b<0$;
имѣетъ постоянную величину, если $ab'-a'b=0$,

ибо въ послѣднемъ случаѣ всегда $k=0$, т.-е. дробь не получаетъ приращеній при измѣненіяхъ x, сохраняя одну и ту же величину.

Итакъ, при изслѣдованіи измѣненій функціи, должны различать три указанные случая; при этомъ, раздѣливъ числ. на знаменателя дроби, получаемъ

$$y=\frac{a}{a'}+\frac{a'b-ab'}{a'^2x+a'b'}=\frac{a}{a'}+\frac{\frac{a'b-ab'}{a'^2}}{x+\frac{b'}{a'}}.$$

Положивъ, для краткости, $\frac{a'b - ab'}{a'^2} = \lambda$, замѣчаемъ, что знакъ λ зависитъ только отъ числителя, именно: при $ab' - a'b > 0$ будетъ $\lambda < 0$, а при $ab' - a'b < 0$ будетъ $\lambda > 0$; дробь можно представить въ видѣ

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Соображая все сказанное, прямо находимъ слѣдующіе выводы относительно измѣненій дроби при измѣненія x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

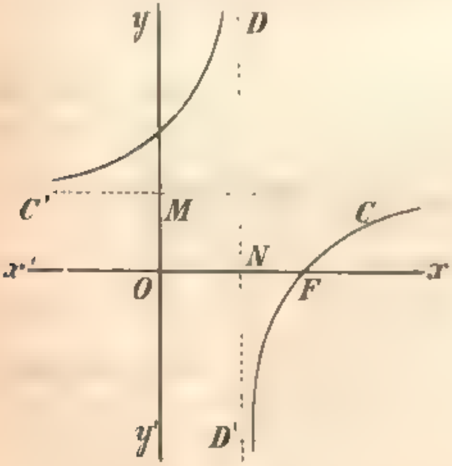
I. $ab' - ba' > 0$.

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}, \qquad \text{гдѣ } \lambda < 0.$$

$$\begin{array}{c|l|l}
x & -\infty < \cdot \cdot \cdot < -\frac{b'}{a'} - \varepsilon & -\frac{b'}{a} + \varepsilon < \cdot \cdot \cdot < +\infty \\
y & \frac{a}{a'} < \cdot \cdot \cdot < +\infty & -\infty < \cdot \cdot \cdot < \frac{a}{a'}.
\end{array}$$

Т.-е. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-\frac{b'}{a'}$, функція идетъ постоянно увеличиваясь отъ $\frac{a}{a'}$ до $+\infty$; при $x = -\frac{b'}{a'}$, имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности: функція изъ $+\infty$ внезапно обращается въ $-\infty$; затѣмъ, при возрастаніи x отъ $-\frac{b'}{a'}$ до $+\infty$, идетъ постоянно увеличиваясь отъ $-\infty$ до $\frac{a}{a'}$. Въ одномъ изъ интерваловъ она проходитъ чрезъ 0, при $x = -\frac{b}{a}$.

Измѣненія функціи изобразятся, такимъ образомъ, измѣненіями ординатъ слѣдующей кривой (гипербола).



Черт. 72.

На чертежѣ (72):

$OM = \frac{a}{a'}$.

$ON = -\frac{b'}{a'}$.

$OF = -\frac{b}{a}$.

CC' и DD'—двѣ ассимптоты кривой.

II. $ab' - ba' < 0$.

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\lambda}{x + \frac{b'}{a'}}, \qquad \text{гдѣ } \lambda > 0.$$

$$\begin{array}{c|l}
x & -\infty \ldots < \ldots < \ldots \frac{b'}{a'} - \varepsilon \quad -\frac{b'}{a'} \mid \varepsilon < \ldots < +\infty \\
y & \frac{a}{a'} \ldots > \ldots > \ldots -\infty \quad \mid +\infty \quad > \ldots > \frac{a}{a'}.
\end{array}$$

Т.-е. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $-\frac{b'}{a}$, функція идетъ уменьшаясь непрерывно отъ $\frac{a}{a'}$ до $-\infty$; при $x = -\frac{b'}{a'}$ происходитъ разрывъ непрерывности: изъ $-\infty$ въ $+\infty$; затѣмъ, при увеличеніи x отъ $-\frac{b'}{a'}$ до $+\infty$, функція идетъ постоянно уменьшаясь отъ $+\infty$ до $\frac{a}{a'}$. Въ одномъ изъ интерваловъ непрерывности она проходитъ чрезъ 0, при $x = -\frac{b}{a}$.

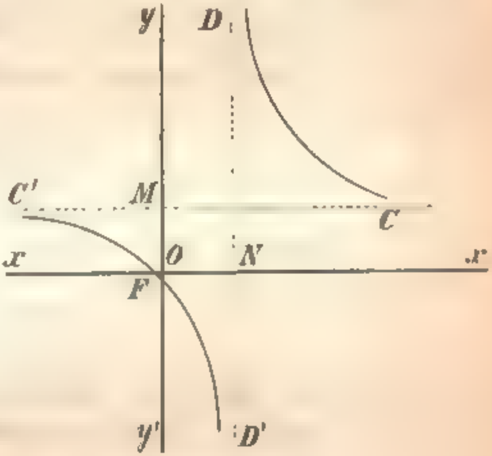
Кривая измѣненій (гипербола) такова:

$$OM = \frac{a}{a'}.$$

$$ON = -\frac{b'}{a'}.$$

$$OF = -\frac{b}{a}.$$

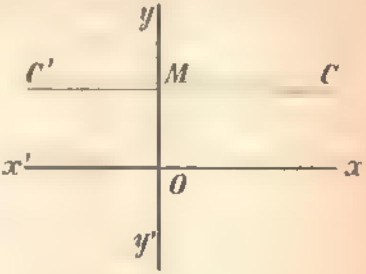
CC′ и DD′ — двѣ ассимптоты кривой.



Черт. 73.

III. $ab' - ba' = 0$.

При этомъ и $\lambda = 0$, а потому при всякомъ x имѣемъ $y = \frac{a}{a'} =$ величинѣ постоянной. Слѣд. при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, дробь не измѣняетъ своей величины; ея кривая будетъ прямая CC′, которой ординаты равны $OM = \frac{a}{a'}$.



Черт. 74.

Задача. *Найти прямо условіе необходимое и достаточное для того, чтобы дробь $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ имѣла постоянную величину при всякомъ x.*

1-й способъ. Такъ какъ дробь должна имѣть одну и ту же величину при всякомъ x, то, между прочимъ, она должна имѣть постоянную величину, напр. при $x = 0$ и при $x = 1$. Но при $x = 0$, $y = \frac{b}{b'}$; при $x = 1$, $y = \frac{a+b}{a'+b}$; слѣд. должно быть: $\frac{a+b}{a'+b'} = \frac{b}{b'}$, откуда, по свойству пропорціи, имѣемъ: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Это условіе, будучи необходимымъ, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно; ибо изъ него: $b' = \frac{a'b}{a}$, и слѣд. дробь обращается въ

$$\frac{ax+b}{a'\left(x+\frac{b}{a}\right)}, \text{ или въ } \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{a'\left(x+\frac{b}{a}\right)}, \text{ а это } = \frac{a}{a'}.$$

Итакъ, условіе необходимое и достаточное для того, чтобы наша дробь имѣла постоянную величину, есть $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, или $ab' - a'b = 0$, что и было найдено при изслѣдованіи.

2-й способъ. Пусть k будетъ эта постоянная, пока неизвѣстная, величина. Нахожденіе условія, необх. и дост. для того, чтобы $\frac{ax+b}{a'x+b'} = k$, сводится къ нахожденію условія, при которомъ было бы $ax + b = k(a'x + b')$, или $(a - a'k)x + (b - b'k) = 0$ при всякомъ x; а для этого необходимо и достаточно (§ 70), чтобы было: $a - a'k = 0$ и $b - b'k = 0$, или $k = \frac{a}{a'}$ и $k = \frac{b}{b'}$, откуда $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, или $ab' - a'b = 0$.

592. *Приложенія.— I. Изслѣдовать измѣненія x задачи § 367, полагая, что шарикъ, помѣщенный внѣ билліарда, можетъ свободно проникать внутрь круга и свободно возвращаться въ исходную точку?*

Для x мы имѣемъ формулу

$$x = \frac{R(R-a)}{2a}.$$

R — величина постоянная, слѣд. x измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ дробь $\frac{R-a}{2a}$. Эта дробь даетъ: $ab' - ba' = -2R$, а потому заключаемъ, что увеличенію a соотвѣтствуетъ уменьшеніе x-са. Формула даетъ: если $x = R$, то $a = \frac{R}{3}$; если же $a = \infty$, $x = -\frac{R}{2}$. Отсюда заключаемъ, что когда a возрастаетъ отъ своего minimum'а до $+\infty$, x уменьшается отъ своего maximum'а R до minimum'а $= -\frac{R}{2}$; такимъ образомъ сразу находимъ таблицу критическихъ величинъ x:

$$\begin{array}{c|l}
a & \frac{R}{3} \cdots \frac{R}{2} \cdots R \cdots +\infty \\
x & R \cdots \frac{R}{2} \cdots 0 \cdots -\frac{R}{2}.
\end{array}$$

II. Пересѣчь данный шаръ плоскостью такъ, чтобы объемъ одного изъ сегментовъ составлялъ данную дробь K объема цилиндра одной высоты и одного основанія съ сегментомъ. Между какими предѣлами можно задавать число K?

Обозначивъ высоту сегмента буквою x, найдемъ:

$$K = \frac{x - 3R}{3x - 6R}.$$

Будемъ измѣнять x отъ 0 до 2R. Такъ какъ $ab - ab = +3$, то функція K идетъ возрастая; при $x = 0$, $K = \frac{1}{2}$; при $x = 2R$, $K = \infty$. Отсюда таблица:

$$\begin{array}{ll} x & 0\ldots R\ldots 2R \\ K & \frac{1}{2}\ldots\frac{2}{3}\ldots\infty \end{array}$$

Слѣд. для K можно брать всѣ числа отъ $\frac{1}{2}$ до $+\infty$. Каждый разъ задача имѣетъ 1 рѣшеніе. Отношеніе шара къ описанному цилиндру равно $\frac{2}{3}$: результатъ, являющійся деталью изслѣдованія.

Примѣчаніе. Изъ числа дробныхъ функцій элементарному изслѣдованію подлежитъ еще квадратная дробь $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$; но изученіе ея раціональнѣе отнести къ спеціальной статьѣ о maxima и minima.

V. Примѣры изслѣдованія ирраціональныхъ функцій.

593. Примѣръ I. *Изслѣдовать функцію* $y = \sqrt{x^2+2x-3}$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Триномъ x^2+2x-3 имѣетъ дѣйствительные корни: -3 и $+1$; слѣд. онъ положителенъ при всѣхъ x, меньшихъ -3, а также большихъ $+1$, и отрицателенъ при всѣхъ значеніяхъ x, заключающихся между -3 и $+1$. Итакъ, функція y дѣйствительна при всѣхъ значеніяхъ x, лежащихъ внѣ корней тринома, и мнима для всякаго x, заключающагося между корнями.

Докажемъ, что она непрерывна для всѣхъ x, заключающихся между $-\infty$ и -3, и между $+1$ и $+\infty$. Пусть x' и $x'+h$ будутъ два значенія x, лежащихъ внѣ интервала отъ -3 до $+1$. Имѣемъ:

$$y' = \sqrt{x'^2+2x'-3} \text{ и } y'+K = \sqrt{(x'+h)^2+2(x'+h)-3};$$

отсюда

$$K = \sqrt{(x'+h)^2+2(x'+h)-3} - \sqrt{x'^2+2x'-3};$$

или, множа и дѣля вторую часть на сумму радикаловъ

$$K = \frac{h^2+2h(x'+1)}{\sqrt{(x'+h)^2+2(x'+h)-3}+\sqrt{x'^2+2x'-3}};$$

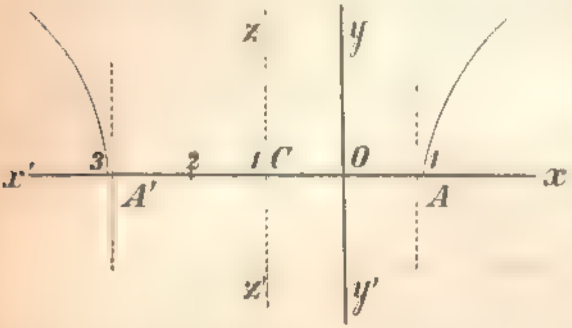
по мѣрѣ приближенія h къ нулю, числитель стремится къ нулю; знаменатель же, будучи дѣйствительнымъ при x' и $x'+h$, отличенъ отъ нуля, ибо эти значенія x отличны отъ -3 и $+1$. Слѣд. частное K стремится къ нулю вмѣстѣ съ h, а слѣд. функція y непрерывна въ указанныхъ интервалахъ ея дѣйствительности.

Сперва изслѣдуемъ измѣненія подрадикальнаго тринома, а отсюда и самой функціи; получаемъ таблицу:

$$\begin{array}{r|l} x & -\infty\ldots<\ldots-3\ldots<\ldots-1\ldots<\ldots+1\ldots<\ldots+\infty \\ x^2+2x-3 & +\infty\ldots>\ldots\quad 0\ldots>\ldots-4\ldots<\ldots\quad 0\ldots<\ldots+\infty \\ \sqrt{x^2+2x-3} & +\infty\ldots>\ldots\quad 0\ \text{—————————————}\ 0\ldots<\ldots+\infty. \end{array}$$

y — мнимый.

Не трудно изобразить измѣненія функціи графически. Для этого замѣтимъ, что триномъ имѣетъ равныя значенія, когда x получаетъ величины, равноотстоящія отъ -1; сл. и y имѣетъ это свойство, и потому кривая имѣетъ осью симметріи прямую ZZ′, параллельную оси y и отстоящую отъ этой оси на $OC = -1$.



Черт. 75.

Затѣмъ, кривая не имѣетъ точекъ между параллелями къ оси yy', находящимися отъ этой оси въ разстояніяхъ: $OA = +1$, $OA = -3$, ибо въ этихъ предѣлахъ y имѣетъ мнимыя значенія; наконецъ, кривая не имѣетъ точекъ, лежащихъ внизу отъ оси x, ибо y есть положительная величина $\sqrt{x^2+2x-3}$, по заданію.

Примѣръ II. *Изслѣдовать функцію* $y = \sqrt{-x^2-2x+3}$, *когда* x *измѣняется отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Корни тринома $-x^2-2x+3$ суть -3 и $+1$; изъ закона измѣненій тринома заключаемъ, что онъ имѣетъ положительныя величины только при x, содержащихся между -3 и $+1$; для всѣхъ значеній x, лежащихъ внѣ этихъ предѣловъ, триномъ отрицателенъ; слѣд. функція y дѣйствительна, когда x измѣняется внутри корней, и мнима при всѣхъ x, лежащихъ внѣ корней. Какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ докажемъ, что она непрерывна для интервалла отъ -3 до $+1$. Отсюда такая таблица измѣненій:

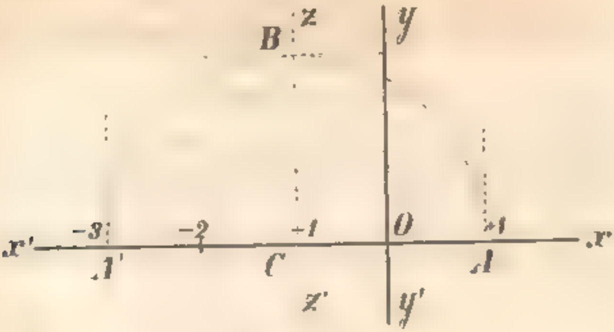
$$\begin{array}{rl} x & -\infty\ldots<\ldots-3\ldots<\ldots-1\ldots<\ldots+1\ldots<\ldots+\infty \\ -x^2-2x+3 & -\infty\ldots<\ldots\quad 0\ldots<\ldots+4\ldots>\ldots\quad 0\ldots>\ldots-\infty \\ \sqrt{-x^2-2x+3} & \text{—————————}\ 0\ldots<\ldots+2\ldots>\ldots\quad 0\ \text{———} \end{array}$$

y — мнимый. y — мнимый.

Итакъ, функція возрастаетъ отъ 0 (при $x = -3$) до $+2$ (при $x = -1$), затѣмъ уменьшается до 0 (при $x = +1$). Слѣд. она имѣетъ maximum $= +2$ при $x = -1$.

Кривая имѣетъ ось симметріи, параллельную yy' и проходящую черезъ точку C, причемъ $OC = -1$; на этой оси помѣщается maximum $= +2$. Кривая не имѣетъ точекъ внѣ параллелей оси yy', проведенныхъ черезъ точки A и A′, такія, что

$OA = 1$ и $OA' = -3$: она не имѣетъ точекъ внизу отъ оси xx'. Кривая эта — полуокружность центра C.



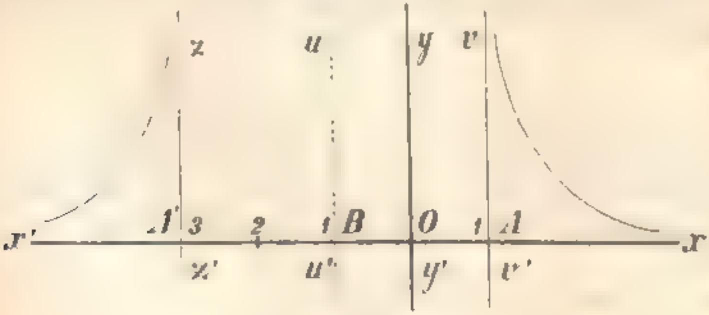
Черт. 76.

Примѣръ III. *Изслѣдовать функцію* $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$ *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Функція непрерывна въ интервалахъ: отъ $-\infty$ до -3 и отъ $+1$ до $+\infty$; и претерпѣваетъ разрывъ непрерывности отъ -3 до $+1$. Измѣненія ея обратны измѣненіямъ функціи $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$; отсюда таблица:

x	$-\infty \ldots < \ldots -3 \ldots < \ldots -1 \ldots < \ldots 1 \ldots < \ldots +\infty$
$x^2 + 2x - 3$	$+\infty \ldots > \ldots 0 \ldots > \ldots -4 \ldots < \ldots 0 \ldots < \ldots +\infty$
$\sqrt{x^2 + 2x - 3}$	$+\infty \ldots > \ldots 0 \quad - \quad - \quad 0 \ldots < \ldots +\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$	$0 \ldots < \ldots \infty \quad \infty \ldots > \ldots 0.$

Кривая функціи имѣетъ ось симметріи uu', параллельную оси yy' и опредѣляемую линіей $OB = -1$. Затѣмъ, она не имѣетъ точекъ между vv' и zz', параллельными оси yy' и отстоящими отъ этой оси на $OA = 1$ и $OA' = -3$.



Черт. 77.

Вмѣстѣ съ этимъ, тѣ же прямыя и ось xx' суть три ассимптоты кривой, которая, къ тому же, не имѣетъ точекъ внизу отъ оси x-овъ.

ГЛАВА XLI.

Образцы изслѣдованія вопросовъ второй степени.

Задача I.

594. *Раздѣлить данную прямую* AB *въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т.-е найти на ней такую точку* C, *чтобы большій отрѣзокъ* AC *былъ среднимъ пропорціональнымъ между всею линіею* AB *и меньшимъ ея отрѣзкомъ* BC.

По условію задачи должно быть: $\overline{AC}^2 = AB \times CB$, или, назвавъ данную прямую AB буквою a, разстояніе AC буквою x, и слѣд. обозначивъ BC разностью $a-x$, получимъ уравненіе

$$x^2 = a(a-x)\ .\ .\ .\ (1) \quad \text{или} \quad x^2 + ax - a^2 = 0\ .\ .\ .\ (2).$$

Изслѣдованіе. Чтобы корень ур—нія (2) представлялъ рѣшеніе задачи въ прямомъ смыслѣ, необходимо, чтобы онъ былъ дѣйствителенъ, положителенъ и былъ $<a$.

Ур—ніе (2) имѣетъ всегда корни дѣйствительные, потому что послѣдній членъ ($-a^2$) отрицателенъ; далѣе, корни имѣютъ противоположные знаки, такъ какъ произведеніе ихъ отрицательно ($=-a^2$); притомъ, меньшій по абсолютной величинѣ корень положителенъ, ибо сумма корней отрицательна ($=-a$). Остается убѣдиться, будетъ ли положительный корень меньше a, для этого подставляемъ въ триномъ, образующій первую часть ур—нія (2), вмѣсто x сперва 0, потомъ a, и замѣчаемъ, что результаты этихъ подстановокъ ($-a^2$ и $+a^2$) имѣютъ противоположные знаки. Слѣд. положительный корень меньше a: онъ даетъ точку C, лежащую между A и B и представляющую рѣшеніе задачи въ прямомъ смыслѣ.

Другой корень уравненія отрицателенъ; чтобы найти его значеніе, подставимъ въ ур—ніе (1), *первоначальное*, $-x$ вмѣсто x; получимъ ур—ніе

$$x^2 = a(a+x)\ .\ .\ .\ (3),$$

имѣющее корни равные по величинѣ, но противоположные по знаку корнямъ ур—нія (1). Такимъ образомъ, отрицательный корень ур—нія (1), взятый съ противоположнымъ знакомъ, представляетъ прямое рѣшеніе задачи, отвѣчающей ур—нію (3). Послѣднее, какъ непосредственно видно, опредѣляетъ точку C′, лежащую на продолженіи линіи BA вправо отъ A, и также удовлетворяющую вопросу: въ самомъ дѣлѣ, положивъ AC′ = x, имѣемъ BC′ = $a+x$, и ур—ніе (3) тождественно съ

$$\overline{AC'}^2 = AB \times BC'.$$

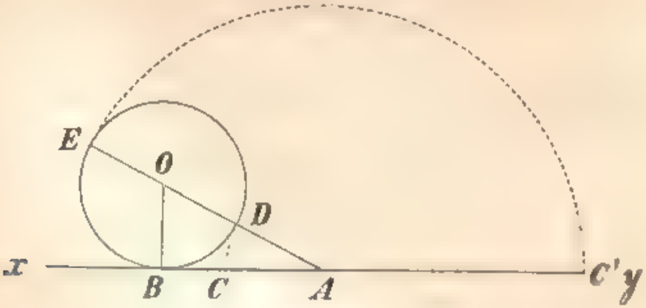
Итакъ, отрицательный корень даетъ другое рѣшеніе задачи, а знакъ этого корня показываетъ, что послѣдній долженъ быть нанесенъ на продолженіи линіи AB, въ сторону отъ A, противоположную первому корню. Алгебраическое рѣшеніе, кромѣ отвѣта на вопросъ въ тѣсномъ смыслѣ заданія, показало намъ, что вопросу, взятому въ болѣе широкомъ смыслѣ, удовлетворяютъ двѣ точки: C и C′, причемъ знаки корней указываютъ расположеніе этихъ точекъ относительно A.

Рѣшая ур—ніе (1), находимъ:

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$x'' = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Построеніе корней. Взявъ неограниченную прямую xy и на ней отрѣзокъ $AB = a$, возставляемъ къ этой прямой перпендикуляръ въ точкѣ B, откладываемъ на немъ часть $BO = \frac{a}{2}$; изъ точки O, какъ изъ центра, радіусомъ BO



Черт. 78.

описываемъ окружность, и соединивъ A съ центромъ, продолжаемъ прямую AO до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ E; другую точку пересѣченія назовемъ буквою D. Прямыя AD и AE представляютъ абсолютныя величины корней x' и x''. Въ самомъ дѣлѣ изъ прямоуг. треуг. AOB имѣемъ:

$$AO = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2};$$

слѣд.

$$AD = AO - OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = x',$$

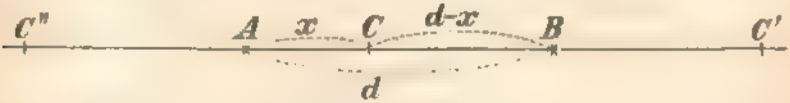
$$AE = AO + OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{a}{2} = -x''.$$

Остается нанести AD на AB влѣво отъ точки A, линію же AE на продолженіе AB вправо отъ A: для этого нужно засѣчь прямую xy двумя дугами круговъ, описанныхъ изъ точки A, какъ изъ центра, радіусами AD и AE. Такимъ образомъ получимъ требуемыя точки C и C'.

Задача II.

595. *На неограниченной прямой, соединяющей два источника свѣта* A *и* B, *найти точку, равноосвѣщенную обоими.*

Задача эта впервые появилась въ алгебрѣ *Клеро* (1746 г.), и съ тѣхъ поръ вошла въ учебники, какъ одинъ изъ поучительныхъ образцовъ изслѣдованія вопросовъ.



Черт. 79.

Обозначимъ разстояніе AB буквою d, разстояніе искомой точки C отъ A буквою x; тогда BC будетъ равно $d-x$. Далѣе, пусть сила освѣщенія источникомъ A тѣла, находящагося отъ него на единичномъ разстояніи, будетъ α, а сила освѣщенія источникомъ B на единичномъ разстояніи пусть будетъ β. Изъ физики извѣстно, что сила освѣщенія обратно пропорціональна квадрату разстоянія освѣщаемаго тѣла отъ источника. Слѣд., если сила освѣщенія источникомъ A на разстояніи 1 есть α, то на разстояніи 2, 3, 4 . . . единицъ она будетъ $\frac{\alpha}{2^2}$, $\frac{\alpha}{3^2}$, $\frac{\alpha}{4^2}$, . . . , а потому на разстояніи x она будетъ $\frac{\alpha}{x^2}$. Такимъ же образомъ, сила освѣщенія точки C источникомъ B будетъ $\frac{\beta}{(d-x)^2}$. Но, по условію задачи, точка C освѣщена обоими источниками одинаково, слѣд.

$$\frac{\alpha}{x^2}=\frac{\beta}{(d-x)^2}\ .\ .\ .\ (1)$$

или

$$(\alpha-\beta)\,x^2-2\alpha\,.\,d\,.\,x+d^2\alpha=0\ .\ .\ .\ (2).$$

Изслѣдованіе. Чтобы задача была возможна, нужно чтобы корни были дѣйствительны, т.-е. реализантъ не былъ бы отрицателенъ. Но реализантъ =

$$\alpha^2d^2-(\alpha-\beta)\,d^2\alpha=\alpha^2d^2-\alpha^2d^2+\alpha\beta d^2=\alpha\beta d^2,$$

а это есть количество положительное, такъ какъ, по натурѣ задачи, α и β суть количества существенно-положительныя. Итакъ, корни уравненія всегда дѣйствительны.

Для опредѣленія ихъ знаковъ обращаемся къ произведенію и суммѣ корней; имѣемъ

$$x'\,.\,x''=\frac{\alpha d^2}{\alpha-\beta},\quad x'+x''=\frac{2\alpha d}{\alpha-\beta},$$

гдѣ и d — количество положительное, въ частности, могущее обратиться и въ нуль. Отсюда возможные случаи таковы:

$$1)\ d>0,\ \alpha>\beta;\quad 2)\ d>0,\ \alpha<\beta;\quad 3)\ d>0,\ \alpha=\beta;\quad 4)\ d=0,\ \alpha\gtrless\beta;$$
$$\text{и}\quad 5)\ d=0,\ \alpha=\beta.$$

1-й случай: $d>0,\ \alpha>\beta$.

Произведеніе корней положительно; слѣдовательно, знаки ихъ одинаковы, сумма корней также положительна, слѣдовательно, оба корня положительны. Это значитъ, что въ данномъ случаѣ существуютъ двѣ точки, лежащія *вправо* отъ A, одинаково освѣщаемыя обоими источниками. Посмотримъ, какъ эти точки расположены относительно источника B.

Для этого надо сравнить корни съ линіей d. Подставивъ въ ур—ніе (2) вмѣсто x букву d, найдемъ:

$$f(d)=(\alpha-\beta)\,d^2-2\alpha d^2+\alpha d^2=-\beta d^2.$$

Результатъ подстановки отрицателенъ, т.-е. имѣетъ знакъ, противоположный знаку коэффиціента при x^2; заключаемъ, что d содержится между корнями, слѣдовательно, одинъ изъ нихъ меньше d, другой больше d. Итакъ, существуютъ *двѣ* равноосвѣщаемыя точки: одна, C, находится между A и B, другая, C', вправо отъ B.

Остается узнать, къ которому изъ данныхъ источниковъ первая точка, C, ближе: къ источнику A, или къ источнику B? Подстановка въ первую часть ур—нія (2) количества $\frac{d}{2}$ вмѣсто x, даетъ результатъ

$$f\left(\frac{d}{2}\right)=(\alpha-\beta)\frac{d^2}{4}-$$

положительный, т.-е. одного знака съ коэффиціентомъ при x^2. Это значитъ, что $\frac{d}{2}$ находится внѣ корней, и, очевидно, меньше меньшаго корня. Заключаемъ, что точка C находится ближе къ слабѣйшему источнику B, чего и слѣдовало ожидать. Что касается второй равноосвѣщаемой точки, C', то, находясь вправо отъ B, она также лежитъ ближе къ слабѣйшему источнику, какъ и должно быть.

2-й случай: $d > 0$, $\alpha < \beta$.

Произведеніе корней, имѣя въ этомъ случаѣ положительный числитель и отрицательный знаменатель, отрицательно; слѣдовательно, одинъ корень положителенъ, другой отрицателенъ. Сумма корней отрицательна, слѣдовательно абсолютное значеніе отрицательнаго корня больше.

Положительный корень даетъ точку, лежащую вправо отъ A. Для опредѣленія ея положенія относительно B, замѣчаемъ, что $f(d) = -\beta d^2$, т. е. имѣетъ знакъ коэффиціента при x^2; слѣдовательно, d находится внѣ корней, т.-е. положительный корень меньше d. Онъ даетъ точку, находящуюся между A и B. Къ которому источнику она ближе? Такъ какъ

$$f\left(\frac{d}{2}\right) = (\alpha - \beta)\frac{d^2}{4},$$

имѣетъ знакъ 1-го коэффиціента, то $\frac{d}{2}$ находится внѣ корней, т.-е. положительный корень $< \frac{d}{2}$. Это значитъ, что искомая точка C ближе къ источнику A, какъ и должно быть, ибо въ данномъ случаѣ этотъ источникъ слабѣе B.

Что касается отрицательнаго корня, то для истолкованія его обратимся къ ур—нію (I); подставивъ въ него $-x$ вмѣсто x, найдемъ ур—ніе

$$\frac{d}{x^2} = \frac{\beta}{(d+x)^2},$$

которое и получили бы, если бы искали равноосвѣщенную точку влѣво отъ A. Итакъ, отрицательный корень опредѣляетъ точку C'', лежащую *влѣво* отъ A. Дѣйствительно, такая точка, находясь ближе къ слабѣйшему источнику A, при надлежащемъ разстояніи отъ него, можетъ быть одинаково освѣщена обоими.

3-й случай: $d > 0$, $\alpha = \beta$.

Въ этомъ случаѣ коэффиціентъ при x^2 обращается въ нуль, и слѣдовательно, одинъ корень уравненія обращается въ *безконечность*, а другой найдемъ, отбросивъ членъ съ x^2, т.-е. взявъ ур—ніе

$$-2\alpha dx + \alpha d^2 = 0, \quad \text{или} \quad -2x + d = 0,$$

откуда

$$x = \frac{d}{2}.$$

Корень $x' = \frac{d}{2}$ означаетъ, что одна изъ искомыхъ точекъ находится какъ разъ въ срединѣ линіи AB, что и должно быть при равенствѣ освѣщенія обоими источниками.

Для истолкованія безконечнаго корня можно замѣтить, что при равенствѣ яркости источниковъ всякая точка, взятая на продолженіи линіи AB въ конечномъ разстояніи отъ источниковъ, будетъ освѣщаться ими неодинаково, но что чѣмъ дальше отодвигать эту точку, тѣмъ разница въ освѣщеніи будетъ становиться все меньше и меньше, но можетъ исчезнуть лишь при удаленіи точки въ безконечность. Можно обратиться также къ формулѣ корней. Написавъ ур—ніе въ видѣ

$$\left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{имѣемъ} \quad \frac{d-x}{x} = \pm\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}},$$

откуда найдемъ

$$x_1 = \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}, \quad x_2 = \frac{d\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}.$$

Первый корень при $\alpha = \beta$ дастъ первую изъ искомыхъ точекъ: $x_1 = \frac{d}{2}$.

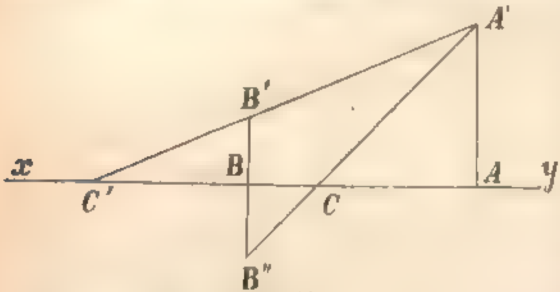
Если въ формулѣ x_2 взять сначала $\alpha > \beta$, то x_2 дастъ точку C′ вправо отъ A; по мѣрѣ приближенія α къ β, и слѣдовательно, знаменателя — къ нулю, x_2 будетъ болѣе и болѣе возрастать, и точка C′ удаляться вправо; наконецъ, когда α сдѣлается равнымъ β, точка C′ удалится на безконечно большое разстояніе вправо отъ A. Если бы α было въ началѣ меньше β, то корень x_2 далъ бы точку C″, лежащую влѣво отъ A; но мѣрѣ приближенія α къ β, она удалялась бы въ безконечность влѣво отъ A.

4-й случай: $d = 0, \quad \alpha \gtrless \beta.$

Ур—ніе обращается въ $(\alpha - \beta)x^2 = 0$, откуда $x' = x'' = 0$. Это значитъ, что только одна точка будетъ равно освѣщена: *та точка, въ которой находятся оба источника свѣта.*

5-й случай: $d = 0, \quad \alpha = \beta.$

Уравненіе принимаетъ видъ $0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x + 0 = 0$; ему удовлетворяетъ всякое значеніе x, такъ что число рѣшеній *неограниченно*, и задача *неопредѣленна*. И въ самомъ дѣлѣ, когда оба источника находятся въ одномъ мѣстѣ и равносильны, то всякая точка соединяющей ихъ прямой будетъ освѣщаться ими одинаково. Въ числѣ ихъ находится и сама точка, гдѣ помѣщены оба источника, и которую опредѣляетъ первый корень x', равный въ этомъ случаѣ нулю.



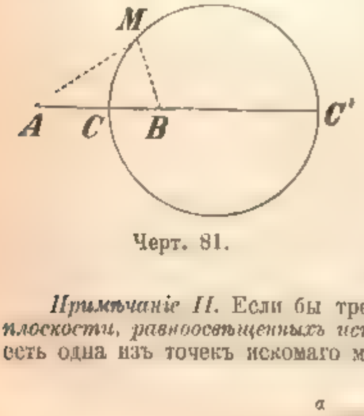
Черт. 80.

Примѣчаніе I. Нетрудно *построить* обѣ равноосвѣщенныя точки. Возставивъ въ точкѣ A (черт. 80) перпендикуляръ равный $\sqrt{\alpha}$, а въ точкѣ B два перпендикуляра, одинъ кверху, другой книзу отъ линіи xy, равные $\sqrt{\beta}$, проводимъ прямыя A′B′ и A′B″, изъ коихъ первая пересѣчетъ линію xy въ точкѣ C′, вторая въ C. Это и будутъ искомыя точки; въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{BB''}{BC}, \text{ или } \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{d-x};$$

$$\frac{AA'}{AC'} = \frac{BB'}{BC'}, \text{ или } \frac{\sqrt{\alpha}}{x} = \frac{\sqrt{\beta}}{x-d} = -\frac{\sqrt{\beta}}{d-x}.$$

Результаты алгебраическаго изслѣдованія предоставляемъ читателю вывести изъ этого чертежа.



Черт. 81.

Примѣчаніе II. Если бы требовалось найти *геометрическое мѣсто точекъ плоскости, равноосвѣщенныхъ источниками* A *и* B, то, положивъ, что M (черт. 81) есть одна изъ точекъ искомаго мѣста, мы нашли бы, что

$$\frac{\alpha}{\overline{AM}^2} = \frac{\beta}{\overline{BM}^2}, \text{ или } \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}.$$

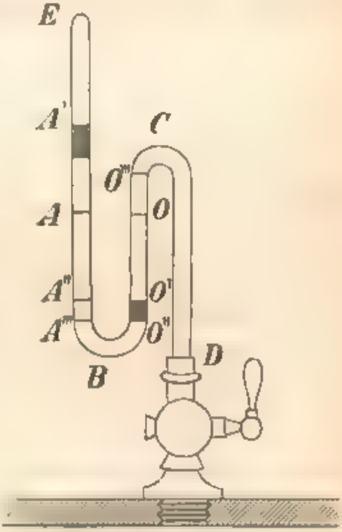
Заключаемъ, что искомое мѣсто есть мѣсто такихъ точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ A и B имѣетъ данную величину. Изъ геометріи извѣстно, что это есть окружность, описанная на прямой CC' (точки C и C' опредѣляются построеніемъ, указаннымъ въ примѣчаніи I, какъ на діаметрѣ.

Примѣчаніе III. Если бы требовалось опредѣлить *мѣсто точекъ въ пространствѣ, равноосвѣщаемыхъ точками* A *и* B, то достаточно было бы обернуть окружность MCC' около діаметра CC': точки полученной шаровой поверхности и были бы требуемыя.

Наконецъ, если бы требовалось найти *точки равноосвѣщенныя источниками* A *и* B, *на нѣкоторой линіи или на поверхности*, расположенныхъ вблизи точекъ A и B, то очевидно, что искомыя точки были бы общими точками данной линіи или поверхности съ вышеуказанною сферою. Въ случаѣ поверхности, этихъ точекъ было бы безконечное множество, но могла бы быть и одна только искомая точка, если бы сфера и поверхность были касательны; могло бы и не быть искомыхъ точекъ, если бы поверхность и сфера не имѣли общихъ точекъ.

Задача III.

596. *Манометръ со сжатымъ воздухомъ состоитъ изъ дважды согнутой, строго цилиндрической трубки* ABOD; *вѣтвь* EB *содержитъ сухой воздухъ; согнутая часть* B — *ртуть, а вѣтвь* OD *находится въ сообщеніи съ паровымъ котломъ паровой машины. Когда уровень ртути стоитъ на одной горизонтальной плоскости* AO, *давленіе воздуха въ манометрѣ равно давленію атмосферы; когда давленіе въ котлѣ увеличивается, ртуть поднимается въ вѣтви* BE *и на столько же опускается въ* BO. *Зная, что* $AE = l$, *что давленіе атмосферы* = H, *вычислить высоту x уровня* A' *надъ* A, *если давленіе въ котлѣ равно n атмосферамъ.*



Черт. 82.

Рѣшеніе. Ртуть въ трубкѣ BE перестанетъ подниматься и остановится въ A', когда упругость воздуха, сжатаго въ этой вѣтви, увеличенная колонною A'A'' ртути, уравновѣситъ давленіе въ котлѣ. Высота $A'A'' = 2AA' = 2x$.

Новое давленіе y воздуха, сжатаго въ A'E, опредѣляется по *закону Маріотта*, именно: если температура не измѣняется, то давленія, производимыя одною и тою же массою газа, обратно пропорціональны объемамъ, ею занимаемымъ. Въ данномъ случаѣ, объемы, послѣдовательно занимаемые воздухомъ въ манометрѣ, суть цилиндры, имѣющіе одинаковое основаніе, а высоты l и $l - x$; слѣд., назвавъ сѣченіе трубки буквою ω, имѣемъ:

$$\frac{\omega l}{\omega (l - x)} = \frac{y}{H}, \text{ откуда } y = H \times \frac{l}{l - x}.$$

Такъ какъ давленіе въ котлѣ равно nH, то ур. задачи будетъ:

$$nH = 2x + H \times \frac{l}{l - x},$$

или, по освобожденіи отъ знаменателя:

$$2x^2 - (2l + nH)x + l(n - 1)H = 0 \ . \ . \ . (1).$$

Рѣшивъ его, найдемъ:

$$x = \frac{2l + nH \pm \sqrt{(2l + nH)^2 - 8l(n-1)H}}{4},$$

или

$$x = \frac{2l + nH \pm \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}{4}.$$

Изслѣдованіе. Чтобы тотъ или другой корень удовлетворялъ задачѣ, онъ долженъ быть дѣйствительнымъ, положительнымъ и $< l$. Такъ какъ подъ знакомъ радикала находится существенно-положительное количество, то оба корня всегда дѣйствительны. Если $n > 1$, то произведеніе корней будетъ положительно, а какъ и сумма ихъ положительна, то оба корня будутъ положительны. Но какъ неизвѣстное должно быть еще $< l$, то нужно убѣдиться, имѣетъ ли ур—ніе корень, меньшій l. Подставляя l вмѣсто x въ первую часть ур—нія (1), найдемъ

$$2l^2 - 2l^2 - nHl + lnH - lH \quad \text{или} \quad -lH,$$

т.-е. результатъ отрицательный; это значитъ, что l заключается между корнями ур—нія (1), и слѣдовательно меньшій корень $< l$, а большій $> l$. Задачѣ отвѣчаетъ меньшій корень, слѣдовательно

$$x' = \frac{2l + nH - \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}{4} \quad . \; . \; . \; (2)$$

и есть искомый отвѣтъ.

Примѣчаніе I. Если n неограниченно увеличивать, то при $n = \infty$ корень x' принимаетъ неопредѣленный видъ $\infty - \infty$; чтобы найти истинное значеніе этой неопредѣленности, нужно числ. и знам. умножить на $2l + nH + \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}$; найдемъ

$$x' = \frac{2l(n-1)H}{2l + nH + \sqrt{(nH - 2l)^2 + 8lH}}.$$

При $n = \infty$ это выраженіе принимаетъ неопредѣленную форму вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытія которой дѣлимъ числ. и знам. на n; такимъ образомъ получимъ

$$x' = \frac{2l\left(1 - \frac{1}{n}\right)H}{\frac{2l}{n} + H + \sqrt{\left(H - \frac{2l}{n}\right)^2 + \frac{8lH}{n^2}}},$$

а положивъ здѣсь $n = \infty$, найдемъ

$$x' = \frac{2lH}{H + H} = \frac{2lH}{2H} = l.$$

Это значитъ, что по мѣрѣ того какъ давленіе увеличивается, уровень A' ртутной колонны болѣе и болѣе приближается къ вершинѣ E трубки BE.

Примѣчаніе II. Если давленіе въ котлѣ сдѣлается меньше атмосферы, уровень ртути опустился до A''' ниже точки A въ колѣнѣ EB, и поднимается до O''' въ BO, причемъ AA'' = OO''. Равновѣсіе наступитъ тогда, когда давленіе y воздуха въ манометрѣ будетъ равно давленію пара + колонна ртути O''O'', равная 2AA''. Если новое неизвѣстное AA'' назовемъ буквою z, y опредѣлится изъ пропорціи

$$\frac{l}{l + z} = \frac{y}{H}, \text{ откуда } y = H \cdot \frac{l}{l + z};$$

новое ур—ние задачи будетъ

$$nH = H \cdot \frac{l}{l+z} - 2z,$$

или

$$2z^2 + (2l + nH)\,z + l\,(n-1)\,H = 0 \;.\;.\;.\;(3);$$

оно отличается отъ (1) только перемѣною x на $-z$; слѣдов. корни (3) равны по величинѣ и противоположны по знаку корнямъ (1). Такъ какъ здѣсь $n < 1$, то произведеніе корней отрицательно, слѣд. одинъ корень ур—нія (3) положителенъ, другой отрицателенъ; новому вопросу отвѣчаетъ положительный корень

$$z' = \frac{-(2l + Hn) + \sqrt{(2l - nH)^2 + 8lH}}{4}.$$

Сличая z' съ x', видимъ, что рѣшеніе x' (2) примѣнимо къ обоимъ случаямъ: $n > 1$ и $n < 1$; достаточно только откладывать отрицательныя значенія, которыя можетъ получать выраженіе (2), внизъ отъ точки А.

Задача IV.

597. *Тяжелое тѣло брошено въ пустотѣ вертикально вверхъ съ начальною скоростью* V_0; *опредѣлить, въ какое время оно достигнетъ высоты* h *надъ начальною точкою?*

Въ равномѣрно-замедлительномъ движеніи, какое имѣетъ тяжелое тѣло, поднимающееся вверхъ, пройденное пространство l связано съ временемъ t, употребленнымъ на его прохожденіе, формулою

$$l = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \;.\;.\;.\;(1).$$

Слѣдовательно, если искомое время назовемъ буквою x, то это неизвѣстное должно удовлетворять ур—нію

$$h = V_0 x - \frac{1}{2} g x^2,$$

или

$$g x^2 - 2V_0 x + 2h = 0 \;.\;.\;.\;(2)$$

Изслѣдованіе. Чтобы x, выведенное изъ этого ур—нія, давало отвѣтъ на вопросъ, нужно, чтобы рѣшеніе было дѣйствительно и положительно. Условіе дѣйствительности корней ур—нія (2) таково:

$$V_0^2 - 2gh \geqslant 0, \quad \text{или} \quad h \leqslant \frac{V_0^2}{2g}.$$

Итакъ, различаемъ три случая:

Первый случай: $h > \frac{V_0^2}{2g}$.

Корни ур—нія (2) мнимы, слѣд. задача невозможна. Это очевидно à priori. Въ самомъ дѣлѣ, тѣло остановится, когда его уменьшающаяся скорость обратится въ нуль. Но скорость въ концѣ времени t опредѣляется формулою: $V = V_0 - gt$; слѣд. она обратится въ нуль, когда время $t = \frac{V_0}{g}$; пройденное до этого момента пространство будетъ $l = V_0 \cdot \frac{V_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 = \frac{V_0^2}{2g}$. Это есть maximum высоты, до которой можетъ подняться тѣло при начальной скорости V_0.

Второй случай: $h = \frac{V_0^2}{2g}$.

Корни ур—нія (2) въ этомъ случаѣ—дѣйствительные равные, а общая величина ихъ есть $\frac{V_0}{g}$, что согласно съ вышеуказаннымъ результатомъ.

Третій случай: $h < \frac{V_0^2}{2g}$.

Въ этомъ случаѣ ур—ніе (2) имѣетъ корни дѣйствительные, неравные и оба положительные (послѣднее потому что ихъ произведеніе $\frac{2h}{g}$ и сумма $\frac{2V_0}{g}$ положительны).

Чтобы дать себѣ отчетъ въ происхожденіи этихъ *двухъ* положительныхъ корней, замѣтимъ, что тѣло при движеніи бываетъ дважды въ точкѣ M, отстоящей по вертикали на h отъ A: одинъ разъ летя вверхъ, другой разъ, падая внизъ. Оба положительные корня и даютъ эти времена. Въ самомъ дѣлѣ, эти корни суть

Черт. 83.

$$x' = \frac{V_0}{g} - \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}; \quad x'' = \frac{V_0}{g} + \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Припомнимъ, что сколько времени тѣло употребляетъ на поднятіе отъ M до B, столько же и на паденіе отъ B до M. Пусть это время $= \Theta$; слѣд. взявъ случай паденія, имѣемъ $BM = \frac{1}{2} g\Theta^2$ или $\frac{V_0^2}{2g} - h = \frac{1}{2} g\Theta^2$, откуда

$$\Theta = \frac{\sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Затѣмъ, зная, что $\frac{V_0}{g}$ есть время кульминаціи, находимъ, что меньшій корень, x', представляетъ разность между временемъ кульминаціи и временемъ, необходимымъ тѣлу на прохожденіе вверхъ разстоянія BM, слѣд. *время до кульминаціи*, въ которое тѣло находится отъ точки A на высотѣ h; большій корень, x'', представляетъ сумму временъ, необходимыхъ тѣлу на поднятіе вверхъ до высшей точки B и затѣмъ на паденіе внизъ до M, слѣд. *время послѣ кульминаціи*, въ которое тѣло находится отъ A на высотѣ h.

Задача V.

598. *Отъ момента, въ который наблюдатель, стоящій у отверстія колодца, выпустилъ изъ рукъ камень, до момента, въ который услышалъ были удара камня о воду, прошло t секундъ. Найти глубину колодца, зная: 1) что звукъ распространяется равномѣрно со скоростью v, 2) что связь между пространствомъ l, пройденнымъ при свободномъ паденіи, и временемъ Θ паденія выражается формулою $l = \frac{1}{2} g\Theta^2$, гдѣ g—ускореніе тяжести.*

Рѣшеніе. Пусть искомая глубина колодца будетъ x, данное время t составляется изъ двухъ частей:

1) Изъ времени y, которое камень употребляетъ на прохожденіе свободнымъ паденіемъ глубины x колодца, причемъ связь между x и y выражается формулою $x = \frac{1}{2} gy^2$, изъ которой

$$y = \sqrt{\frac{2x}{g}};$$

2) изъ времени z, въ которое звукъ проходитъ разстояніе x равномѣрнымъ движеніемъ со скоростью v, причемъ по закону равномѣрнаго движенія $x=zv$, откуда

$$z=\frac{x}{v}.$$

Приравнивая $z+y$ данному времени t, имѣемъ ур—ніе

$$\frac{x}{v}+\sqrt{\frac{2x}{g}}=t\ .\ .\ .\ (1).$$

Это уравненіе—ирраціональное; для рѣшенія его, изолируемъ радикалъ.

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v}\ .\ .\ .\ (2)$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадратъ, что даетъ послѣдовательно:

$$\frac{2x}{g}=t^2-\frac{2tx}{v}+\frac{x^2}{v^2},\quad \text{или}\quad gx^2-2v(v+gt)x+gv^2t^2=0\ .\ .\ .\ (3).$$

Изслѣдованіе. Ур—ніе (3) не эквивалентно (2)-му, ибо оно есть то же, что ур—ніе

$$\frac{2x}{g}=\left(t-\frac{x}{v}\right)^2,$$

но послѣднее есть результатъ возвышенія въ квадратъ какъ даннаго ур—нія

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v},$$

такъ и ур—нія

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v}.$$

Чтобы корень ур—нія (3) удовлетворялъ данному ур—нію, нужно, чтобы онъ обращалъ разность $t-\frac{x}{v}$ въ количество положительное, т. е. удовлетворялъ бы неравенству

$$t-\frac{x}{v}>0,\quad \text{или}\quad x<vt.$$

Итакъ, чтобы корень ур—нія (3) представлялъ отвѣтъ на данную задачу, нужно, чтобы онъ былъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и меньше vt.

Чтобы корни ур—нія (3) были дѣйствительны, необходимо и достаточно, чтобы было

$$v^2(v+gt)^2-g^2v^2t^2\geqslant 0,\quad \text{или}\quad v^2(v^2+2gvt)\geqslant 0.$$

Но каждое изъ количествъ g, v и t положительно, слѣд. условіе дѣйствительности всегда удовлетворено.

Затѣмъ, оба корня положительны, потому что произведеніе ихъ v^2t^2 и сумма $\frac{2v(v+gt)}{g}$ — положительна. Остается убѣдиться, будетъ ли хотя одинъ изъ корней $<vt$. Для этого въ триномъ, составляющій первую часть ур—нія (3), подставляемъ vt вмѣсто x; получимъ: $gv^2t^2-2v(v+gt)vt+gv^2t^2$, или $-2v^3t$, результатъ отрицательный, т. е. противоположнаго знака коэффиціенту g при x^2 въ триномѣ (3). Это значитъ, что vt содержится между корнями ур—нія (3), и слѣд. меньшій корень $<vt$, и только онъ одинъ даетъ отвѣтъ на задачу. Итакъ

$$x=\frac{v}{g}(v+gt-\sqrt{v^2+2gvt})\ .\ .\ .\ (4).$$

Задача VI.

599. *Построить прямоугольный треугольникъ, зная его периметръ $2p$ и площадь m^2.*

Рѣшеніе. Обозначимъ искомые катеты буквами x и y, а гипотенузу z; найдемъ уравненія

$$x + y + z = 2p \ . \ . \ . (1)$$
$$x^2 + y^2 = z^2 \ . \ . \ . (2)$$
$$xy = 2m^2 \ . \ . \ . (3).$$

Изъ (1) имѣемъ $x + y = 2p - z$; возвысивъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ и замѣнивъ $x^2 + y^2$ равнымъ этой суммѣ количествомъ z^2 [изъ (2)], получаемъ. $z^2 + 2xy = (2p - z)^2$; или, замѣчая, что по (3): $2xy = 4m^2$, находимъ, раскрывъ $(2p - z)^2$:

$$z^2 + 4m^2 = 4p^2 - 4pz + z^2,$$

откуда

$$z = \frac{p^2 - m^2}{p} \ . \ . \ . (4).$$

Подставляя вмѣсто z это значеніе въ ур. (1), имѣемъ:

$$x + y = \frac{p^2 + m^2}{p} \ . \ . \ . (5)$$

Изъ ур—ній (3) и (5) видно, что x и y суть корни квадратнаго уравненія

$$pu^2 - (p^2 + m^2)u + 2pm^2 = 0 \ . \ . \ . (6)$$

откуда:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{p^2 + m^2 \mp \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}}{2p} \ . \ . \ . (7).$$

Изслѣдованіе. Чтобы корни, опредѣляемые вышеданными формулами, представляли отвѣтъ на задачу, они должны быть дѣйствительны, положительны и, каждый, $< p$.

Формула (4) показываетъ. что z дѣйствительно; оно будетъ положительно, если взять $m < p$; но въ такомъ случаѣ z будетъ и меньше p. Итакъ, должно быть

$$m < p \ . \ . \ . (8).$$

Чтобы x и y были дѣйствительны, необходимо, чтобы было

$$(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2 > 0, \quad \text{или} \quad (p^2 + m^2)^2 - (2\sqrt{2} \,.\, pm)^2 \geqq 0,$$

или

$$(p^2 + m^2 + 2\sqrt{2} \,.\, pm)(p^2 + m^2 - 2\sqrt{2} \,.\, pm) \geqq 0,$$

т.-е. оба множителя 1-й части должны имѣть одинаковый знакъ; но какъ первый множитель положителенъ, то и второй долженъ быть >0, такимъ образомъ, располагая по степенямъ m, имѣемъ неравенство

$$m^2 - 2\sqrt{2} \,.\, p \,.\, m + p^2 \geqq 0.$$

Корни этого тринома суть: $m' = p(\sqrt{2} - 1)$ и $m'' = p(\sqrt{2} + 1)$, и какъ триномъ долженъ имѣть знакъ перваго члена, то m должно лежать внѣ корней, т.-е. должно быть

$$m \leqq p(\sqrt{2} - 1) \ . \ . \ . (9) \quad \text{или} \quad m \geqq p(\sqrt{2} + 1) \ . \ . \ . (10).$$

Но неравенство (10), будучи не необходимо, противорѣчитъ необходимому неравенству (8), и потому должно быть отброшено. Тогда останутся два неравенства одинаковаго смысла (8) и (9); но какъ первое изъ нихъ заключается во второмъ, то остается послѣднее, т.-е.

$$m \leqq p(\sqrt{2} - 1).$$

Разъ оно удовлетворено, x и y будутъ дѣйствительны, но въ такомъ случаѣ они будутъ и положительны, ибо ихъ произведеніе $2m^2$ и сумма $\frac{p^2+m^2}{p}$ положительны. Кромѣ того, x и y будутъ и меньше p. Въ самомъ дѣлѣ,

$$f(p)=p^3-p^3-m^2p+2m^2p=m^2p,$$

слѣдовательно, положительна; это значитъ, что p находится внѣ интервала корней ур—нія (6), и какъ полусумма этихъ корней, равная $\frac{p^2+m^2}{2p}$, меньше p (ибо при условіи $m^2<p^2$ имѣемъ $\frac{p^2+m^2}{2p}<\frac{2p^2}{2p}$, т.-е. $<p$), то расположеніе корней x и y и числа p на скалѣ дѣйствительныхъ чиселъ таково:

$$x\ldots y\ldots p,$$

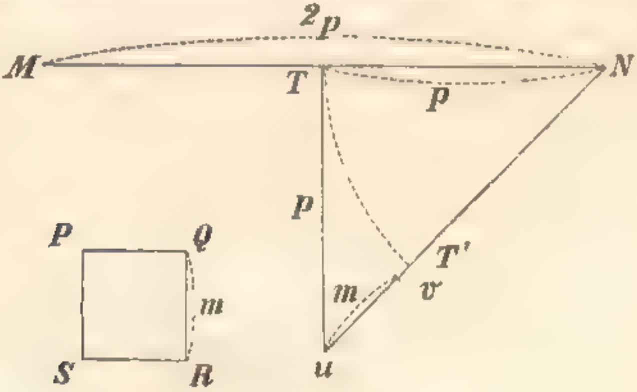
т.-е. x и y, каждое, меньше p.

Заключаемъ, что единственное условіе возможности задачи есть

$$m\leqq p(\sqrt{2}-1).$$

Итакъ, числа x, y и z, будучи дѣйствительными, положительными, меньшими p и удовлетворяя ур—нію (2), служатъ мѣрами сторонъ прямоугольнаго треугольника, который и можетъ быть построенъ.

Неравенство (9) показываетъ, что *наибольшая величина* или *maximum m* есть $p(\sqrt{2}-1)$; такъ какъ это есть одинъ изъ корней подрадикальнаго тринома, то послѣдній при $m=p(\sqrt{2}-1)$ обратится въ нуль, x и y сдѣлаются равными, а треугольникъ равнобедреннымъ, такъ что находимъ теорему: *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь* (ибо при наиб. значеніи m, и m^2 имѣетъ наиб. значеніе).



Черт. 84.

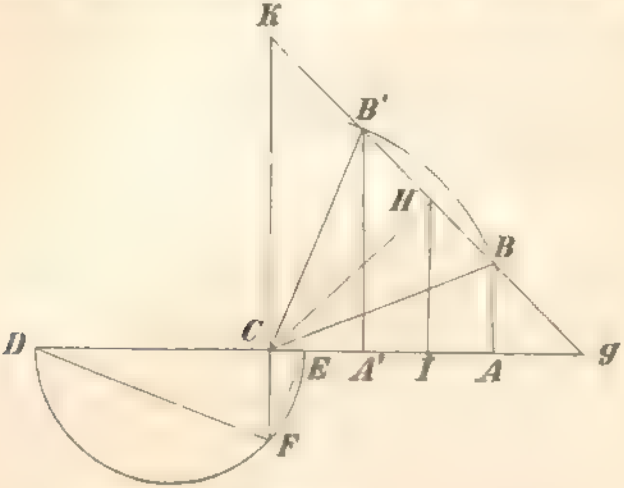
Примѣчаніе. Если бъ мы рѣшили неравенства относительно p, то легко нашли бы подобнымъ же образомъ, что: *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую площадь, равнобедренный имѣетъ наименьшій периметръ.*

Построеніе. Пусть данный периметръ $2p$ равенъ линіи MN, а данный квадратъ стороны m равенъ PQRS. Раздѣливъ линію MN пополамъ, возставимъ въ точкѣ T перпендикуляръ $TU=TN=p$, и соединимъ U съ N: изъ прямоугольнаго треугольника NTU имѣемъ: $NU=p\sqrt{2}$. Описавъ изъ точки N, какъ изъ центра, дугу радіусомъ $=p$, получимъ: $UT'=p(\sqrt{2}-1)$. Изслѣдованіе намъ показало, что для возможности задачи сторона m квадрата m^2 не должна превышать линіи UT': беремъ для заданнаго квадрата сторону, равную $UV<UT'$.

Строимъ z по формулѣ (4). Для этого, взявъ прямую DG $=2p$, на половинѣ ея DE описываемъ полуокругъ, наносимъ въ немъ хорду EF $=m$, опускаемъ перпендикуляръ FC на DE, и соединяемъ точки D и F. Изъ прямоугольнаго треугольника DEF имѣемъ: $DF^2=DE^2-EF^2=p^2-m^2$, съ другой стороны: $DF^2=DE\times DC=p\times DC$, слѣдовательно $p\times DC=p^2-m^2$, откуда

$$DC=\frac{p^2-m^2}{p}=z.$$

Замѣчая, что $CG=DG-DC=2p-z$, изъ ур—нія (1) видимъ, что $CG=x+y$.



Черт. 85.

Допустивъ, что CAB есть требуемый треугольникъ, имѣемъ:

$$CA+AB=x+y=CG=CA+AG,$$

откуда

$$AB=AG,$$

слѣдовательно уголъ G треугольника ABG равенъ 45°, при этомъ $CB=CD=z$.

Поэтому въ треугольникѣ BCG извѣстны стороны CB и CG и уголъ G, такъ что дальше продолжаемъ построеніе такъ: продолжаемъ FC и беремъ $CK=CG$, соединяемъ точки K и G и опускаемъ перпендикуляръ CH на KG, который раздѣлитъ прямую KG въ точкѣ H пополамъ. Не трудно удостовѣриться, что въ разсматриваемомъ случаѣ $CD>CH$, поэтому, описавъ изъ C, какъ изъ центра, дугу радіусомъ CD, найдемъ, что она пересѣчетъ линію KG въ двухъ точкахъ B и B'. Опустивъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры BA и B'A' на CG, найдемъ два требуемыхъ треугольника ABC и A'B'C; легко видѣть, что они равны. Въ самомъ дѣлѣ CG, равно и AA' въ точкѣ I дѣлятся пополамъ, поэтому

$$AG=AB=A'C;\quad \text{а также}\quad CB=CB'.$$

При условіи $m=p(\sqrt{2}-1)$ легко видѣть, что будетъ $CD=CH$, и задача имѣетъ одно рѣшеніе: равнобедренный треугольникъ CHI. Наконецъ, при $m>p(\sqrt{2}-1)$, будетъ $CD<CH$, и задача невозможна.

Задача VII.

600. *Зная высоту h усѣченнаго конуса, его объемъ V и радіусъ R одного изъ основаній, вычислить радіусъ x другого основанія.*

Рѣшеніе. Объемъ конуса, усѣченнаго параллельно основанію, дается формулою: $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rx+x^2)$, и если данный объемъ V мы представимъ въ видѣ конуса той же высоты h, какъ и искомый, съ радусомъ a основанія, т.-е. положимъ $V = \frac{1}{3}\pi h a^2$, то прямо получимъ ур—ніе

$$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rx + x^2) = \frac{1}{3}\pi h \cdot a^2, \quad \text{или} \quad x^2 + Rx + R^2 - a^2 = 0 \ . \ . \ . \ (1),$$

откуда
$$x = \frac{-R \pm \sqrt{4a^2 - 3R^2}}{2}.$$

Изслѣдованіе. Если предположить, что искомый усѣченный конусъ состоитъ изъ двухъ конусовъ, сложенныхъ вершинами, т.-е. представляетъ усѣченный конусъ 2-го рода, то нашли бы ур—ніе

$$x^2 - Rx + R^2 - a^2 = 0 \ . \ . \ . \ (2),$$

отличающееся отъ перваго только перемѣною x на $-x$; слѣдов. отрицательные корни ур—нія (1) служатъ положительными корнями (2), и потому даютъ рѣшенія 2-го рода.

Зная это, обратимся къ изслѣдованію ур—нія (1).

Условіе дѣйствительности корней, какъ легко видѣть, выражается неравенствомъ $a^2 \geqslant \frac{3}{4}R^2$.

Знаки корней. *Произведеніе корней*, равное $R^2 - a^2$, будетъ >0 при $a^2 < R^2$, $=0$ при $a^2 = R^2$ и <0 при $a^2 > R^2$.

Сумма корней, равная $-R$, всегда отрицательна. Такимъ образомъ, критическія значенія a^2, въ восходящемъ порядкѣ, суть 0, $\frac{3}{4}R^2$ и R^2, и легко составить слѣдующую таблицу знаковъ,

Значенія a^2	0		$\frac{3}{4}R^2$		R^2	
Реализантъ		−		+		+
Произв. корней				+		—
Сумма корней				—		

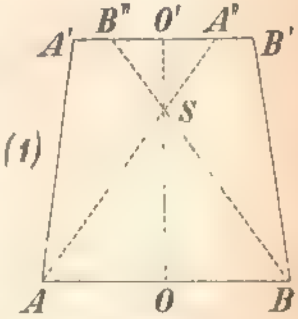
изъ которой тотчасъ выводимъ заключенія:

1) $a^2 < \frac{3}{4}R^2$. Реализантъ отрицателенъ, слѣд. корни ур—нія (1) мнимы, и *задача невозможна*.

2) $a^2 = \frac{3}{4}R^2$, (minimum a^2). Въ этомъ случаѣ

$$x = -\frac{R}{2},$$

что даетъ усѣченный конусъ 2-го рода, у котораго радіусъ верхняго основанія вдвое меньше радіуса нижняго основанія. Это значитъ, что изъ всѣхъ усѣченныхъ конусовъ 1-го или 2-го рода, которые можно построить на данномъ основаніи и съ данною высотою, наименьшій объемъ принадлежитъ конусу 2-го рода ABSB″A″ (черт. 86), котораго вершина находится на $\frac{2}{3}$ высоты отъ нижняго основанія.



Черт. 86.

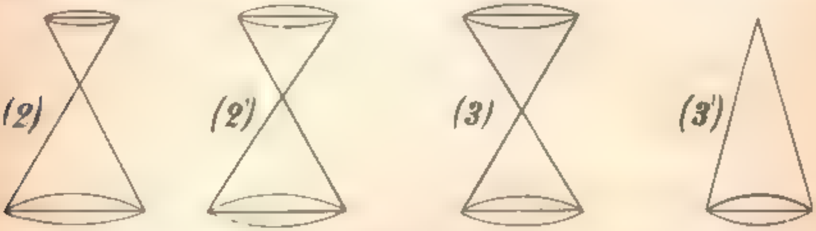
3) $\frac{3}{4}R^2 < a^2 < R^2$. Произведеніе корней ур—нія (1) положительно, а сумма

ихъ отрицательна ($-R$), слѣдов. оба корня отрицательны и даютъ два рѣшенія 2-го рода (2) и (2'), которыхъ основанія расположены по обѣ стороны точки S (1).

4) $a^2=R^2$. Ур. (1) приводится къ $x^2+Rx=0$ и имѣетъ корни:

$$x=0,\quad x=-R.$$

Второй корень даетъ усѣченный конусъ 2-го рода (3), имѣющій вершину въ срединѣ высоты; первое рѣшеніе даетъ полный конусъ (3'), который по произволу можно разсматривать или какъ усѣченный 1-го рода, или какъ усѣченный конусъ 2-го рода.



Черт. 87.

5) $a^2>R^2$. Произведеніе и сумма корней ур—нія (1) отрицательны; слѣдов. одинъ корень положителенъ, а другой отрицателенъ, причемъ абсолют. знач. послѣдняго больше первый даетъ усѣченный конусъ 1-го рода, второй—2-го рода, какъ на черт. (1), только радіусъ O'A' длиннѣе O'B'.

Если, теперь, помножить обѣ части предыдущихъ равенствъ и неравенствъ на $\frac{1}{3}\pi h$, чтобы ввести данный объемъ V, то все изслѣдованіе можно резюмировать такъ:

Резюме изслѣдованія.

$V<\frac{1}{4}\pi R^2h$ . . . x' и x'' мнимы : 0 рѣшеній.

$V=\frac{1}{4}\pi R^2h$ . . . $x'=x''=-\frac{R}{2}$ даетъ : 1 рѣш. 2-го рода.

minimum для V.

$V>\frac{1}{4}\pi R^2h$ $\begin{cases} V<\frac{1}{3}\pi R^2h\ .:\ x'<0,\ \ x''<0:\ 2\ \text{рѣшенія 2-го рода.} \\ V=\frac{1}{3}\pi R^2h\ .:\ x'=-R,\ x''=0:\ 2\ \text{рѣшенія 2-го рода.} \\ V>\frac{1}{3}\pi R^2h\ .:\ x'<0,\ \ x''>0:\ 1\ \text{рѣш. 1-го и 1 рѣш. 2-го рода.} \end{cases}$

601. Изслѣдованіе измѣненія объема V. Для объема V мы нашли формулу: $V=\frac{1}{3}\pi h(x^2+Rx+R^2)$, которую можно написать въ видѣ

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left[\left(x+\frac{R}{2}\right)^2+\frac{3}{4}R^2\right].$$

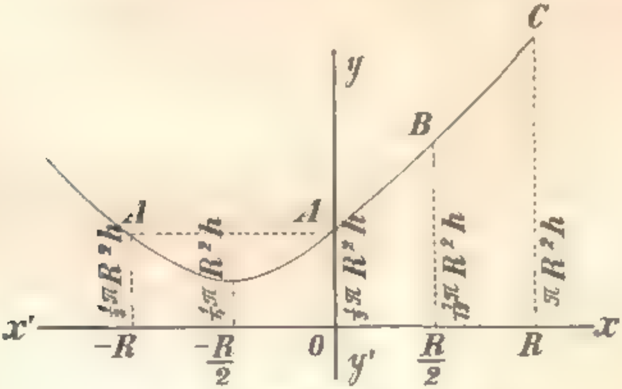
Это есть квадратный триномъ относительно x; изученіе его измѣненій при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ приведетъ насъ къ вышенайденнымъ результатамъ, но кратчайшимъ путемъ.

Даемъ x-су сначала значенія отъ 0 до $-\infty$, и вычисляемъ соотвѣтствующія значенія выраженія въ квадратныхъ скобкахъ; помноживъ каждое изъ этихъ значеній на $\frac{1}{3}\pi h$, найдемъ измѣненія объема V. То же самое дѣлаемъ, измѣняя x отъ 0 до $-\infty$. Такимъ образомъ получаемъ двѣ таблицы измѣненій V: для положительныхъ и для отрицательныхъ значеній x.

$$\begin{array}{c|l}
x & 0 < \ldots\ldots < \frac{R}{2} \ldots\ldots < R \ldots\ldots < +\infty \\
\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h} & R^2 \ldots\ldots < \frac{7}{4}R^2 \ldots\ldots < 3R^2 \ldots < +\infty \\
V & \frac{1}{3}\pi R^2 h \ldots < \frac{7}{12}\pi R^2 h \ldots < \pi R^2 h \ldots < +\infty \\
\hline
x & 0 \ldots\ldots > -\frac{R}{2} \ldots\ldots > -R \ldots > -\infty \\
\frac{V}{\frac{1}{3}\pi h} & R^2 \ldots\ldots > \frac{3}{4}R^2 < \ldots R^2 \ldots\ldots < +\infty \\
V & \frac{1}{3}\pi R^2 h \ldots > \frac{1}{4}\pi R^2 h < \ldots \frac{1}{3}\pi R^2 h \ldots < +\infty
\end{array}$$

Итакъ, конусъ перваго рода неограниченно возрастаетъ отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до безконечности; конусъ второго рода сперва уменьшается отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до $\frac{1}{4}\pi R^2 h$, потомъ увеличивается до $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, проходя два раза черезъ всѣ величины между $\frac{1}{4}\pi R^2 h$ и $\frac{1}{3}\pi R^2 h$; а затѣмъ продолжаетъ увеличиваться, проходя разъ черезъ каждое значеніе отъ $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ до $+\infty$.

Представимъ эти измѣненія объема кривою. Для этого наносимъ положительныя значенія x по оси x вправо отъ начала 0, отрицательныя – влѣво отъ 0. Въ конечной точкѣ каждаго значенія x проводимъ перпендикуляръ къ оси $x'x$, и откладываемъ на немъ величины функціи V. Соединивъ вершины ординатъ, получимъ параболу, изображающую наглядно измѣненія V. Эта кривая показываетъ:



Черт. 88.

1) Чтобы найти значеніе V, соотвѣтствующее данному значенію x, нужно нанести x на ось $x'x$ вправо или влѣво отъ точки 0, смотря по знаку x-са, и провести ординату кривой, соотвѣтствующую взятому значенію x.

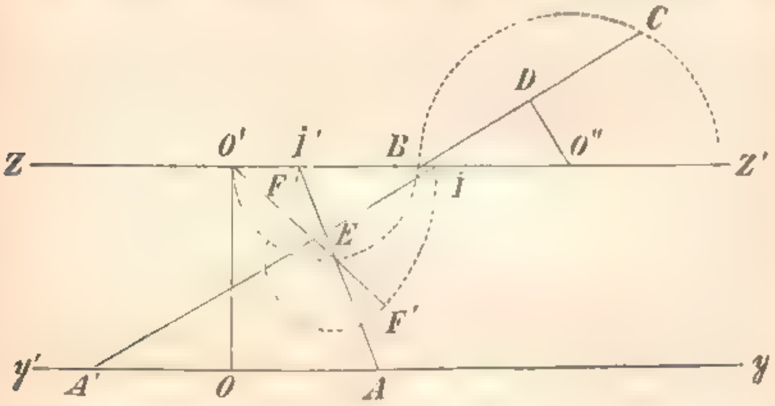
2) Чтобы найти значеніе x, соотвѣтствующее данной величинѣ V, нужно пересѣчь кривую параллелью оси $x'x$, взятою на разстояніи отъ $x'x$, равномъ значенію V, и построить абсциссы точекъ пересѣченія этой параллели съ кривою.

Такимъ образомъ легко видѣть, что задача не имѣетъ рѣшенія, когда V меньше $\frac{1}{4}\pi R^2h$, ибо кривая не имѣетъ точекъ, которыхъ ординаты были бы меньше $\frac{1}{4}\pi R^2h$; что наименьшее значеніе V есть $\frac{1}{4}\pi R^2h$, и что оно соотвѣтствуетъ $x = -\frac{R}{2}$; что V принимаетъ два раза каждое значеніе между $\frac{1}{4}\pi R^2h$ и $\frac{1}{3}\pi R^2h$ при двухъ различныхъ отрицательныхъ значеніяхъ x, одномъ, содержащемся между 0 и $-\frac{R}{2}$, другомъ — между $-\frac{R}{2}$ и $-R$: задача имѣетъ 2 рѣшенія 2-го рода; что, наконецъ, V принимаетъ дважды каждое значеніе большее $\frac{1}{3}\pi R^2h$, разъ при $x > 0$, другой при $x < -R$: задача имѣетъ 2 рѣшенія — *одно* 1-го рода, и *одно* 2-го рода.

Построеніе. Возьмемъ случай: $a > R$, когда задача имѣетъ два рѣшенія — усѣченные конусы 1-го и 2-го рода. Верхнія основанія ихъ имѣютъ радіусы, выражаемые формулами.

$$x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Взявъ линію $OO' = h$, проведемъ къ ней въ точкахъ O и O′ перпендикуляры yy' и zz'; на первомъ отъ точки O отложимъ $OA = OA' = R$, на второмъ отъ точки



Черт. 89.

O′ линію $O'B = a$, а на продолженіи ея линію $BO'' = R$. Изъ точки O″ радіусомъ O″B описываемъ полукругъ, въ которомъ вписываемъ сторону правильнаго треугольника BC, и дѣлимъ ее въ точкѣ D пополамъ; линія $BD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Описавъ на a полукружность, наносимъ въ нее хорду $BE = BD$ и соединяемъ точку E съ O: очевидно,

$$OE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Затѣмъ, описавъ изъ точки E радіусомъ $EF' = EF = \frac{R}{2}$ полукругъ, получимъ окончательно:

$$OF = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{R}{2} = x'; \quad O'F' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = x.$$

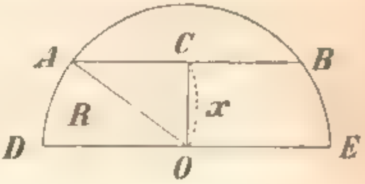
Нанеся линіи O'F и O'F' на линію O'O'', получимъ: $O'I = x'$, $O'I' = x$. Остается соединить I съ A', а I' съ A и повернуть чертежъ около оси OO': вращеніе дастъ искомые конусы.

Задача VIII.

602. *Въ данный полукругъ вписать хорду такъ, чтобы сумма ея длины съ разстояніемъ отъ центра равнялась данной линіи m.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ AB требуемая хорда, OC ея разстояніе отъ центра. По условію задачи:

$$AB + OC = m.$$



Черт. 90.

Примемъ за неизвѣстное $OC = x$; соединивъ A съ O, изъ треугольника ACO получимъ: $AC = \sqrt{R^2 - x^2}$, откуда ур—ніе задачи:

$$2\sqrt{R^2 - x^2} + x = m.$$

Это ур—ніе ирраціональное; для рѣшенія его, изолируемъ корень въ первой части:

$$2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x \;.\;.\;.\; (1)$$

и возвышаемъ обѣ части въ квадратъ; приведя члены въ порядокъ, найдемъ уравненіе.

$$5x^2 - 2mx + m^2 - 4R^2 = 0 \;.\;.\;.\; (2).$$

Изслѣдованіе. Это ур—ніе не эквивалентно (1)-му, ибо оно получилось бы и изъ ур—нія: $-2\sqrt{R^2 - x^2} = m - x$ . . . (1'), такъ что ур—нію (2) могутъ удовлетворять корни двухъ уравненій (1) и (1'). Поэтому, корни ур—нія (2) только тогда будутъ удовлетворять ур—нію (1), когда они дѣлаютъ разность $m - x$ положительною, т.-е. когда $x < m$. Затѣмъ, необходимо, чтобы x было дѣйствительно, положительно и не больше R; при несоблюденіи послѣдняго условія точка C будетъ лежать внѣ окружности и потому не дастъ хорды.

Итакъ, чтобы алгебраическій корень x ур—нія (2) удовлетворялъ предложенной геометрической задачѣ, нужно, чтобы было: x — дѣйствительно, $x > 0$, $x < m$, $x < R$.

Но если x удовлетворяетъ первымъ тремъ условіямъ, то оно удовлетворяетъ и ур—нію (1), а слѣд. $2\sqrt{R^2 - x^2}$, равняясь дѣйствительному количеству $m - x$, также будетъ дѣйствителенъ, а слѣдов. будетъ и $x < R$. Такимъ образомъ, предыдущія условія сводятся къ слѣдующимъ тремъ

$$x \text{ дѣйств.}, \quad x > 0, \quad x < m.$$

1) *Условіе дѣйствительности* корней ур—нія (2) выражается неравенствомъ:

$$m^2 - 5(m^2 - 4R^2) > 0, \text{ или, по упрощеніи, } m^2 - 5R^2 \leqslant 0,$$

или

$$(m + R\sqrt{5})(m - R\sqrt{5}) \leqslant 0.$$

Но первый множитель > 0, слѣд. должно быть $m - R\sqrt{5} \leqslant 0$, или

$$m \leqslant R\sqrt{5}.$$

Отсюда:

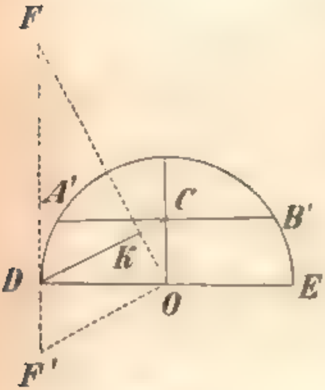
I. Когда $m > R\sqrt{5}$, ур—ніе (2) будетъ имѣть корни мнимые: задача невозможна.

II. Когда $m = R\sqrt{5}$, ур—ніе (2) имѣетъ корни дѣйствительные равные: ихъ общая величина равна $\frac{m}{5}$, или

$$x' = x'' = \frac{R\sqrt{5}}{5}.$$

Это — величина дѣйствительная, положительная и меньшая $m = R\sqrt{5}$, слѣд. представляетъ рѣшеніе данной задачи: ей соотвѣтствуетъ особое положеніе точки C. Проведя въ точкѣ D касательную $DF = 2R$, соединяемъ точки F и O: прямая FO будетъ $= R\sqrt{5}$; отрѣзавъ отъ нея пятую часть, OK, отложимъ ее на радіусѣ OC: найдемъ точку C и хорда A_1B_1 будетъ требуемая.

Замѣтимъ, что величина $R\sqrt{5}$ есть *maximum данной суммы m*, ибо задача невозможна, когда m больше этой величины, но m можетъ достичь этой величины, когда точка C займетъ только что указанное положеніе. Итакъ сумма $AB + OC$ достигаетъ *maximum'а* $= R\sqrt{5}$, когда $x = \frac{R\sqrt{5}}{5}$.



Черт. 91.

III. Обратимся теперь къ случаю $m < R\sqrt{5}$. Въ этомъ случаѣ корни ур—нія (2) дѣйствительные и неравные; разсмотримъ ихъ знаки и величину.

Знаки корней. Ур. (2) показываетъ, что *произведеніе корней*, будучи $= \frac{m^2 - 4R^2}{5}$, имѣетъ знакъ разности $m^2 - 4R^2$, которую можно представить въ видѣ $(m + 2R)(m - 2R)$. А какъ $m + 2R$ всегда > 0, то заключаемъ, что произведеніе это положительно, когда $m > 2R$, равно 0, когда $m = 2R$, и отрицательно, когда $m < 2R$.

Сумма корней, равная $\frac{2}{5}m$, будетъ всегда положительна.

Величина корней. Должно быть $x < m$. Разсмотримъ, какое положеніе m занимаетъ относительно корней. Результатъ подстановки m вмѣсто x въ триномъ (2) даетъ, по упрощеніи,

$$f(m) = 4(m^2 - R^2),$$

и слѣдов. $f(m)$ имѣетъ такой знакъ какъ $m^2 - R^2$, или какъ $(m + R)(m - R)$, а какъ $m + R$ всегда > 0, то знакъ будетъ такой какъ у $m - R$, слѣдов.

когда $m > R$, то $f(m) > 0$; когда $m = R$, $f(m) = 0$; когда $m < R$, $f(m) < 0$.

Расположимъ теперь найденныя критическія значенія m, т.-е. числа $R\sqrt{5}$, $2R$, R и 0 — въ порядкѣ возрастающихъ значеній и помѣстимъ знаки реализанта, произведенія корней, ихъ суммы, а также знаки $f(m)$ и 1-го коэффиціента въ нижеслѣдующую таблицу, въ которой можно прямо читать все, что относится до корней въ любомъ интервалѣ значеній параметра m.

Скала значеній m	0	R	2R	$R\sqrt{5}$
Реализантъ	+	+	+	—
Произведеніе корней	-	—	+	
Сумма корней	+	+	+	
$f(m)$	—	+	+	
Коэф. при x^2	+	+	+	

Разсмотримъ каждый интервалъ.

1. $m < R$. Корни дѣйствительны, ибо реализантъ > 0; произведеніе корней отрицат., слѣдов., знаки корней различны, сумма корней > 0, слѣдов. больший по абсол. значенію корень положителенъ. Затѣмъ, знакъ $f(m)$ противоположенъ знаку 1-го коэф., слѣдов. m — между корнями, и имѣетъ мѣсто слѣдующее расположеніе (обозначая меньшій корень x', большій—x''):

$$x' \; . \; . \; . \; m \; . \; . \; . \; x''.$$

А какъ задачѣ удовлетворяетъ только x положительное и меньшее m, то *задача не имѣетъ рѣшеній*, что очевидно, ибо уже $AC + OC$, по свойству сторонъ треугольника, больше R, а $AB + OC$ и подавно.

2. $m = R$. Результатъ подстановки числа m вмѣсто x обращается при $m = R$ въ нуль, а это значитъ, что R есть корень ур—нія. *Задача имѣетъ 1 рѣшеніе*, $x = R$: хорда обращается въ нуль.

3. $R < m < 2R$. Корни дѣйств., против. по знаку, большій по абс. величинѣ кор. положителенъ; и какъ $f(m)$ имѣетъ знакъ одинаковый съ 1-мъ коэффицентомъ, то m лежитъ внѣ корней. Чтобы прецизировать мѣсто m относительно корней, нужно еще сравнять m съ полусуммою корней, которая $= \frac{1}{5}m$; очевидно, $m > \frac{1}{5}m$, слѣдовательно m больше большаго корня, и расположеніе этихъ чиселъ таково

$$x' \; . \; . \; . \; x' \; . \; . \; . \; m,$$

слѣд. большій корень, будучи > 0 и $< m$, отвѣчаетъ задачѣ, которая такимъ образомъ имѣемъ на этотъ разъ *1 рѣшеніе*.

4. $m = 2R$. Произведеніе корней мѣняетъ знакъ (— на +), слѣдовательно обращается въ нуль; слѣдовательно, одинъ корень—нуль, другой удовлетворяетъ ур-нію $5x - 4R = 0$, откуда $x = \frac{4}{5}R$, и задача имѣетъ *два рѣшенія*, изъ коихъ первое даетъ хорду, сливающуюся съ діаметромъ.

5. $2R < m < R\sqrt{5}$. Произведеніе и сумма корней положительны, слѣд. оба корня положительны; знакъ $f(m)$ одинаковъ со знакомъ 1-го коэффицента, слѣдовательно, m внѣ корней, и какъ m больше полусуммы $\left(\frac{1}{5}m\right)$ корней, то расположеніе x', x'' и m таково

$$x' \; . \; . \; . \; x'' \; . \; . \; . \; m,$$

т.-е. оба положительные корня $< m$: *задача имѣетъ 2 рѣшенія*, выражаемыя формулою:

$$\frac{m}{5} \pm \frac{2}{5}\sqrt{5R^2 - m^2}$$

Случаи $m = R\sqrt{5}$ и $m > R\sqrt{5}$ разсмотрѣны выше (см. I и II).

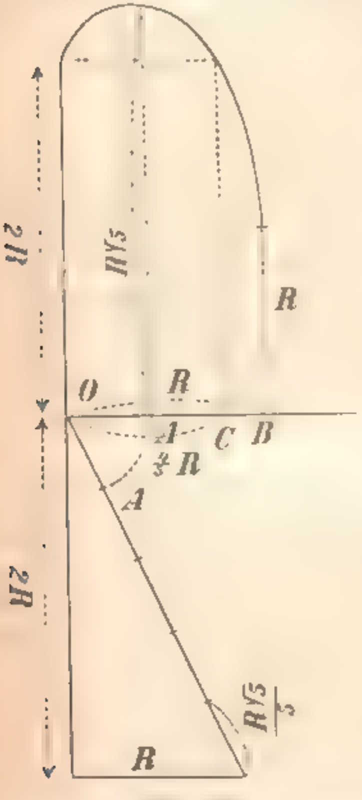
Результаты изслѣдованія, для удобнѣйшаго обозрѣнія ихъ, резюмированы въ видѣ нижеслѣдующей таблицы.

Резюме изслѣдованія.

I $m < R\sqrt{5}$ $\begin{cases} m < R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 0 рѣшеній.} \\ m = R \ldots\ldots x' = R \ldots\ldots \text{ 1 рѣшеніе.} \\ 2R > m > R \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ 1 рѣшеніе.} \\ m = 2R \ldots x' = 0;\ x'' = \frac{4}{5}R \ldots \text{ 2 рѣшенія.} \\ m > 2R \ldots 0 < x' < m;\ 0 < x'' < m \text{ 2 рѣшенія.} \end{cases}$

II. $m = R\sqrt{5}$. $x' = x'' = \frac{R\sqrt{5}}{5}$, даетъ maximum для m: 1 (2 равныхъ) рѣшенія.

III $m > R\sqrt{5}$. . . . Корни мнимые . . . . 0 рѣшеній.



Черт. 92

Изслѣдованіе измѣненія функціи $y = 2\sqrt{R^2 - x^2} + x$.

Въ данномъ случаѣ, измѣняя x отъ 0 до R, легко составить слѣдующую таблицу измѣненій y, которая, вмѣстѣ съ графикомъ этихъ измѣненій, позволяетъ наглядно судить о томъ, какъ измѣняется разсматриваемая сумма. Вотъ эта таблица съ сопровождающею ее кривою измѣненій:

x	0 . . .	$\frac{R\sqrt{5}}{5}$ . . .	$\frac{4}{5}$R . . .	R
y	2R . . .	R$\sqrt{5}$ . . . (max.)	2R . . .	R

$$y = 2\sqrt{R^2 - x^2} + x$$

$$R\sqrt{5} = \sqrt{5R^2} = \sqrt{(2R)^2 + R^2}.$$

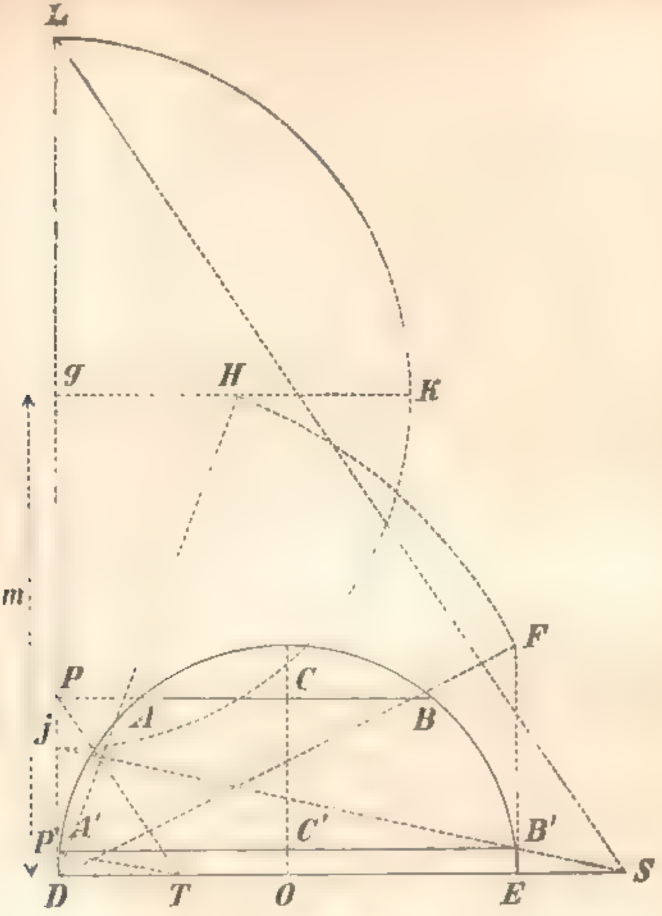
$$OA = \frac{R\sqrt{5}}{5}$$

$$OB = R$$

$$OC = \frac{4}{5}R$$

Чертежъ наглядно показываетъ, что когда m измѣняется отъ своего maximum'a $R\sqrt{5}$ до 2R, задача имѣетъ два рѣшенія, при m меньшихъ 2R, но не меньшихъ R, она имѣетъ 1 рѣшеніе, при $m < R$ она невозможна.

Построеніе. Проведя касательную $EF = R$ и соединивъ точки D и F, получимъ линію $DF = R\sqrt{5}$. Затѣмъ на касательной DL откладываемъ отрѣзокъ



Черт. 93.

$DG = m$, взявъ его $> 2R$, но $< R\sqrt{5}$ и проводимъ прямую GH параллельно DE. Описавъ изъ точки D дугу радіусомъ DF до пересѣченія съ прямою GH въ точкѣ H, найдемъ:

$$GH = \sqrt{5R^2 - m^2};$$

затѣмъ, беремъ линію $GK = 2GH$:

$$GK = 2\sqrt{5R^2 - m^2},$$

и изъ точки G радіусомъ GK описываемъ полуокружность, которая пересѣчетъ прямую DL въ точкахъ I и L; очевидно:

$$DI = m - 2\sqrt{5R^2 - m^2},$$

$$DL = m + 2\sqrt{5R^2 - m^2}.$$

Остается отъ каждой изъ этихъ прямыхъ отрѣзать пятую часть. Беремъ

$DT = ES = \frac{R}{2}$, проводимъ SI и SL, и изъ точки T прямыя: TP параллельно SL и TP′ параллельно SI, остается изъ точекъ P и P′ провести параллели діаметру DE, которыя и дадутъ требуемыя хорды AB и A′B′.

Задача IX.

603. *Построить треугольникъ, зная его сторону a, соотвѣтствующую ей высоту h и радіусъ R описаннаго круга.*

Рѣшеніе. Пусть неизвѣстныя стороны будутъ x и y. По извѣстнымъ теоремамъ геометріи имѣемъ:

$$xy = 2Rh;\quad \frac{ah}{2} = \sqrt{\frac{(x+y+a)}{2}\cdot\frac{(x+y-a)}{2}\cdot\frac{(a+x-y)}{2}\cdot\frac{[a-(x-y)]}{2}}.$$

Возвышая обѣ части 2-го ур. въ квадратъ, найдемъ:

$$4a^2h^2 = [(x+y)^2 - a^2]\,[a^2 - (x-y)^2].$$

Примемъ за вспомогательное неизвѣстное сумму $x + y = s$; x и y будутъ корнями уравненія

$$X^2 - sX + 2Rh = 0\ .\ .\ .\ 1).$$

Для опредѣленія s имѣемъ соотношеніе

$$4a^2h^2 = (s^2 - a^2)\,[a^2 - (s^2 - 8Rh)],$$

или

$$s^4 - 2\,(a^2 + 4Rh)\,s^2 + a^4 + 4a^2h^2 + 8a^2Rh = 0\ .\ .\ .\ (2).$$

Рѣшая это ур—ніе относительно s^2, найдемъ, что подрадикальное количество $= (4R^2 - a^2)\,.\,4h^2$, оно положительно, если $a < 2R$. Если это условіе выполнено, оба значенія s^2 дѣйствительны, они и положительны, ибо произведеніе и сумма корней ур—нія (2), разсматриваемаго какъ квадратное, положительны; слѣд. s, при условіи $a < 2R$, имѣетъ всегда *два* положительныя значенія, именно:

$$s = \sqrt{a^2 + 4Rh \pm 2h\sqrt{4R^2 - a^2}} = \sqrt{a^2 + 2h\,(2R \pm d)},$$

полагая $d = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

Рѣшая затѣмъ ур—ніе (1), находимъ:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(2R \pm d)} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2h(-2R \pm d)},$$

полагая, что $x > y$, что позволительно; въ этихъ формулахъ нужно брать передъ d или верхніе знаки вмѣстѣ, или нижніе вмѣстѣ (въ силу ур—нія $xy = 2Rh$). Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R + d)} + \sqrt{a^2 + 2h(-2R + d)}\right\} \\ y_1 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R + d)} - \sqrt{a^2 + 2h(-2R + d)}\right\} \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R - d)} + \sqrt{a^2 + 2h(-2R - d)}\right\} \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2 + 2h(2R - d)} - \sqrt{a^2 + 2h(-2R - d)}\right\} \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

Изъ этихъ формулъ выводимъ слѣдующія заключенія.

Въ системѣ (3) рѣшеній первый корень всегда дѣйствителенъ; чтобы и второй былъ дѣйствителенъ, надо, чтобы было

$$a^2 + 2h(-2R + d) > 0, \quad \text{откуда} \quad h < \frac{a^2}{2(2R - d)}.$$

Система (4) рѣшеній будетъ дѣйствительна, если подкоренное количество подъ вторымъ радикаломъ будетъ положительно, т. е. если $a^2 - 2h(2R + d) > 0$, откуда $h < \frac{a^2}{2(2R + d)}$. Въ этомъ предѣлѣ заключается первый. Умножая оба члена второй части неравенства на $2R - d$, имѣемъ:

$$h < \frac{a^2(2R - d)}{2(4R^2 - d^2)}, \quad \text{или} \quad h < \frac{2R - d}{2}, \quad \text{или} \quad h < R - \frac{d}{2}.$$

Итакъ, задача имѣетъ *два рѣшенія*, если $h < R - \frac{d}{2}$.

Если $a^2 - 2h(2R + d) < 0$, но $a^2 - 2h(2R - d) > 0$, откуда

$$\frac{a^2}{2(2R - d)} > h > \frac{a^2}{2(2R + d)},$$

то система (4) даетъ мнимыя значенія для x и y, а система (3) дѣйствительныя; заключаемъ, что при условіи

$$R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$$

задача имѣетъ *одно рѣшеніе*, выражаемое корнями x_1 и y_1.

Наконецъ, если $h > R + \frac{d}{2}$, то обѣ системы (3) и (4) мнимы и задача невозможна.

Эти результаты легко обнаружить на чертежѣ (черт. 94). Описавъ кругъ радіусомъ R, проведемъ въ немъ хорду $BC = a$ и къ ней перпендикулярный діаметръ MM'; имѣемъ:

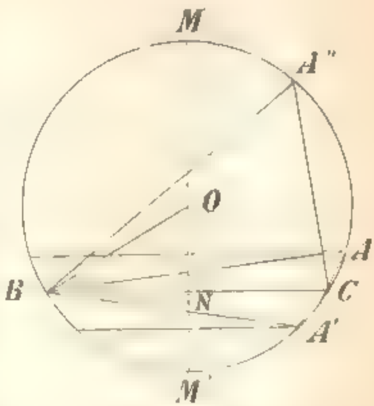
$$ON = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BN}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},$$

слѣдовательно

$$d = 2ON, \qquad \frac{d}{2} = ON.$$

При $h < R - \frac{d}{2}$, т.-е. при $h < OM' - ON$, или при $h < NM'$ существуютъ двѣ точки A и A', расположенныя въ разстояніи h отъ BC, по ту и по другую сторону отъ BC и лежащія на данной окружности; слѣд. задачѣ отвѣчаютъ два треугольника: ABC и A'BC.

Если $R - \frac{d}{2} < h < R + \frac{d}{2}$, то-есть если $NM' < h < NM$, одинъ треугольникъ A''BC отвѣчаетъ вопросу.



Черт. 94.

Наконецъ, если $h > NM$, то невозможно вписать въ окружность треугольникъ, высота котораго была бы $= h$, и задача невозможна.

Задача X.

604. *По данной площади* $m\sqrt{3}$ *и периметру* $6a$ *шестиугольника, составленнаго тремя равными равнобедренными треугольниками, построенными на сторонахъ равносторонняго треугольника* ACE, *какъ на основаніяхъ, найти сторону* AC *этого правильнаго треугольника.*

Рѣшеніе. Замѣтимъ прежде всего, что шестиугольникъ можетъ быть двоякого вида, смотря по тому, будутъ ли равнобедренные треугольники построены внѣ треугольника ACE, или внутри его. Въ первомъ случаѣ будемъ называть шестиугольникъ фигурою *перваго рода*, во второмъ — *второго рода*.

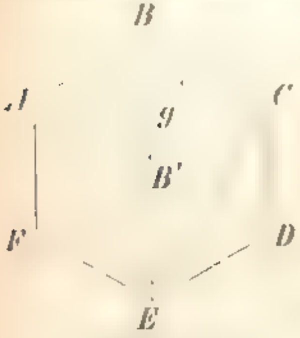
Пусть (черт. 95) $AC = 2x$; $AB = a$; ур—ніе будетъ

$$m\sqrt{3} = x^2\sqrt{3} \pm 3x\sqrt{a^2 - x^2},$$

причемъ знакъ + относится къ шестиугольнику 1-го рода, знакъ — къ фигурѣ 2-го рода.

Раздѣливъ обѣ части на $\sqrt{3}$ и изолировавъ радикалъ имѣемъ:

$$m - x^2 = \pm x\sqrt{3(a^2 - x^2)}.$$



Черт. 95.

Изслѣдованіе. Для того, чтобы вторая часть была дѣйствительною, необходимо, чтобы существенно положительное количество x содержалось между 0 и a; затѣмъ, смотря по знаку разности $m - x^2$, различаемъ, какой родъ шестиугольника отвѣчаетъ вопросу.

Возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ ур—ніе, отвѣчающее задачѣ въ самомъ общемъ ея смыслѣ:

$$(m - x^2)^2 = 3(a^2 - x^2)x^2,$$

или, приводя въ порядокъ:

$$4x^4 - (2m + 3a^2)x^2 + m^2 = 0 \ . \ . \ . \ (1)$$

откуда

$$x = \frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{6m + 3a^2} \pm \sqrt{-2m + 3a^2}\right) \ . \ . \ . \ (2).$$

Различаемъ два случая $m > 0$ и $m < 0$, что возможно, ибо можетъ случиться, что въ шестиугольникѣ 2-го рода площадь каждаго изъ равнобедренныхъ треугольниковъ будетъ больше трети площади равносторонняго треугольника.

1-й случай $m > 0$. Первое подкоренное количество > 0; чтобы второе было не меньше 0, надо, чтобы было $-2m + 3a^2 \geq 0$, откуда

$$m \leqslant \frac{3}{2}a^2.$$

Какъ скоро это условіе удовлетворено, значенія x, выражаемыя формулою (2), дѣйствительны; а какъ абсолютная величина перваго радикала въ обоихъ случаяхъ больше второго, то положительныя значенія x, которыя только и отвѣчаютъ на вопросъ, будутъ:

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6m + 3a^2} - \sqrt{-2m + 3a^2}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6m + 3a^2} + \sqrt{-2m + 3a^2}\right).$$

I. При $m = \frac{3}{2}a^2$ имѣемъ: $x_1 = x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, и задача имѣетъ одно рѣшеніе, соотвѣтствующій шестиугольникъ—правильный.

II. При $m < \frac{3}{2}a^2$ вопросъ имѣетъ два рѣшенія: существуютъ два шестиугольника, отвѣчающіе вопросу, и чтобы опредѣлить ихъ родъ, надо знать знаки разностей $m - x_1^2$ и $m - x_2^2$. Подстановка m вмѣсто x^2 въ ур—ніе (1) даетъ

$$f(m) = 4m^2 - (2m + 3a^2)m + m^2 = 3m(m - a^2).$$

Отсюда видно, что когда:

$$\begin{aligned} m &> a^2, \text{ будетъ } & f(m) &> 0; \\ m &< a^2, \quad \text{"} & f(m) &< 0, \\ m &= a^2, \quad \text{"} & f(m) &= 0. \end{aligned}$$

1) Въ случаѣ $m > a^2$, m находится внѣ интервала корней, и слѣдоват., или оба корня, x_1^2 и x_2^2, меньше m, или оба больше m. Чтобы знать, тотъ или другой случай имѣетъ мѣсто, сравнимъ m съ полусуммою корней; положивъ $\frac{2m + 3a^2}{8} > m$, найдемъ $m < \frac{1}{2}a^2$, что противорѣчитъ положенію $m > a^2$. Значитъ m больше полусуммы корней, и обѣ величины, x_1^2 и x_2^2, меньше m, т.-е. обѣ разности $m - x_1^2$ и $m - x_2^2$ положительны. Заключаемъ, что въ случаѣ

$$a^2 < m < \frac{3}{2}a^2$$

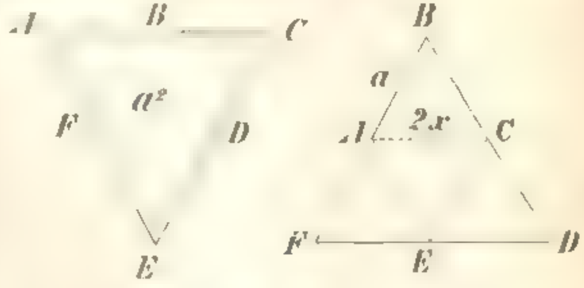
оба шестиугольника относятся къ 1-му роду.

2) Когда $m < a^2$, m находится между корнями:

$$x_1^2 \ldots m \ldots x_2^2,$$

слѣдовательно, $m - x_1^2 > 0$, и корню x_1 отвѣчаетъ шестиугольникъ 1-го рода; $m - x_2^2 < 0$, и корню x_2 отвѣчаетъ шестиугольникъ 2-го рода.

3) Наконецъ, когда $m = a^2$, будетъ $f(m) = 0$, слѣдоват., одинъ корень $= m = a^2$. Другой корень $= \frac{m^2}{4} : a^2 = \frac{a^2}{4}$; то-есть $x_2 = a$, $x_1 = \frac{a}{2}$. Оба шестиугольника превращаются въ правильные треугольники: 1-й совпадаетъ съ треугольникомъ ACE, второй, сторона котораго $a = 2x_1$, даетъ треугольникъ BDF, сторона котораго вдвое больше стороны треугольника ACE.



Черт. 96.

Итакъ, во всемъ интервалѣ II шестиугольникъ, соотвѣтствующій корню x_1, принадлежитъ къ 1-му роду.

2-й случай: $m < 0$. Чтобы корни были дѣйствительны, нужно, чтобы было

$$6m + 3a^2 > 0, \qquad \text{откуда} \qquad m \geqslant -\frac{a^2}{2}.$$

Величина перваго члена скобокъ въ формулѣ (2) будетъ меньше втораго члена, и потому положительные корни, отвѣчающіе вопросу, будутъ:

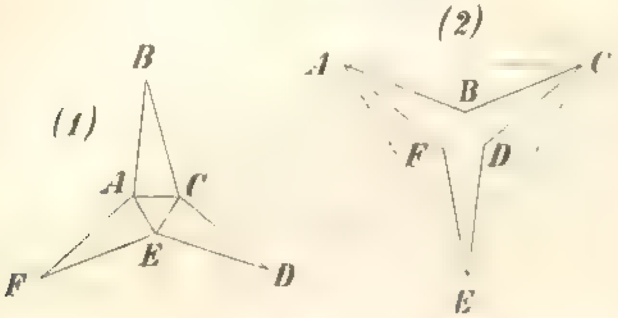
$$x_1 = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{6m+3a^2}+\sqrt{-2m+3a^2}\right).$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left(+\sqrt{6m+3a^2}+\sqrt{-2m+3a^2}\right).$$

Оба соотвѣтствующіе шестиугольника относятся ко *второму роду*.

Въ частномъ случаѣ: $m = 0$ имѣемъ

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Черт. 97.

Если положимъ, что m приближается къ нулю, оставаясь положительнымъ 6-къ 1-го рода, соотвѣтствующій x_1, имѣетъ видъ черт. 97 (1), а 6-къ 2 рода, соотвѣтствующій x_2, имѣетъ видъ черт. 97 (2), разнящійся отъ 1-го только расположеніемъ вершинъ относительно правильнаго треугольника ACE.

Резюме изслѣдованія.

$m > \frac{3}{2}a^2$ . . . x_1 и x_2 мнимы . . . 0 рѣшеній.

$m = \frac{3}{2}a^2$ . . . $x_1 = x_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . . . 1 рѣшеніе (перваго рода).

$a^2 < m < \frac{3}{2}a^2$. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ . . . 2 рѣшенія (перваго рода).

$0 < m < a^2$ . . $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ . . . 1 рѣш. 1-го рода, 1 рѣш. 2-го р.

$-\frac{a^2}{2} < m < 0$ . . $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ . . . 2 рѣшеніе (2-го рода).

Задача XI.

605. *Шаръ радиуса r лежитъ на плоскости; на той же плоскости поставленъ конусъ, котораго радиусъ основанія равенъ R, а высота 2r. На какомъ разстояніи x отъ данной плоскости нужно провести параллельную ей плоскость, чтобы объемы, содержащіеся между обѣими плоскостями, были равновелики?— Изслѣдовать положеніе сѣкущей плоскости относительно центра шара.*

Рѣшеніе. Объемъ сферическаго сегмента, имѣющаго высоту x, выражается формулою $\frac{1}{3}\pi x^2(3r - x)$. Объемъ усѣченнаго конуса, у котораго радіусы основаній суть R и y, а высота x, выражается формулою $\frac{1}{3}\pi x(R^2 + y^2 + Ry)$. Кромѣ того, между x и y имѣемъ соотношеніе $y : R = (2r - x) : 2r$, при помощи котораго можно изъ предыдущей формулы исключить y, найдемъ

$$\frac{1}{3}\pi R^2 x \cdot \frac{12r^2 - 6rx + x^2}{4r^2}.$$

Уравненіе задачи, по сокращеніи на $\frac{1}{3}\pi$, будетъ

$$4r^2x^2(3r - x) = R^2x(x^2 - 6rx + 12r^2).$$

Рѣшеніе $x = 0$ не соотвѣтствуетъ задачѣ, ибо при этомъ значеніи x оба объема обращаются въ нули, остается квадратное уравненіе

$$(R^2 + 4r^2)x^2 - 6r(R^2 + 2r^2)x + 12R^2r^2 = 0\ .\ .\ .\ (1).$$

Изслѣдованіе. Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы x было дѣйствительно, положительно и $< 2r$. Условіе дѣйствительности корней выражается неравенствомъ

$$9r^2(R^2 + 2r^2)^2 - 12R^2r^2(R^2 + 4r^2) \geqq 0,$$

которое, по сокращеніи на положительное количество $3r^2$ и по упрощеніи даетъ

$$-R^4 - 4R^2r^2 + 12r^4 > 0\ .\ .\ (2).$$

Положивъ $\frac{R}{r} = m$, находимъ, что m^2 должно заключаться между корнями уравненія

$$m^4 + 4m^2 - 12 = 0;$$

и какъ сверхъ того, m^2 должно быть > 0, такъ же какъ и m, находимъ, что должно быть

$$R \leqq r\sqrt{2}\ .\ .\ .\ (3).$$

При соблюденіи этого условія, корни уравненія (1) дѣйствительны; и они и положительны, такъ какъ ихъ произведеніе и сумма положительны. Чтобы узнать, какъ расположено количество $2r$ по отношенію къ корнямъ, подставимъ въ первую часть уравненія (1) $2r$ вмѣсто x. Найдемъ въ результатѣ

$$4r^2(R^2 + 4r^2) - 12r^2(R^2 + 2r^2) + 12R^2r^2, \quad \text{или} \quad (R^2 - 2r^2)4r^2.$$

Но въ силу неравенства (3) заключаемъ, что первый множитель этого произведенія отрицателенъ, когда корни неравные; и обращается въ нуль при равныхъ корняхъ.

Этотъ крайній случай означаетъ, что $2r$ есть величина дѣйствительныхъ равныхъ корней при условіи $R = r\sqrt{2}$. При дѣйствительныхъ же неравныхъ корняхъ, $2r$ заключается между корнями, сл., большій корень не соотвѣтствуетъ вопросу, меньшій даетъ отвѣтъ на вопросъ: задача имѣетъ 1 рѣшеніе:

$$x = r\,.\,\frac{3(R^2 + 2r^2) - \sqrt{3(12r^4 - 4R^2r^2 - R^4)}}{R^2 + 4r^2}\ .\ .\ .\ (4).$$

Изслѣдованіе положенія сѣкущей плоскости относительно центра шара. Съ этою цѣлью опредѣлимъ знакъ, принимаемый первою частью ур—нія (1) при замѣнѣ x количествомъ r. Находимъ

$$r^2(7R^2 - 8r^2);$$

слѣд., пока $7R^2 < 8r^2$, рѣшеніе (4) меньше r, и потому сѣкущая плоскость и данная лежатъ по одну сторону отъ центра, если $7R^2 - 8r^2 = 0$, то $x = r$ сѣкущая плоскость проходитъ черезъ центръ, наконецъ, когда $7R^2 > 8r^2$, сѣкущая плоскость проходитъ надъ центромъ.

Резюме изслѣдованія.

1. $R^2 < \frac{8}{7}r^2$. Одно рѣшеніе; плоскость ниже центра.
2. $R^2 = \frac{8}{7}r^2$. Одно рѣшеніе; плоскость проходитъ черезъ центръ.
3. $\frac{8}{7}r^2 < R^2 < 2r^2$. Одно рѣшеніе; плоскость проходитъ выше центра.
4. $R^2 = 2r^2$. Одно рѣшеніе; плоскость касательна.
5. $R^2 > 2r^2$. Задача невозможна.

Задача XII.

606. *Зная радиусъ R шара и полную поверхность $2\pi m^2$ вписаннаго въ него цилиндра, вычислить радиусъ основанія и высоту цилиндра.*

Рѣшеніе. Обозначимъ буквою x радиусъ основанія и $2y$ высоту цилиндра, ур—нія задачи будутъ

$$x^2 + 2xy = m^2 \ . \ . \ . (1) \qquad x^2 + y^2 = R^2 \ . \ . \ . (2)$$

Изъ перваго имѣемъ:

$$y = \frac{m^2 - x^2}{2x} \ . \ . \ . (3)$$

а подставляя эту величину y въ ур—ніе (2), имѣемъ

$$5x^4 - 2(m^2 + 2R^2)x^2 + m^4 = 0 \ . \ . \ . (4)$$

откуда

$$x^2 = \frac{m^2 + 2R^2 \mp \sqrt{(m^2 + 2R^2)^2 - 5m^4}}{5} \ . \ . \ . (5).$$

Взявъ со знакомъ + корни квадратные изъ второй части ур. (5), получимъ два значенія для x, а подставивъ ихъ въ формулу (3), найдемъ для каждаго изъ нихъ соотвѣтствующее значеніе y.

Изслѣдованіе. Чтобы значенія x и y, выведенныя изъ ур—ній (3) и (5), давали отвѣтъ на вопросъ, необходимо, чтобы они были дѣйствительны, положительны и меньше R.

Чтобы значенія x^2 были дѣйствительны, должно быть

$$m^2 + 2R^2)^2 \geqslant 5m^4, \quad \text{или} \quad m^2 + 2R^2 \geq m^2\sqrt{5},$$

или

$$m^2 < R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \;\ldots\; (6).$$

Когда это условіе удовлетворено, величины x^2 будутъ дѣйствительны, они будутъ и положительны, ибо ихъ сумма и произведеніе положительны. Но чтобы какое-либо изъ значеній x отвѣчало на задачу, необходимо еще, какъ видно изъ ур—нія (3), чтобы оно было менѣе m, для того чтобы соотвѣтствующее значеніе y само было положительно. Другихъ условій нѣтъ, ибо какъ скоро дѣйствительныя положительныя значенія x и y удовлетворяютъ ур—нію (2), въ силу этого уже величины эти меньше R.

Теперь необходимо опредѣлить, сколько значеній x^2 содержится между 0 и m^2, а для этого подставимъ 0 и m^2 вмѣсто x^2 въ лѣвую часть ур—нія (4), какъ квадратнаго относительно x^2. Результатъ подстановки нуля положителенъ; результатъ подстановки m^2 есть $4m^2(m^2 - R^2)$. Должно прослѣдить измѣненія m^2 отъ 0 до R^2, и затѣмъ отъ R^2 до maximum'а m^2, равнаго $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; такимъ образомъ, критическія значенія m^2 суть 0, R^2 и $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

I. $m^2 < R^2$. Въ такомъ случаѣ $4m^2(m^2 - R^2) < 0$; слѣдовательно, одно, и только одно, значеніе x^2 содержится между 0 и m^2, другое $> m^2$; задача имѣетъ одно рѣшеніе, и значеніе x, слѣдовательно, выражается меньшимъ корнемъ

$$x = \sqrt{\frac{m^2 + 2R^2 - \sqrt{(m^2 + 2R^2)^2 - 5m^4}}{5}}.$$

II. $m^2 = R^2$. Результатъ указанной подстановки обращается въ нуль, а это значитъ, что одно изъ значеній x есть m или R, соотвѣтствующее значеніе y равно нулю, цилиндръ обращается въ два своихъ основанія, сливающіяся съ большимъ кругомъ шара. Что касается другаго рѣшенія, то оно есть: $x^2 = \frac{R^2}{5}$, откуда

$$x = \frac{R\sqrt{5}}{5}, \text{ а } y = \frac{2R\sqrt{5}}{5};$$

это — цилиндръ, подобный литру (мѣрѣ жидкостей). Это другое значеніе x получаемъ, замѣчая, что произведеніе двухъ значеній x^2, въ силу ур. (4), равно $\frac{m^4}{5}$, или, въ данномъ случаѣ, $\frac{R^4}{5}$.

III. $R^2 < m^2 < R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Въ этомъ случаѣ $4m^2(m^2 - R^2) > 0$, и слѣд. или оба значенія x^2 содержатся между 0 и m^2, или оба больше m^2; но послѣднее предположеніе невозможно, ибо произведеніе обоихъ значеній x^2, т. е. $\frac{m^4}{5}$, меньше m^4. Заключаемъ, что когда m^2 содержится между R^2 и $R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, задача всегда имѣетъ два рѣшенія.

IV. $m^2 = R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т. е. имѣетъ наибольшую величину. Оба значенія x^2 въ этомъ предѣльномъ случаѣ равны $\frac{m^2 + 2R^2}{5}$, или, замѣняя m^2 его величиною, находимъ: $x^2 = R^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, откуда

$$x = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},\quad 2y = 2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}};$$

полная же поверхность цилиндра $= 2\pi R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т.-е. она равновелика боковой поверхности цилиндра, имѣющаго основаніемъ большой кругъ даннаго шара, а высотой сторону правильнаго звѣзднаго десятиугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ.

V. $m^2 > R^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, для x получаются мнимыя значенія, слѣд., задача невозможна.

Если, теперь, назовемъ полную поверхность цилиндра буквою S и помножимъ на 2π предыдущія неравенства и равенства, можно все изслѣдованіе резюмировать слѣдующимъ образомъ.

Резюме изслѣдованія.

$S < 2\pi R^2$	задача	имѣетъ	1 рѣшеніе.
$S = 2\pi R^2$	„	„	2 рѣшенія.
$2\pi R^2 < S < \pi R^2(\sqrt{5}+1)$	„	„	2 „
$S = \pi R^2(\sqrt{5}+1)$	„	„	1 рѣшеніе.
$S > \pi R^2(\sqrt{5}+1)$	„	„	0 рѣшеній.

Примѣчаніе. Если въ ур—ніяхъ (1) и (2) перемѣнимъ y на $-y$, то легко видѣть, что ур—ніе (4) можно истолковать, полагая, что вмѣсто полной поверхности цилиндра дается разность между суммою его основаній и боковою поверхностью. Можно бы было повторить изслѣдованіе предыдущей задачи, называя рѣшеніями второго рода—рѣшенія, отвѣчающія измѣненной задачѣ.

Задача XIII.

607. *Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ $2p$ и сумму S гипотенузы и высоты.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ x и y — искомые катеты, z — гипотенуза, u — соотвѣтствующая высота. Ур—нія задачи будутъ:

$$x + y + z = 2p;\quad z + u = S;\quad x^2 + y^2 = z^2;\quad xy = uz.$$

Изъ перваго имѣемъ: $x^2 + y^2 + 2xy = (2p - z)^2 = 4p^2 - 4pz + z^2$, или, въ силу третьяго и четвертаго ур—ній: $uz = 2p^2 - 2pz$; но $u = S - z$, сл.

$$z(S - z) = 2p^2 - 2pz,\quad \text{или}\quad z^2 - (2p + S)z + 2p^2 = 0 \;.\;.\;.\;(1)$$

Найдя z, для опредѣленія x и y получимъ ур—нія

$$x + y = 2p - z \quad \text{и} \quad xy = (S - z) \,.\, z,$$

откуда видно, что x и y суть корни ур—нія

$$X^2 - (2p - z)X + (S - z)z = 0\ .\ .\ .\ (2)$$

Изслѣдованіе. Чтобы корни ур—нія (1) были дѣйствительны, надо чтобы $(2p + S)^2 - 8p^2 \geqslant 0$, откуда

$$S \geqslant 2p(\sqrt{2} - 1).$$

Пусть это условіе удовлетворено; тогда оба корня ур—нія (1) будутъ и положительны, ибо ихъ произведеніе $(2p^2)$ и сумма $(2p + S)$ положительны. Но больщій корень долженъ быть отброшенъ; въ самомъ дѣлѣ, высота u есть количество существенно положительное, а изъ ур—нія $u = S - z$ видно, что для того, чтобы было $u > 0$, необходимо, чтобы было $z < S$; но большій корень больше полусуммы корней, равной $p + \frac{S}{2}$, а само количество $p + \frac{S}{2}$ больше S, ибо для возможности треугольника, очевидно, необходимо, чтобы было $p > \frac{S}{2}$. Что касается меньшаго корня, то онъ будетъ меньше S, если результатъ подстановки S вмѣсто z въ первую часть ур—нія (1) отрицателенъ, что приводитъ къ неравенству

$$-2Sp + 2p^2 < 0 \quad \text{или} \quad S > p.$$

Какъ скоро это условіе удовлетворено, то будетъ удовлетворено и условіе дѣйствительности корней, ибо

$$p > 2p(\sqrt{2} - 1), \quad \text{или} \quad 3 > 2\sqrt{2}, \quad \text{или} \quad 9 > 8$$

Итакъ, для z получается одно значеніе:

$$z' = \frac{2p + S - \sqrt{(2p + S)^2 - 8p^2}}{2},$$

съ условіемъ: $p < S < 2p$.

Условіе дѣйствительности корней ур—нія (2) есть

$$(2p - z')^2 - 4(S - z')z' > 0, \quad \text{или} \quad 5z'^2 - 4z'(p + S) + 4p^2 > 0$$

или, въ силу равенства (1),

$$5z'(2p + S) - 10p^2 - 4z'(p + S) + 4p^2 > 0, \quad \text{или} \quad (6p + S)z' - 6p^2 > 0,$$

откуда

$$z' > \frac{6p^2}{6p + S}.$$

Итакъ, чтобы x и y были дѣйствительны, необходимо, чтобы $\frac{6p^2}{6p + S}$ было меньше меньшаго корня ур. (1), для этого же необходимо 1) чтобы результатъ подстановки $\frac{6p^2}{6p + S}$ вмѣсто z въ первую часть ур. (1) былъ > 0; и 2) чтобы при этомъ $\frac{6p^2}{6p + S}$ было $<$ полусуммы корней, т.-е. чтобы было $\frac{6p^2}{6p + S} < \frac{2p + S}{2}$.

Подстановка даетъ:

$$36p^4 - 6p^2(6p + S)(2p + S) + 2p^2(6p + S)^2 = 36p^4 - 24Sp^3 - 4S^2p^2 =$$
$$= 4p^2(9p^2 - 6Sp - S^2),$$

этотъ результатъ долженъ быть > 0. Замѣтимъ, что $\frac{6p^2}{6p + S}$ въ самомъ дѣлѣ

$< \frac{2p+S}{2}$, заключаемъ, что для дѣйствительности x и y должно быть удовлетворено неравенство

$$-S^2 - 6Sp + 9p^2 > 0$$

вмѣстѣ съ условіемъ $p < S < 2p$.

Отсюда находимъ, что при $S \leqslant 3p(\sqrt{2} - 1)$ корни x и y будутъ дѣйствительны; замѣтивъ, что $z' < p$ и $S > p$, находимъ, что сумма $x + y$, равная $2p - z'$, и произведеніе xy, равное $(S - z)z'$, положительны, слѣд. x и y положительны.

Итакъ, условія возможности задачи таковы:

$$p < S < 2p, \quad S \leqslant 3p(\sqrt{2} - 1).$$

Но $3p(\sqrt{2} - 1) < 2p$, ибо это неравенство эквивалентно $18 < 25$; слѣдов., условія, необходимыя и достаточныя для возможности задачи, приводятся къ

$$p < S \leqslant 3p(\sqrt{2} - 1),$$

причемъ задача имѣетъ *одно рѣшеніе.*

Отсюда, между прочимъ, заключаемъ, что maximum $S = 3p(\sqrt{2} - 1)$; притомъ $x = y$, т. е. *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра равнобедренный имѣетъ наибольшую сумму гипотенузы съ соотвѣтствующею высотою.*

Задача XIV.

608. *Вписать въ данный полукругъ прямоугольникъ, зная сумму p его основанія и высоты.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ: R — радіусъ даннаго круга, $2x$ — основаніе и y — высота искомаго прямоугольника, имѣемъ непосредственно ур—нія:

$$y + 2x = p \;.\;.\;.\;(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2 \;.\;.\;.\;(2).$$

Рѣшая первое относительно y, имѣемъ:

$$y = p - 2x \;.\;.\;.\;(3)$$

Подставляя это выраженіе y въ ур—ніе (2), найдемъ

$$5x^2 - 4px + p^2 - R^2 = 0 \;.\;.\;.\;(4)$$

откуда

$$x = \frac{2p \pm \sqrt{5R^2 - p^2}}{5} \;.\;.\;.\;(5).$$

Затѣмъ y вычисляется по формулѣ (3).

Изслѣдованіе. Въ этой задачѣ будемъ разсматривать и отрицательныя значенія x и y. Когда x и y будутъ положительны, будемъ называть рѣшеніе — рѣшеніемъ перваго рода; оно будетъ втораго рода, если при $x > 0$ будетъ $y < 0$, т. е. когда дана будетъ разность между высотой и основаніемъ; наконецъ, рѣшеніемъ третьяго рода называемъ то, когда $x < 0$, а $y > 0$, т. е. когда дана разность между основаніемъ и высотою.

Условіе дѣйствительности x выражается неравенствомъ

$$p \leqslant R\sqrt{5}.$$

Затѣмъ, изъ ур—нія (4) видимъ, что оба значенія x будутъ положительны, или одно положительно, а другое отрицательно, смотря по тому, будетъ ли p

больше, или меньше R. Съ другой стороны, изъ формулы (3) заключаемъ, что положительному x будетъ соотвѣтствовать положительный y, когда $x < \frac{p}{2}$, и отрицательный y, когда $x > \frac{p}{2}$. Въ такомъ случаѣ, нужно знать результатъ подстановки $\frac{p}{2}$ вмѣсто x въ первую часть ур—нія (4). Этотъ результатъ $\frac{p^2-4R^2}{4}$; слѣд. нужно различать три случая: $p < 2R$, $p = 2R$, $p > 2R$ (послѣдній случай возможенъ, ибо 2R меньше $R\sqrt{5}$).

Итакъ, количества, подлежащія разсмотрѣнію, въ порядкѣ возрастающихъ величинъ, таковы: R, 2R, $R\sqrt{5}$; мы должны измѣнять p отъ 0 до R, отъ R до 2R, и наконецъ отъ 2R до $R\sqrt{5}$.

I. $p < R$. Произведеніе корней ур—нія (4) отрицательно, слѣд. одно значеніе x положительно, другое отрицательно. Отрицательной величинѣ x соотвѣтствуетъ положительное значеніе y; слѣд. всегда имѣемъ рѣшеніе 2-го рода. Положительное значеніе x больше $\frac{p}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, p будучи меньше R, меньше и 2R, слѣд. количество $\frac{p^2-4R^2}{4}$ отрицательно; это значитъ, что $\frac{p}{2}$ заключается между корнями ур—нія (4), а потому положительный корень долженъ быть $> \frac{p}{2}$. Такимъ образомъ положительному x соотвѣтствуетъ, въ силу ур—нія (3), отрицательное значеніе y. Слѣд. имѣемъ рѣшеніе 3-го рода. Итакъ, при $p < R$ задача имѣетъ два рѣшенія: одно 2-го рода, другое 3-го рода.

II. $p = R$. Въ этомъ случаѣ

$$x = 0,\ y = R,\quad x = \frac{4}{5}R,\ y = -\frac{3}{5}R$$

Первое рѣшеніе можемъ разсматривать, какъ рѣшеніе 1-го или 2-го рода, второе — рѣшеніе 3-го рода. Этотъ случай относится къ первому, но его можно отнести и къ слѣдующему.

III. $R < p < 2R$. Оба корня ур—нія (4) положительны, но такъ какъ $\frac{p^2-4R^2}{4}$ отрицательно, одинъ изъ корней меньше, другой больше $\frac{p}{2}$. Первому соотвѣтствуетъ положительное значеніе y, второму — отрицательное. Итакъ одно рѣшеніе относится къ 1-му роду, другое къ 3-му.

IV. $p = 2R$. Оба значенія x положительны, но количество $\frac{p^2-4R^2}{4}$ обращается въ нуль, слѣд. одно значеніе x равно $\frac{p}{2}$ или R, а соотвѣтствующее значеніе y равно нулю. Другое значеніе x, $\frac{3}{10}p$ или $\frac{3}{5}R$ найдемъ, вычтя $\frac{p}{2}$ изъ суммы корней $\frac{4}{5}p$, а для соотвѣтствующаго значенія y находимъ $\frac{4}{5}R$. Итакъ, имѣемъ два рѣшенія, изъ коихъ второе будетъ 1-го рода, между тѣмъ какъ первое можно отнести, по произволу, или къ 1-му или къ 3-му роду.

V. $2R < p < R\sqrt{5}$. Въ этомъ случаѣ оба значенія x положительны, и оба меньше $\frac{p}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ сумма корней, равная $\frac{4}{5}p$, меньше p, слѣдов. оба корня не могутъ быть больше $\frac{p}{2}$, и такъ какъ количество $\frac{p^2-4R^2}{4}$ положительно, они необходимо меньше $\frac{p}{2}$. Въ такомъ случаѣ положительнымъ значеніямъ x соотвѣтствуютъ и положительные y-ки, имѣемъ два рѣшенія 1-го рода.

VI. $p = R\sqrt{5}$. Имѣемъ двойное рѣшеніе 1-го рода.

Нельзя брать $p > R\sqrt{5}$, ибо тогда оба значенія x дѣлаются мнимыми и задача невозможна.

Резюме изслѣдованія.

Измѣненія p.	Число рѣшеній:		
	1-го рода;	2-го рода;	3-го рода.
$p < R$	0	1	1
$p = R$	0	1	1
$R < p < 2R$.	1	0	1
$p = 2R$.	1	0	1
$2R < p < R\sqrt{5}$.	2	0	0
$p = R\sqrt{5}$.	1	0	0
$p > R\sqrt{5}$.	0	0	0

Задача XV.

609. *Вычислить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его периметръ* $2p$, *если притомъ извѣстно, что сумма объемовъ, образуемыхъ треугольникомъ при вращеніи его поочередно около каждаго катета, равновелика полушару радіуса* R.

Рѣшеніе: Пусть будутъ x и y — катеты, z — гипотенуза; непосредственно имѣемъ 3 ур—нія:

$$x + y + z = 2p; \quad xy(x + y) = 2R^3; \quad x^2 + y^2 = z^2$$

Легко исключить изъ этихъ ур—ній x и y; для этого выражаемъ изъ 1-го и 2-го $x + y$ и xy черезъ z; имѣемъ

$$x + y = 2p - z, \quad xy = \frac{2R^3}{2p - z}.$$

Отсюда имѣемъ:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (2p - z)^2 - \frac{4R^3}{2p - z}.$$

Вставляя это выраженіе $x^2 + y^2$ въ третье ур—ніе системы, находимъ

$$z^2 = (2p - z)^2 - \frac{4R^3}{2p - z},$$

или

$$pz^2 - 3p^2z + 2p^3 - R^3 = 0 \;.\;.\;. (1).$$

Итакъ, для опредѣленія z имѣемъ ур—ніе (1), квадратное относительно z. Опредѣливъ z, можемъ вычислить x и y, въ самомъ дѣлѣ, зная, что сумма $x + y = 2p - z$, а произведеніе $xy = \frac{2R^3}{2p - z}$, найдемъ эти неизвѣстныя изъ ур—нія

$$X^2 - (2p - z)X + \frac{2R^3}{2p - z} = 0 \;.\;.\;. (2).$$

Изслѣдованіе. Чтобы система опредѣленныхъ такимъ образомъ величинъ x, y и z отвѣчала задачѣ, необходимо и достаточно, чтобы эти величины были дѣйствительны и положительны.

Чтобы корни ур—нія (2) были дѣйствительны, необходимо, чтобы

$$(2p-z)^2 \geqslant \frac{8R^3}{(2p-z)};$$

а чтобы они были положительны, необходимо, чтобы было

$$2p-z>0, \quad \text{или} \quad z<2p.$$

Пусть это послѣднее условіе удовлетворено; въ такомъ случаѣ, умноживъ обѣ части предыдущаго неравенства на положительное количество $2p-z$, найдемъ $(2p-z)^3 \geqslant 8R^3$, или, извлекая изъ обѣихъ частей кубичный корень, имѣемъ $2p-z \geqslant 2R$, или $z \leqslant 2(p-R)$, и какъ z должно быть положительно, необходимо, чтобы

$$0<z\leqslant 2(p-R),$$

а это предполагаетъ, чтобы было $p>R$. Какъ скоро z меньше или равно $2(p-R)$, оно и подавно будетъ меньше $2p$, и условіе $z<2p$ будетъ удовлетворено. Итакъ, число рѣшеній задачи равно числу корней ур—нія (1), удовлетворяющихъ условіямъ

$$0<z\leqslant 2(p-R).$$

Не трудно убѣдиться, что корни ур—нія (1) всегда дѣйствительны, а какъ предполагается $R<p$, то они и положительны. Остается изслѣдовать, сколько этихъ корней заключается между 0 и $2(p-R)$. Для этого нужно знать величины первой части ур—нія (1) при $z=0$ и $z=2(p-R)$. При $z=0$, она даетъ $2p^3R^3$ — величину положительную. Подстановка $2(p-R)$ вмѣсто z даетъ

$$-R(R^2-4pR+2p^2), \quad \text{или} \quad -R\{R-p(2-\sqrt{2})\}\{R-p(2+\sqrt{2})\}.$$

Но мы видѣли, что R должно быть $<p$, слѣд., 3-й множитель <0, 1-й также <0, слѣд. все зависитъ отъ знака $R-p(2-\sqrt{2})$.

Итакъ, нужно разсмотрѣть три случая:

$$0<R<p(2-\sqrt{2}), \quad p(2-\sqrt{2})<R<p, \quad R>p.$$

I. Пусть $0<R<p(2-\sqrt{2})$. Въ такомъ случаѣ результатъ подстановки вм. z выраженія $2(p-R)$ отрицателенъ, а потому одинъ изъ корней ур—нія (1) заключается между 0 и $2(p-R)$, другой корень больше $2(p-R)$. Первый корень даетъ искомое рѣшеніе, второй не соотвѣтствуетъ вопросу: задача имѣетъ 1 рѣшеніе. Это рѣшеніе мы получимъ, взявъ для z меньшій корень ур—нія (1), а для x и y корни ур—нія (2), когда въ немъ y замѣненъ меньшимъ корнемъ ур—нія (1).

II. Когда $p(2-\sqrt{2})<R<p$, то при $z=2(p-R)$ триномъ положителенъ, и слѣд. или оба корня ур—нія (1) заключаются между 0 и $2(p-R)$, или оба больше $2(p-R)$. Чтобы оба корня содержались между 0 и $2(p-R)$, нужно, чтобы ихъ полусумма $\frac{3}{2}p$ была $<2(p-R)$, т.-е. чтобы $3p<4(p-R)$, или $R<\frac{p}{4}$, условіе, несогласное съ положеніемъ $R>p(2-\sqrt{2})$. Итакъ, въ данномъ случаѣ оба корня ур—нія (1) больше $2(p-R)$, и ни тотъ, ни другой не даютъ рѣшенія.

III. Если $R>p$, то уже видѣли, что въ такомъ случаѣ задача невозможна.

Резюме изслѣдованія.

1. $R < p(2 - \sqrt{2})$: Задача имѣетъ 1 рѣш.
[x = меньшему корню ур—нія (1)].

2. $R = p(2 - \sqrt{2})$: Задача имѣетъ 1 рѣш.
[$x = 2(p - R)$, треугольникъ равнобедренный].

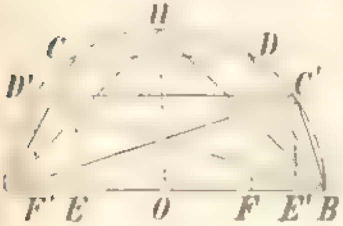
3. $R > p(2 - \sqrt{2})$: Задача невозможна.

Задача XVI.

610. *Въ данный полукругъ діаметра* $AB = 2R$ *вписать хорду CD, параллельную AB, такъ чтобы* $AC^2 + CD^2 + DB^2 = m^2$, *гдѣ m — данная линія.*

Рѣшеніе. Принявъ за неизвѣстное $AC = x$, выразимъ CD въ зависимости отъ R и x. Но $CD = 2R - 2AE$ и $AC^2 = 2R \times AE$, слѣд. $CD = 2R - \frac{x^2}{R}$. Ур—ніе будетъ

$$2x^2 + \left(2R - \frac{x^2}{R}\right)^2 = m^2 \; . \; . \; . \; (1)$$



Черт. 98.

Это ур—ніе, выведенное для одного случая, приложимо ко всѣмъ случаямъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть хорда CD приняла положеніе C'D', въ которомъ точки C' и D' лежатъ въ другихъ четвертяхъ; обозначая, какъ и прежде, прямую AC' буквою x, будемъ имѣть: $C'D' = 2AE' - 2R$; а какъ $AE' \times 2R = AC'^2$, то $C'D' = \frac{x^2}{R} - 2R$; ур—ніе будетъ въ этомъ случаѣ

$$2x^2 + \left(\frac{x^2}{R} - 2R\right)^2 = m^2;$$

оно тождественно съ (1). Даемъ ему видъ

$$x^4 - 2R^2x^2 + R^2(4R^2 - m^2) = 0 \; . \; . \; . \; (2).$$

Изслѣдованіе. Для изслѣдованія и рѣшенія этого биквадратнаго уравненія положимъ

$$x^2 = y \; . \; . \; . \; (3),$$

такъ что ур—ніе будетъ

$$y^2 - 2R^2y + R^2(4R^2 - m^2) = 0 \; . \; . \; . \; (4).$$

Для того, чтобы корень ур—нія (2) служилъ отвѣтомъ на предложенную задачу, необходимо и достаточно, чтобы было

$$x \text{ дѣйств.}, \quad x > 0, \quad x < 2R \; . \; . \; . \; (5).$$

Но для полученія корней ур—нія (2) нужно рѣшить (4) и найденные корни внести поочередно въ (3); отсюда видно, что x будетъ дѣйствит., если y будетъ дѣйствит. и положительно, поэтому нужно изслѣдовать съ этой точки зрѣнія корни ур—нія (4).

Условіе дѣйствительности корней ур. въ y.— Оно будетъ $R^4 - R^2(4R^2 - m^2) > 0$ или $m^2 > 3R^2$.

Знаки корней. Произведеніе корней $= R^2(4R^2 - m^2)$; оно > 0, когда $m^2 < 4R^2$; равно 0 при $m^2 = 4R^2$, и < 0 когда $m^2 > 4R^2$.

Сумма корней $= 2R^2$ и слѣд. всегда положительна.

Величина корней.—x должно быть $< 2R$, слѣд. y должно быть $< 4R^2$. Подставляя $4R^2$ вмѣсто y въ триномъ (4), имѣемъ

$$f(4R^2) = 16R^4 - 2R^2 . 4R^2 + R^2(4R^2 - m^2) = R^2(12R^2 - m^2).$$

Отсюда видно, что если $m^2 < 12R^2$, будетъ $f(4R^2) > 0$; при $m^2 = 12R^2$, $f(4R^2) = 0$; при $m^2 > 12R^2$ будетъ $f(4R^2) < 0$.

Такимъ образомъ, критическія значенія m^2 будутъ:

$$3R^2,\ 4R^2,\ 12R^2 \text{ и } +\infty,$$

и легко составить нижеслѣдующую таблицу знаковъ,

Скала значеній m^2.	0		$3R^2$		$4R^2$		$12R^2$		$\sim$
Знакъ реализанта		—	0	+		+		[illegible]	
Произведеніе корней				[illegible]		—		[illegible]	
Сумма корней				+		+		+	
$f(4R^2)$				+		[illegible]		—	
1-й коэффиціентъ.				+		+		+	

изъ которой заключаемъ:

1. $m^2 < 3R^2$. Корни ур—нія (4) мнимые, слѣд. мнимы и корни (2). Задача невозможна.

2. $m^2 = 3R^2$. Это значеніе есть minimum (m^2); реализантъ $= 0$, корни ур. (4) дѣйствительные равные, ихъ общая величина $= R^2$; слѣд. ур—ніе (2) имѣетъ два корня равныхъ $+ R$, и два корня равныхъ $- R$. Изъ нихъ задачѣ отвѣчаетъ $x = + R$, какъ дѣйств., положит. и меньшее $2R$ значеніе x-са. Искомая фигура *правильный полу-шестиугольникъ.*

Слѣдуетъ замѣтить, что сумма трехъ квадратовъ, равная въ данномъ случаѣ $3R^2$, представляетъ minimum, ибо m^2 вообще больше $3R^2$, но дѣлается $= 3R^2$ при $x = R$. Слѣд. *сумма квадратовъ трехъ разсматриваемыхъ хордъ имѣетъ minimum $= 3R^2$, когда фигура, ими образуемая, есть правильный полушестиугольникъ.*

3. $3R^2 < m^2 < 4R^2$. Дѣйствительные корни ур. (4) въ этомъ случаѣ положительны, ибо ихъ сумма и произведеніе > 0; слѣд. всѣ 4 корня ур—нія (2) дѣйствительны, и потому оно имѣетъ 2 положительныхъ корня. Далѣе, знакъ $f(4R^2)$, одинаковый съ знакомъ 1-го коэффиціента, слѣд. $4R^2$ — внѣ корней y; а какъ полусумма корней $= R^2$, то расположеніе чиселъ таково

$$y' \ldots y'' \ldots 4R^2,$$

слѣд. каждый изъ двухъ положительныхъ корней ур—нія (2) меньше 2R, и задача имѣетъ два рѣшенія

$$x=\sqrt{R^2 \pm R\sqrt{m^2-3R^2}}.$$

4. $m^2 = 4R^2$. При переходѣ черезъ $4R^2$, произведеніе корней ур—нія (4) мѣняетъ знакъ, слѣд. при $m^2 = 4R^2$ оно обращается въ нуль; поэтому одно значеніе y равно нулю, а другое суммѣ корней, т.-е. $2R^2$; значитъ, два корня ур—нія (2) равны нулю, а два равны $\pm R\sqrt{2}$, т.-е. задача имѣетъ 2 рѣшенія

$$x' = 0, \quad x'' = \pm R\sqrt{2};$$

первое даетъ діаметръ 2R, другое — полупериметръ вписаннаго квадрата ABB.

5. $4R^2 < m^2 < 12R^2$. Произведеніе дѣйствительныхъ корней (4) отрицательно, слѣд. одно рѣшеніе y меньше, другое больше 0. Первое даетъ два мнимыхъ значенія x, второе — два дѣйствительныхъ. Такъ какъ сумма корней > 0, то этотъ положительный корень имѣетъ большую абсолютную величину. Нужно сравнить его съ $4R^2$. $f(4R^2)$ имѣетъ знакъ 1-го коэффиціента, слѣд. $4R^2$ — внѣ корней (y). Полусумма корней $= R^2$, расположеніе чиселъ таково

$$y' \;.\;.\;.\; y'' \;.\;.\; 4R^2,$$

слѣдовательно $y'' < 4R^2$, и потому (+)-й корень ур—нія (2) даетъ отвѣтъ на задачу, которая т. о. имѣетъ одно рѣшеніе

$$x=\sqrt{R^2 + R\sqrt{m^2-3R^2}}.$$

6. $m^2 = 12R^2$. Въ этомъ случаѣ таблица показываетъ, что $f(4R^2) = 0$, слѣд. положительный корень ур—нія (4) равенъ $4R^2$, а слѣд.

$$x = 2R.$$

Это — предѣльный случай задачи: контуръ, квадраты сторонъ котораго даютъ въ суммѣ $12R^2$, есть ABAB.

7. При $m^2 > 12R^2$, произведеніе корней отрицательно, а сумма положительна, слѣд. одинъ корень ур—нія (4) < 0, другой > 0, и абсолютная величина положительнаго корня больше; $f(4R^2)$ отрицательна, т.-е. имѣетъ знакъ, противоположный 1-му коэффиціенту, слѣд. $4R^2$ находится между корнями, и расположеніе чиселъ таково:

$$y' \;.\;.\;.\; 4R^2 \;.\;.\;.\; y'',$$

значитъ $y'' > 4R^2$, а потому $x'' > 2R$, и задача невозможна. Итакъ: *maximum* суммы трехъ квадратовъ $= 12R^2$.

Резюме изслѣдованія.

$$\begin{array}{ll}
m^2 < 3R^2: & \text{корни мнимые} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \text{ рѣшеній} \\
m^2 = 3R^2: & \text{правильный } \frac{1}{2} \text{ шестиугольникъ, min. } (m^2) \;.\;.\; 1 \text{ рѣшеніе} \\
m^2 > 3R^2 & \left\{\begin{array}{ll}
m^2 < 4R^2 & .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2 \text{ рѣшенія} \\
m^2 = 4R^2: & x' = 0, \quad x'' = \pm R\sqrt{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2 \text{ рѣшенія} \\
m^2 > 4R^2 & \left\{\begin{array}{l}
m^2 < 12R^2:\ x' \text{ мним.};\ 0 < x'' < 2R \;.\;.\; 1 \text{ рѣшеніе} \\
m^2 = 12R^2:\ x' \text{ мним.};\quad x'' = 2R \;.\;.\; 1 \text{ рѣшеніе} \\
m^2 > 12R^2:\ x' \text{ мним.};\quad x'' > 2R \;.\;.\; 0 \text{ рѣшеній.}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}$$

611 Изслѣдованіе суммы трехъ квадратовъ.— Для суммы m^2 трехъ квадратовъ мы нашли (2) выраженіе:

$$m^2 = \frac{1}{R^2}\left[x^4 - 2R^2x^2 + 4R^4\right],$$

представляющее биквадратный триномъ, который изслѣдовать мы умѣемъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$; слѣд. мы можемъ прослѣдить его измѣненіе при измѣненіи x отъ 0 до 2R, какъ требуетъ геометрическій вопросъ, и этимъ путемъ найдемъ въ болѣе сжатой формѣ результаты предыдущаго изслѣдованія. Для этого представимъ m^2 въ видѣ:

$$m^2 = \frac{1}{R^2}\left[(x^2 - R^2)^2 + 3R^4\right].$$

Отсюда прямо видно, что когда x возрастаетъ отъ 0 до R, $(x^2 - R^2)^2$ уменьшается отъ R^4 до 0, а слѣд. m^2 уменьшается отъ $4R^2$ до $3R^2$; при дальнѣйшемъ возрастаніи x отъ R до 2R, $(x^2 - R^2)^2$ возрастаетъ отъ 0 до $9R^4$, и слѣд. m^2 увеличивается отъ $3R^2$ до $12R^2$; иначе говоря, m^2 проходитъ черезъ минимумъ $3R^2$, когда $x = R$.

Эти результаты резюмированы въ слѣдующей таблицѣ:

x	0	$<$	R	$<$	$R\sqrt{2}$	$<$	2R.
m^2	$4R^2$		$3R^2$		$4R^2$		$12R^2$.

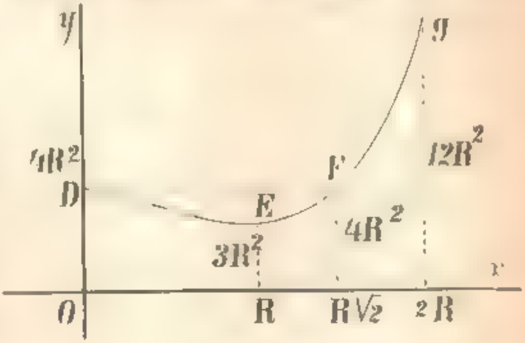
Величина m^2 измѣняется, уменьшаясь отъ $4R^2$ до $3R^2$, затѣмъ увеличивается до $12R^2$, слѣд. она принимаетъ два раза всякое значеніе, содержащееся между $3R^2$ и $4R^2$, разъ при x, содержащемся между 0 и R, другой разъ при x, лежащемъ между R и $R\sqrt{2}$; и одинъ разъ всякое значеніе, содержащееся между $4R^2$ и $12R^2$. Это значитъ, что задача невозможна, когда данное m^2 меньше $3R^2$, или больше $12R^2$, что она имѣетъ 1 рѣшеніе, когда m^2 содержится между $12R^2$ и $4R^2$, и имѣетъ 2 рѣшенія, когда m^2 заключается между $4R^2$ и $3R^2$. Это результаты предыдущаго изслѣдованія, но представленные въ сжатой формѣ.

Изобразимъ графически измѣненія m^2, представляя величины x прямыми, откладываемыми на оси Ox отъ точки O, а величины m^2 нанося на перпендикуляры параллельные OY. Такимъ образомъ получимъ кривую DEFG, изображающую измѣненія m^2.

На ней видно, что:

1) Для опредѣленія величины m^2, соотвѣтствующей данному значенію x, достаточно нанести x на ось OX отъ точки O, и взять ординату кривой, соотвѣтствующую полученной точкѣ.

2) Чтобы найти величину x, соотвѣтствующую данной величинѣ m^2, достаточно пересѣчь кривую параллелью къ OX, отстоящею отъ OX на m^2, и взять абсциссы точекъ пересѣченія кривой съ параллелью.

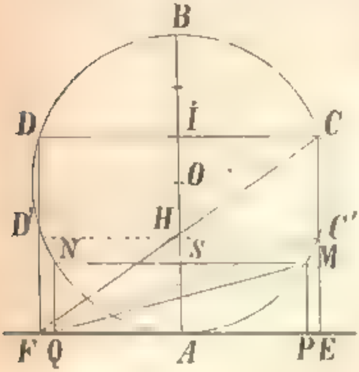


Черт. 99.

Такимъ образомъ легко видѣть, что задача не имѣетъ рѣшеній, когда m^2 меньше $3R^2$, или больше $12R^2$, что получаются двѣ точки встрѣчи, слѣд. и два рѣшенія, когда m^2 содержится между $3R^2$ и $4R^2$ и наконецъ—одна точка встрѣчи, или только одно рѣшеніе, когда m^2 содержится между $4R^2$ и $12R^2$.

Задача XVII.

612. *Дана окружность O и къ ней касательная въ точкѣ A. Провести хорду MN параллельно этой касательной такъ, чтобы прямоугольникъ MNPQ имѣлъ діагональ MQ данной длины m.*



Черт. 100.

Рѣшеніе. Примемъ за неизвѣстное разстояніе $AS = x$ искомой хорды отъ касательной, и замѣтимъ, что это неизвѣстное можетъ имѣть только величину положительную, не большую 2R.

Изъ прямоугольнаго треугольника MQP находимъ: $\overline{MQ}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2$.

Но

$$\overline{PQ}^2 = 4\overline{MS}^2 = 4 \times SA \times SB = 4x(2R - x);$$

подстановка даетъ

$$x^2 + 4x(2R - x) = m^2.$$

Это уравненіе совершенно общее, ибо выраженіе для $\overline{PQ}^2$ остается одинаковымъ, каково бы ни было положеніе хорды MN. Итакъ, ур—ніе задачи будетъ

$$3x^2 - 8Rx + m^2 = 0\ .\ .\ .\ (1)$$

Изслѣдованіе. Чтобы корень этого ур—нія давалъ рѣшеніе геометрическаго вопроса, необходимо и достаточно, чтобы онъ былъ дѣйствителенъ, положителенъ и не больше 2R.

Условіе дѣйствительности корней ур—нія (1) выражается неравенствомъ

$$16R^2 - 3m^2 \geqslant 0, \quad \text{или} \quad m^2 - \frac{16R^2}{3} \leqslant 0\ .\ .\ .\ (2).$$

Корни этого неполнаго квадратнаго тринома суть: $\pm\frac{4R\sqrt{3}}{3}$, слѣд., чтобы удовлетворить неравенству (2), необходимо и достаточно дать m значеніе внутри интервала

$$\text{между} -\frac{4R\sqrt{3}}{3} \text{ и } +\frac{4R\sqrt{3}}{3};$$

но какъ въ данномъ вопросѣ m положительно, то необходимо и достаточно, чтобы было $m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

Знаки корней. Произведеніе и сумма корней ур. (1) положительны, слѣд. корни всегда положительны.

Величина корней. Нужно опредѣлить, какъ расположены корни относительно 2R, а для этого въ первую часть ур. (1) подставить 2R вмѣсто x; найдемъ

$$f(2R) = 3\,.\,(2R)^2 - 8R\,.\,2R + m^2 = m^2 - 4R^2 = (m + 2R)(m - 2R),$$

отсюда видно, что $f(2R) > 0$, если $m > 2R$, и $f(2R) < 0$, если $m < 2R$.

Такимъ образомъ, критическія значенія m суть

$$0,\ 2R,\ \frac{4R\sqrt{3}}{3} \text{ и } +\infty,$$

и въ изслѣдованіи легко орьентироваться при помощи слѣдующей таблицы знаковъ:

Скала значеній m	0		2R		$\frac{4R\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
Знакъ реализ.		+		+		−	
Произведеніе корней		+		+			
Сумма корней		+		+			
f(2R)		−		+			
1-й коэффиц.		+		+			

Изслѣдуемъ каждый интервалъ.

1) $m < 2R$. Оба корня дѣйствительны и положительны: $f(2R)$ имѣетъ знакъ, противоположный 1-му коэффиценту, слѣд. 2R лежитъ между корнями

$$0 \; . \; . \; . \; x' \; . \; . \; . \; 2R \; . \; . \; . \; x''$$

Только меньшій корень x' меньше 2R; слѣд. задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

$$x' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}.$$

2) $m = 2R$. Такъ какъ при этомъ значеніи m первая часть ур—нія обращается въ нуль, то 2R есть корень ур—нія, другой корень котораго $\frac{8R}{3} - 2R = \frac{2}{3}R$. Первый корень даетъ прямоугольникъ, сливающійся съ діаметромъ AB; второй отвѣчаетъ хордѣ, расположенной на $\frac{1}{3}R$ ниже центра.

3) $2R < m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$. Оба корня дѣйствительны и положительны; знакъ $f(2R)$ одинаковъ съ 1-мъ коэффицентомъ, сл. 2R лежитъ внѣ корней, полусумма которыхъ $= \frac{4}{3}R$; такъ какъ $2R > \frac{4}{3}R$, слѣд. 2R больше большаго корня, и потому

$$0 \; . \; . \; . \; x' \; . \; . \; . \; x'' \; . \; . \; . \; 2R,$$

оба корня допустимы, и задача имѣетъ 2 рѣшенія:

$$x' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}, \quad x'' = \frac{4R + \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3},$$

дающія двѣ точки, равноотстоящія отъ точки I, опредѣляемой отрѣзкомъ $AI = \frac{4}{3}R$.

4) $m = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$, уравненіе имѣетъ два равныхъ корня: $x' = x'' = \frac{4}{3}R = AI$, а задача—1 рѣшеніе. При этомъ, длина діагонали достигаетъ maximum'a $\frac{4}{3}$ стороны правильнаго вписаннаго въ данный кругъ треугольника.

5) $m > \frac{4R\sqrt{3}}{3}$. Реализантъ отрицателенъ, сл. корни уравненія мнимы и задача невозможна.

Примѣчаніе. Въ случаѣ $2R < m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$ можно искать, какимъ образомъ параллели къ касательной расположены относительно центра. Для этого надо составить $f(R)$; найдемъ:

$$f(R) = m^2 - 5R^2,$$

количество положительное, когда $m > R\sqrt{5}$; равное нулю при $m = R\sqrt{5}$, и отрицательное для $m < R\sqrt{5}$. Замѣчая, что въ разсматриваемомъ случаѣ m содержится между $2R$ и $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$, имѣемъ критическими значеніями m

$$2R, \quad R\sqrt{5}, \quad \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

a) $2R < m < R\sqrt{5}$. $f(R)$ отрицательна, сл. R находится между корнями, и потому разсматриваемыя параллели расположены по обѣ стороны центра.

b) $m = R\sqrt{5}$; $f(R) = 0$, т.-е. R служитъ корнемъ, и сл. одна параллель проходитъ черезъ центръ. Другой корень $\frac{8}{3}R - R = \frac{5}{3}R$, сл. другая параллель проходитъ надъ центромъ, въ разстояніи отъ него равномъ $\frac{2}{3}R$.

c) Если $R\sqrt{5} < m < \frac{4R\sqrt{3}}{3}$, то $f(R) > 0$, и слѣд. R находится внѣ корней; и такъ какъ R меньше ихъ полусуммы $\frac{4}{3}R$, то порядокъ величинъ таковъ

$$0 \ldots R \ldots x' \ldots x'' \ldots 2R,$$

т. е. обѣ параллели проходятъ надъ центромъ, между 0 и R

Резюме.

1. $m < 2R$: 1 рѣшеніе—меньшій корень, $x' = \frac{4R - \sqrt{16R^2 - 3m^2}}{3}$.

2. $m = 2R$: 2 рѣшенія: $x' = \frac{2}{3}R$, $x'' = 2R$.

3. $2R < m < \frac{4\sqrt{3} \cdot R}{3}$: 2 рѣшенія.

4. (max.) $m = \frac{4\sqrt{3} \cdot R}{3}$: 2 сливающіяся рѣшенія, $x' = x'' = \frac{4}{3}R$.

5. $m > \frac{4\sqrt{3} \cdot R}{3}$: корни мнимые, задача невозможна.

613. Прямое изслѣдованіе длины діагонали.—Ур. (1) даетъ

$$m^2 = -3x^2 + 8Rx \ldots (3).$$

Вторая часть есть квадратный триномъ, измѣненія котораго мы изслѣдовать умѣемъ. Намъ нужно прослѣдить его измѣненія, когда x возрастаетъ отъ 0 до

2R и затѣмъ взять отъ полученныхъ величинъ ариѳметич. квадратный корень. Для изслѣдованія удобнѣе m^2 написать въ видѣ:

$$m^2 = -3\left[x^2 - \frac{8}{3}Rx\right],\ \text{или}\ m^2 = -3\left[\left(x - \frac{4}{3}R\right)^2 - \frac{16}{9}R^2\right].$$

Отсюда видно, что когда x возрастаетъ отъ нуля до $\frac{4}{3}R$, количество m^2 возрастаетъ отъ нуля до $\frac{16}{3}R^2$; затѣмъ, когда x увеличивается отъ $\frac{4}{3}R$ до 2R, m^2 уменьшается до $4R^2$. Итакъ, имѣемъ таблицу измѣненій:

$$\begin{array}{l|l}
x & 0 \ldots\ldots\ldots \frac{2}{3}R \ldots\ldots\ldots \frac{4}{3}R \ldots\ldots\ldots 2R \\
m^2 & 0 \ldots\ldots\ldots 4R^2 \ldots\ldots\ldots \frac{16}{3}R^2 \ldots\ldots\ldots 4R^2 \\
m & 0 \ldots < \ldots 2R \ldots < \ldots \frac{4R\sqrt{3}}{3} \ldots > \ldots 2R
\end{array}$$

Отсюда непосредственно видно, что когда хорда MN перемѣщается отъ A до B, длина діагонали MQ возрастаетъ до того момента, когда MN проходитъ черезъ I, для которой $AI = \frac{4}{3}R$. Затѣмъ длина діагонали уменьшается до 2R, когда хорда движется къ B.

Діагональ принимаетъ одинъ разъ всякую длину, содержащуюся между 0 и 2R, когда точка S перемѣщается отъ A къ H; напротивъ, она принимаетъ два раза всякую величину, содержащуюся между 2R и $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$: одинъ разъ, когда точка S перемѣщается отъ H къ I, и другой разъ когда точка S пробѣгаетъ отрѣзокъ IB; эти два положенія хорды симметричны относительно DI, ибо триномъ m^2 беретъ равныя величины при $x = \frac{4}{3}R \pm y$. Такимъ образомъ, находимъ всѣ результаты прежняго изслѣдованія.

Чтобы графически представить измѣненія m при измѣненіи x отъ 0 до 2R, откладываемъ x на оси Ox, а соотвѣтствующія значенія m на оси Oy. Напр., взявъ

$$OA = \frac{4}{3}R \quad \text{и} \quad AB = AC = \frac{2}{3}R,$$

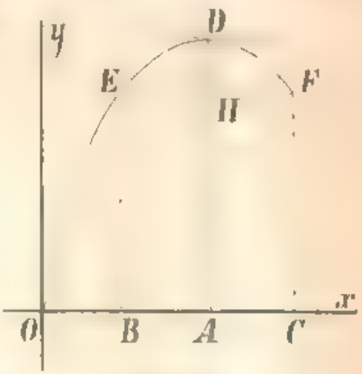
наносимъ на ординатѣ точки A

$$AD = \frac{4R\sqrt{3}}{3},$$

на ординатахъ точекъ B и C:

$$BE = CF = 2R.$$

Такимъ образомъ получимъ дугу OEDF эллипса, ординаты которой и представляютъ измѣненія діагонали m, соотвѣтствующія измѣненіямъ x отъ 0 до 2R.



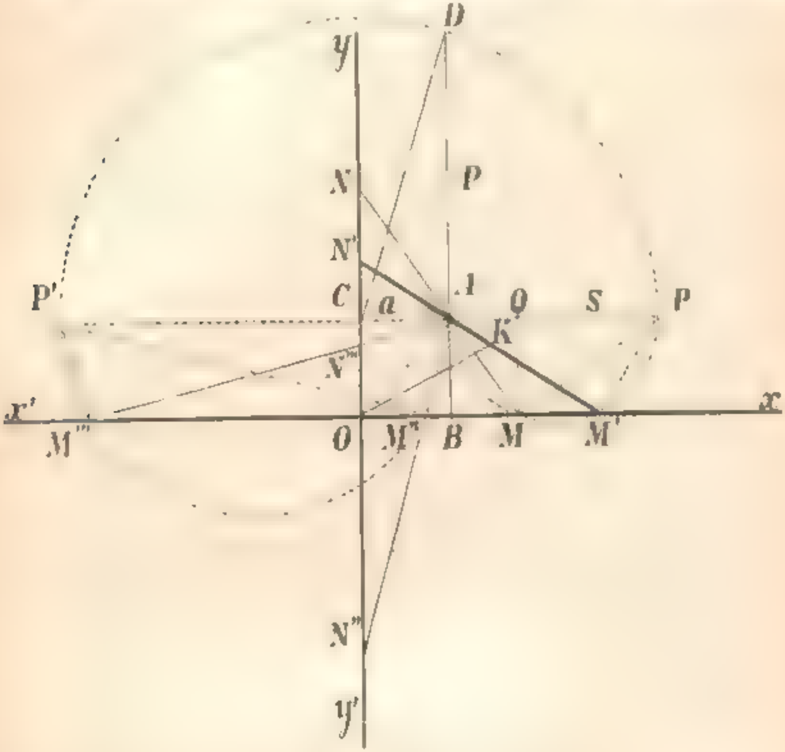
Черт. 104.

Задача XVIII.

614. Задача Паппуса. *„Дана точка A на биссектрисѣ прямого угла, составляемаго осями x'x и y'y; провести черезъ эту точку прямую линію такъ, чтобы отрѣзокъ ея въ одномъ изъ четырехъ угловъ имѣлъ данную длину p.*

Приводимъ эту задачу какъ поучительный образецъ, выясняющій значеніе выбора неизвѣстныхъ. Нерѣдко выборъ неизвѣстныхъ является дѣломъ существенной важности: отъ него зависитъ полученіе ур—нія большей или меньшей сложности. Иной выборъ можетъ повести къ ур—нію биквадратному, иной къ квадратному, наконецъ къ полному ур—нію четвертой степени. Какъ скоро взятое неизвѣстное приводитъ къ ур—нію сложному, нужно попытаться взять за неизвѣстное другую величину, чтобы убѣдиться, не приведетъ ли новый выборъ неизвѣстнаго къ менѣе сложному ур—нію.

615. Первый способъ.—Легко видѣть, что если задача имѣетъ рѣшеніе MN въ углѣ XOY, то будетъ имѣть и другое M'N' симметричное съ первымъ по отношенію къ OA. Затѣмъ, задача всегда имѣетъ рѣшеніе въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY ; въ самомъ дѣлѣ, проведя прямую черезъ точки A и O и поворачивая ее



Черт. 102.

около точки A, въ углѣ YOX', затѣмъ въ XOY' видимъ, что ея отрѣзокъ въ каждомъ изъ этихъ угловъ будетъ измѣняться отъ 0 до ∞.

Итакъ, при всякой величинѣ линіи p задача необходимо имѣетъ 2 рѣшенія по одному въ каждомъ изъ угловъ YOX' и XOY', къ этимъ двумъ рѣшеніямъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, могутъ прибавиться еще два, слѣд. задача можетъ имѣть 4 рѣшенія.

Слѣд., если за неизвѣстное примемъ такую величину, которой значенія, относящіяся къ четыремъ рѣшеніямъ, суть корни одного и того же ур—нія, то получимъ ур. четвертой степени, рѣшеніе котораго въ общемъ видѣ обыкновенно въ рамки начальной алгебры не входитъ.

Напр., примемъ за неизвѣстное разстояніе отъ точки O до одной изъ точекъ M, M', M'', M''', пусть $OM = x$. Обозначимъ длину равныхъ перпендикуляровъ AB и AC буквою a; треуг. MON даетъ: $x^2 + \overline{ON}^2 = p^2$; но изъ подобія треугольниковъ MON и MBA имѣемъ: $ON : a = x : (x - a)$; отсюда ур—ніе:

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-a)^2} = p^2 \; . \; . \; . \; (1)$$

Освободивъ его отъ знаменателя и развернувъ, убѣдимся, что оно четвертой степени, полное и не возвратное. Въ немъ содержатся всѣ четыре рѣшенія.

Во-первыхъ, очевидно, что для сѣкущей M'N' получимъ то же самое ур. (1), принявъ $OM' = x$. Для сѣкущей AM''N'', принявъ $OM'' = x$, изъ треугольниковъ OM''N'' и AM''B имѣемъ $x^2 + \overline{ON''}^2 = p^2$ и $-ON'' : a = x : -(a - x)$, откуда $ON'' = ax : (a - x)$; внося эту величину въ предыдущее ур., получимъ опять ур. (1). Наконецъ, для сѣкущей AN'''M''', положивъ $OM''' = -x$, имѣемъ: $x^2 + \overline{ON'''}^2 = p^2$ и $ON''' : a = -x : (-x + a)$ или $ON''' : a = x : (x - a)$, слѣд. снова получаемъ ур. (1). Итакъ, въ ур—іи (1) содержатся всѣ 4 рѣшенія задачи.

Хотя это ур—ніе и есть полное ур—ніе 4-ой степени, не возвратное, но его можно бы было легко рѣшить, такъ какъ можно бы было показать, что между его корнями существуетъ особое соотношеніе, именно, что ихъ квадраты образуютъ ариѳметическую пропорцію, что даетъ возможность привести вопросъ къ рѣшенію биквадратнаго ур—нія. Но какъ вычисленія были бы длинны и утомительны, то этого метода рекомендовать нельзя.

616. **Второй способъ.** Взявъ за неизвѣстное BM (черт. 102), найдемъ ур—ніе

$$(x+a)^2 + \frac{a^2(x+a)^2}{x^2} = p^2 \; . \; . \; . \; (2),$$

которое выводится изъ (1) замѣною x количествомъ $x + a$; это ур. имѣетъ четыре корня: BM, BM', —BM'', —BM''', ибо ур. (1) — общее.

Хотя здѣсь мы опять получили полное биквадратное ур., тѣмъ не менѣе, мы легко можемъ рѣшить его слѣдующимъ искусственнымъ пріемомъ. Ур. (2) можно написать въ видѣ

$$x^2 + 2ax + a^2 + a^2 + \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} = p^2, \text{ или } \left(x^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2,$$

или

$$\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2;$$

отсюда видно, что оно приводится къ рѣшенію двухъ ур—ній

$$x + \frac{a^2}{x} = y \quad \text{и} \quad y^2 + 2ay - p^2 = 0,$$

или

$$\begin{cases} x^2 - yx + a^2 = 0 \\ y^2 + 2ay - p^2 = 0 \end{cases} \; . \; . \; . \; (3)$$

Итакъ, этотъ искусственный пріемъ даетъ относительно простое рѣшеніе задачи.

Посмотримъ, каково геометрическое значеніе вспомогательнаго неизвѣстнаго y. Проведя перпендикуляръ MQ на линію AS, параллельную OX, и возставивъ къ MN перпендикуляръ MP, замѣчаемъ, что PQ есть третья пропорціональная къ MQ и $AQ = x$; слѣд.

$$AP = AQ + QP = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

Итакъ, вспомогательное неизвѣстное, соотвѣтствующее рѣшенію MAN, есть

AP; точно также, для вспомогат. неизвѣстнаго y, соотвѣтствующаго рѣшенію $N''M''$, получили бы $(-AP')$, возставивъ перпендикуляръ $M''P'$ къ AM''.

Ур—ніе въ y системы (3) есть квадратное, слѣд. необходимо, чтобы величины y, относящіяся къ четыремъ возможнымъ рѣшеніямъ задачи, были попарно равны; и въ самомъ дѣлѣ, проведя $M'P$, получимъ равные треугольники AMP и $AM'P$, ибо $AM' = AN$ по причинѣ симметричности относительно OA, затѣмъ, треугольники ACN и MPQ равны, какъ имѣющіе стороны перпендикулярныя и по равной сходственной сторонѣ ($AC = MQ$), слѣд. $MP = AM'$; уголъ $APM = PAM$ ибо ихъ дополненія равны; итакъ, треугольники равны, имѣя по равному углу между порознь равными сторонами.

Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляры, возставленные въ M и M' къ прямымъ MN, $M'N$ проходятъ черезъ одну и ту же точку P линіи AS, и что то же самое относится къ перпендикулярамъ, возставленнымъ въ M'' и M''' къ $M''N''$ и $M'''N''$. Этимъ подтверждается вышеприведенное вычисленіе.

Для рѣшенія задачи достаточно знать точки P и P', ибо окружности, описанныя на діаметрахъ AP и AP', пересѣкаясь съ прямою XX', дадутъ искомыя точки M, M', M'', M'''.

Эти точки дало бы намъ рѣшеніе системы (3).

Итакъ, AP и AP' суть абсолютныя величины корней ур—нія

$$y^2 + 2ay - p^2 = 0\ .\ .\ .\ (4)$$

Изслѣдованіе. Корни этого ур—нія, какъ видно a priori, дѣйствительные, неравные, по знаку противоположные.

I. Чтобы положительный корень y', который долженъ быть нанесенъ въ направленіи AS, давалъ рѣшеніе задачи, необходимо, чтобы окружность діаметра AP встрѣчала прямую XX'. Но ея радіусъ $= \frac{y}{2}$, а разстояніе центра отъ XX' равно a; слѣд. необходимо, чтобы было $y' > 2a$; а чтобы это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (4), при подстановкѣ $2a$ вмѣсто y, принималъ отрицательное значеніе, т.-е. чтобы было

$$4a^2 + 4a^2 - p^2 \overline{<} 0, \quad \text{или} \quad p^2 - 8a^2 \overline{>} 0.$$

Корни тринома $p^2 - 8a^2$ суть $\pm 2a\sqrt{2}$, а какъ p существенно положительно, то неравенство удовлетворяется при

$$p \overline{>} 2a\sqrt{2}.$$

Первый случай: $p < 2a\sqrt{2}$.

Въ углѣ XOY нѣтъ рѣшенія.

Второй случай: $p = 2a\sqrt{2}$. Положительный корень ур. (4) равенъ въ этомъ случаѣ $2a$, сл. окружность діаметра AP касается OX, точки M и M' сливаются, задача имѣетъ одно рѣшеніе въ углѣ XOY, и это рѣшеніе — перпендикуляръ къ OA. Въ этомъ, слѣд., положеніи отрѣзокъ MN въ углѣ XOY на прямой, проходящей черезъ A, имѣетъ *minimum* величины. Этотъ результатъ легко объяснить геометрически. Пусть $MAN = \text{min.}$ и пусть $M'N'$ какая-либо сѣкущая, очевидно, что $AN' > AN$ и $AM' < AM$; а какъ $AM = AN$, то $AM' < AN'$, слѣдов. средина линіи $M'N'$ ниже A, напр., въ K. Соединивъ O съ K, имѣемъ $OK = \frac{M'N'}{2}$, но $OA = \frac{MN}{2}$, и очевидно $OA < OK$, сл. $2OA$ или $MN < 2OK$ или $M'N'$.

Третій случай. $p > 2a\sqrt{2}$. Окружность пересѣчетъ линію OX въ двухъ точкахъ, и задача имѣетъ въ углѣ XOY два рѣшенія.

II. Во-вторыхъ, чтобы отрицательный корень y'', наносимый въ направленіи AP', давалъ рѣшеніе, необходимо и достаточно, чтобы окружность діаметра $(-y'')$ встрѣчала XX', т. е. чтобы было $-\frac{y''}{2} > a$, или $y'' < -2a$; отсюда слѣдуетъ, что необходимо и достаточно, чтобы $(-2a)$ содержалось между корнями ур. (4), т. е. чтобы подстановка количества $(-2a)$ вмѣсто y въ триномъ (4) давала отрицательный результатъ: $4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0$, что всегда удовлетворяется. Итакъ всегда имѣемъ одно рѣшеніе въ углѣ X'OY, и одно въ углѣ XOY', что согласно съ выводами предварительнаго изученія задачи.

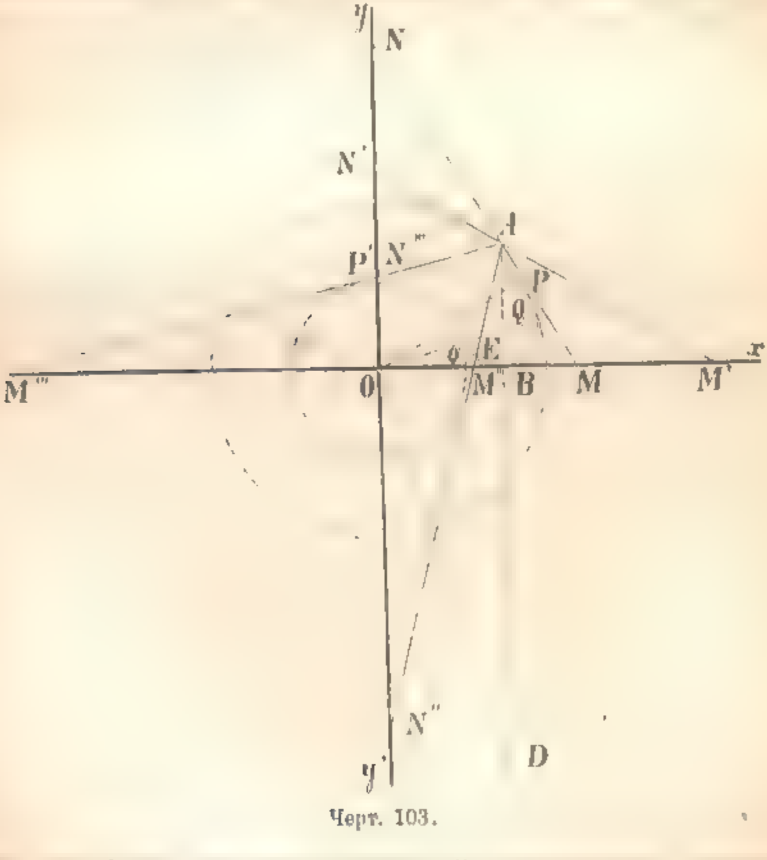
Резюме.

$p < 2a\sqrt{2}$	. . . 2 рѣшенія (XOY', X'OY).
$p = 2a\sqrt{2}$	. . . 3 рѣшенія.
$p > 2a\sqrt{2}$	. . . 4 рѣшенія.

Построеніе.—Сдѣлаемъ построеніе для случая четырехъ рѣшеній. Ур. (4) даетъ:

$$y' = \sqrt{a^2 + p^2} - a,$$
$$-y'' = \sqrt{a^2 + p^2} + a.$$

На параллели къ OY (черт. 102) наносимъ $AD = p$, откуда $CD = \sqrt{a^2 + p^2}$.



Черт. 103.

Описавъ изъ C какъ изъ центра радіусомъ CD полуокружность, находимъ на PP' точки P и P'', которыя и даютъ

$$AP = y', \quad AP'' = -y''.$$

Описавъ на AP и AP″ полуокружности, получаемъ искомыя точки M, M′, M″ и M‴, которыми опредѣляются искомыя прямыя. MAN, M′AN′, AM″N″ и AN‴M‴. Повѣрка—циркулемъ.

617. Третій способъ.— Такъ какъ рѣшенія задачи попарно симметричны относительно OA, то заключаемъ, что точка O находится въ равныхъ разстояніи отъ двухъ симметричныхъ рѣшеній. Слѣд. если за неизвѣстное принять разстояніе r точки O отъ этихъ двухъ рѣшеній, то ур. въ r будетъ не выше второй степени.

Итакъ, пусть будетъ $OP=r$ (черт. 103) радіусъ окружности центра O, касательной къ рѣшеніямъ въ углѣ XOY, обозначивъ буквами x и y вспомогательныя неизвѣстныя OM и ON, получимъ три ур—нія:

$$x^2+y^2=p^2;\quad \frac{y}{x}=\frac{a}{x-a};\quad pr=xy\ldots(1).$$

Остается исключить изъ этихъ ур—ній x и y, чтобы получить ур. съ главнымъ неизвѣстнымъ r. Для этого второе ур. напишемъ въ видѣ: $xy=a(x+y)$, возвысивъ обѣ его части въ квадратъ $(xy)^2=a^2(x^2+y^2+2xy)$ и замѣнивъ xy и x^2+y^2 ихъ величинами изъ двухъ другихъ уравненій, получимъ:

$$p^2r^2=a^2(p^2+2pr),\quad\text{или}\quad pr^2-2a^2r-pa^2=0\ldots(2)$$

Чтобы убѣдиться въ общности этого ур—нія, обозначимъ буквою r радіусъ OP″ окружности центра O, касательной къ рѣшеніямъ въ углахъ XOY′ и X′OY. Обозначивъ буквами x и y количества OM″, ON″, найдемъ 3 ур—нія.

$$x^2+y^2=p^2,\quad \frac{y}{x}=\frac{a}{x+a},\quad pr=xy.$$

Второе напишемъ въ видѣ $xy=a(x-y)$, и преобразованіями, подобными вышеприведеннымъ, придемъ къ ур—нію

$$pr^2+2a^2r-pa^2=0\ldots(3).$$

Это ур. отличается отъ (2) перемѣною r на $(-r)$, слѣд. абсолютная величина отрицательнаго корня ур—нія (2) представляетъ радіусъ, дающій рѣшенія въ углахъ XOY′ и X′OY.

Изслѣдованіе.—Итакъ, разсмотримъ, при какомъ условіи корни ур—нія (2) дадутъ искомыя рѣшенія.

Необходимо и достаточно, чтобы эти корни были дѣйствительны, а ихъ абсолютная величина не превышала $OA=a\sqrt{2}$; ибо необходимо, чтобы изъ точки A можно было провести касательную къ окружности, имѣющей радіусомъ абсолютную величину того или другого корня. Но ур. (2) имѣетъ корни дѣйствительные, неравные и противоположные по знаку; сл., что касается положительнаго корня, то если онъ не больше $a\sqrt{2}$, то и дастъ искомое рѣшеніе; значитъ, если замѣнить r количествомъ $a\sqrt{2}$ въ триномѣ (2), результатъ замѣны не долженъ быть отрицательнымъ, т.-е. должно быть

$$2pa^2-2a^3\sqrt{2}-pa^2\geq 0,\quad\text{или}\quad p\geq 2a\sqrt{2}.$$

Отсюда: 1) если $p<2a\sqrt{2}$, задача не имѣетъ рѣшеній въ углѣ XOY. 2) Если $p=2a\sqrt{2}$, точка A будетъ находиться на окружности центра O и радіуса, равнаго положит. корню, слѣд. будетъ только одна касательная; это рѣшеніе, перпендикуляръ къ OA, есть положеніе прямой MN, при которомъ отрѣзокъ въ углѣ XOY есть *minimum*. 3) Наконецъ, если $p>2a\sqrt{2}$, точка A будетъ находиться внѣ окружности, существуютъ двѣ различныя касательныя, выходящія изъ этой точки, и слѣд. два рѣшенія въ углѣ XOY.

Чтобы отрицательному корню r'' соотвѣтствовали рѣшенія задачи, необходимо и достаточно, чтобы абсолютная величина $(-r'')$ не превышала $a\sqrt{2}$, т.-е.

$$r''\geq -a\sqrt{2},$$

иными словами, необходимо и достаточно, чтобы триномъ (2) не былъ отрицательнымъ при замѣнѣ r количествомъ $-a\sqrt{2}$, что даетъ

$$2pa^2 + 2a^3\sqrt{2} - pa^2 > 0, \quad \text{или} \quad pa^2 + 2a^3\sqrt{2} > 0.$$

Но p и a положительны, слѣд. это неравенство всегда вѣрно, т. е. всегда есть по одному рѣшенію въ каждомъ изъ угловъ XOY' и X'OY.

Построеніе. Уравненіе даетъ

$$r = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + p^2a^2}}{p} = -\frac{a^2}{p} \pm \sqrt{\frac{a^4}{p^2} + a^2};$$

слѣд. нужно построить радіусы:

$$r' = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2} - \frac{a^2}{p}; \qquad -r'' = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2} + \frac{a^2}{p}.$$

Наносимъ на продолженіи AB (черт. 103) длину $BD = p$, проводимъ OD, и въ точкѣ O возставляемъ перпендикуляръ OE къ OD; очевидно, что

$$EB = \frac{a^2}{p},$$

ибо $OB = a$. Слѣд. $OE = \sqrt{\left(\frac{a^2}{p}\right)^2 + a^2}$; а потому, нанося $EQ = EQ' = EB$, имѣемъ: $r' = OQ$ и $-r'' = OQ'$. Остается провести изъ точки A касательныя къ окружностямъ центра O, проходящимъ черезъ точки Q и Q'.

618. **Четвертый способъ.** — Можно принять за вспомогательное неизвѣстное сумму OM + ON, къ этому выбору приводитъ замѣчаніе, что для двухъ положеній сѣкущей MN и M'N' величина этого неизвѣстнаго одинакова, ибо треугольники OMN, OM'N' равны. Слѣд. для четырехъ положеній сѣкущей получится только два корня; и мы должны придти къ ур—нію второй степени.

Итакъ, пусть

$$OM + ON = x \ldots (1), \quad \text{затѣмъ:} \quad OM^2 + ON^2 = p^2 \ldots (2)$$

Кромѣ того:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{a}{ON - a}, \quad \text{откуда} \quad \frac{OM + ON}{OM} = \frac{ON}{a},$$

а потому

$$OM \times ON = (OM + ON) \cdot a, \quad \text{или} \quad OM \cdot ON = ax \ldots (3)$$

Удвоивъ обѣ части (3) и придавъ ко (2), найдемъ въ первой части x^2, а ур—ніе будетъ: $x^2 = p^2 + 2ax$, или

$$x^2 - 2ax - p^2 = 0 \ldots (4)$$

Такое же ур—ніе получили бы, взявъ за неизвѣстное OM' + ON'.

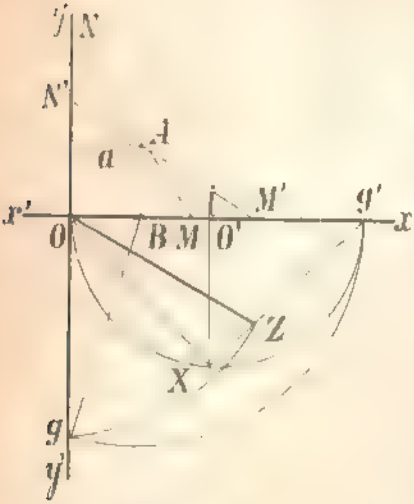
Легко видѣть, что это ур—ніе пригодно и для двухъ другихъ положеній сѣкущей, только x тогда будетъ выражать разности $ON'' - OM$ и $OM' - ON''$.

Какъ скоро x будетъ найдено, останется найти разность отрѣзковъ OM—ON; для этого удвоиваемъ (3) и результатъ вычитаемъ изъ (2); получимъ

$$OM - ON = \sqrt{p^2 - 2ax}; \quad \text{откуда} \quad p^2 > 2ax.$$

Найдя x, вносимъ его величину въ разность $OM - ON$, которая такимъ образомъ и будетъ извѣстна, а какъ извѣстна и сумма отрѣзковъ, то будетъ извѣстенъ и каждый изъ нихъ.

Изслѣдованіе. Нужно, чтобы разность эта была дѣйствительна. При отрицательномъ корнѣ ур—нія (4) это и будетъ безусловно; и въ самомъ дѣлѣ, отрицательный корень соотвѣтствуетъ случаю сѣкущей, проведенной или въ углѣ YOX' или въ XOY'.



Черт. 104.

Итакъ, изслѣдованію подлежитъ только положительный корень, онъ долженъ быть $> \frac{p^2}{2a}$, слѣд. $\frac{p^2}{2a}$ должно заключаться внѣ корней (4), а для этого результатъ подстановки этого количества въ триномъ (4) долженъ быть положителенъ:

$$\frac{p^4}{4a^2} - 2a\frac{p^2}{2a} - p^2 > 0,$$

или $p^4 - 8a^2p^2 > 0$, откуда $p > 2a\sqrt{2}$:

условіе, раньше найденное. Отсюда min. $p = 2a\sqrt{2}$.

Построеніе. Рѣшивъ ур—ніе (4), найдемъ

$$x' = a + \sqrt{a^2 + p^2},\quad x'' = -\sqrt{a^2 + p^2} + a.$$

Пусть $OG = p$, то $BG = \sqrt{a^2 + p^2}$; нанеся BG на Ox, получимъ

$$OG' = a + \sqrt{a^2 + p^2} = x'. \text{ Слѣд. } OM - ON = \sqrt{p^2 - 2ax'} = \sqrt{p^2 - 2a\,.\,OG'}$$

Взявъ $BI = OB$, на OG' описываемъ полуокружность и проводимъ перпендикуляръ IX, тогда $OX = \sqrt{2ax'}$. Слѣд. нанеся OG на OZ:

$$ZX = \sqrt{OZ^2 - OX^2},\ ZX = \sqrt{p^2 - 2a\,.\,OG'} = OM - ON.$$

Но $OM + ON = x' = OG'$; слѣд. если отъ средины O' линіи OG' отложить въ обѣ стороны равныя длины $O'M = O'M' = \frac{ZX}{2}$, найдемъ обѣ точки M и M' опредѣляющія искомыя прямыя MAN и M'AN'.

Для отриц. корня построенія аналогичны указаннымъ.

619. Пятый способъ. Можно принять за неизвѣстное разность линій $OM - ON = x$. Для другого положенія сѣкущей, второй корень будетъ $OM - ON$, или $ON - OM$; онъ равенъ первому, но противоположенъ по знаку. Также и другіе корни равны и противоположны по знаку, слѣд. корни попарно равны и противоположны по знаку, а потому этимъ способомъ должны притти къ биквадратному ур—нію.

Имѣемъ:

$$OM - ON = x \ldots(1),\ OM^2 + ON^2 = p^2 \ldots(2) \text{ и } OM \times ON = a(OM + ON) \ldots(3);$$

отсюда:

$$2OM\,.\,ON = 2a(OM + ON) \text{ и } OM^2 + ON^2 - 2OM\,.\,ON = p^2 - 2a(OM + ON)$$

Слѣдовательно

$$x^2 = p^2 - 2a\,(OM + ON), \text{ откуда } OM + ON = \frac{p^2 - x^2}{2a}.$$

Зная же, что $OM - ON = x$, имѣемъ

$$OM = \frac{p^2 - x^2}{4a} + \frac{x}{2}, \qquad ON = \frac{p^2 - x^2}{4a} - \frac{x}{2}.$$

Вносяя эти величины въ ур. (2), получимъ

$$(p^2 + 2ax - x^2)^2 + (p^2 - 2ax - x^2)^2 = 16a^2p^2,$$

или, раскрывъ скобки и приведя въ порядокъ:

$$x^4 + 2(2a^2 - p^2)x^2 + p^2(p^2 - 8a^2) = 0.$$

Чтобы корни (x^2) этого ур—нія были дѣйствительны, необходимо, чтобы было $(2a^2 - p^2)^2 - p^2(p^2 - 8a^2) > 0$, или $4a^4 - 4a^2p^2 + p^4 - p^4 + 8a^2p^2 > 0$, или $4a^4 + 4a^2p^2 > 0$, что всегда удовлетворено.

Чтобы обѣ они были положительны, необходимо, чтобы произведеніе и сумма ихъ были положительны. Произведеніе будетъ положительно при $p^2 > 8a^2$, или при

$$p > 2a\sqrt{2}.$$

Но при этомъ условіи будетъ $p > 2a$, слѣд. $2a^2 - p^2$ будетъ < 0, а потому сумма корней будетъ > 0 и обѣ корни положительны. Итакъ, единственное условіе возможности задачи будетъ: $p > 2a\sqrt{2}$, т. е. чтобы данная линія была не меньше удвоенной линіи AO.

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ:

$$x = \pm\sqrt{p^2 - 2a^2 \pm 2p\sqrt{a^2 + p^2}};$$

выраженіе это легко построить; а имѣя x, нетрудно уже найти OM и ON.

620. **Шестой способъ.** — Если за вспомогательное неизвѣстное принять произведеніе отрѣзковъ $OM \times ON$, то какъ для двухъ положеній сѣкущей произведеніе это имѣетъ одну и ту же величину, для четырехъ ея положеній получимъ два значенія для произведенія; поэтому, ур. съ неизвѣстнымъ x, равнымъ произведенію отрѣзковъ, должно быть квадратнымъ.

Положивъ $OM \times ON = x$, имѣемъ еще два ур—нія:

$OM^2 + ON^2 = p^2$ и $OM \times ON = a\,(OM + ON)$, или $x = a\,(OM + ON)$.

Возвысивъ послѣднее ур. въ квадратъ, имѣемъ

$$x^2 = a^2(p^2 + 2x), \text{ откуда } x^2 - 2a^2x - a^2p^2 = 0.$$

Какъ скоро x найдено, MO и NO получимъ изъ биквадратнаго ур—нія

$$X^4 - p^2X^2 + x^2 = 0.$$

Корни этого ур—нія будутъ дѣйствительны при условіи $p^4 - 4x^2 > 0$, или $(p^2 + 2x)(p^2 - 2x) > 0$; отсюда видно, что при $x > 0$, необходимо, чтобы было $x < \frac{p^2}{2}$. Замѣняя x количествомъ $\frac{p^2}{2}$ въ ур. въ x, должны имѣть: $\frac{p^4}{4} - a^2p^2 - a^2p^2 > 0$, или $p^2 > 8a^2$, откуда $p > 2a\sqrt{2}$ — условіе извѣстное. $x < 0$ должно давать $x > -\frac{p^2}{2}$, т. е. $-\frac{p^2}{2}$ должно быть внѣ корней ур—нія въ x, и потому должно быть $\frac{p^4}{4} - a^2p^2 - a^2p^2 > 0$, что всегда имѣетъ мѣсто. Итакъ, единственное условіе есть

$$p > 2a\sqrt{2}.$$

Какъ скоро оно удовлетворено, оба значенія x^2 будутъ положительны, а потому всѣ четыре значенія X дѣйствительны.

Впрочемъ, какъ скоро найдемъ x, то вмѣсто рѣшенія биквадратнаго ур—нія, дающаго отрѣзки OM и ON, стоитъ только замѣтить, что въ треугольникѣ OMN извѣстна гипотенуза p и площадь, равная $\frac{OM \cdot ON}{2}$ или $\frac{x}{2}$.

621. Седьмой способъ.—Если за неизвѣстное принять отношеніе $\frac{OM}{ON}$ отрѣзковъ, то очевидно должно получиться возвратное ур. четвертой степени; ибо для положенія M'N' (черт. 102) сѣкущей второй корень есть $\frac{OM'}{ON'}$, или $\frac{ON}{OM'}$, т.-е. онъ обратенъ первому корню, то же самое имѣетъ мѣсто и для двухъ другихъ корней. Для составленія ур—нія стоитъ только исключить OM и ON изъ трехъ уравненій

$$\frac{OM}{ON} = x \ldots (1) \quad OM^2 + ON^2 = p^2 \ldots (2)$$

и

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OM - a}{a}, \quad \text{или} \quad ax = OM - a,$$

откуда

$$OM = a(x+1) \ldots (3).$$

Изъ перваго ур—нія имѣемъ

$$\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{x^2}{1};$$

отсюда

$$\frac{OM^2 + ON^2}{OM^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

или

$$\frac{p^2}{OM^2} = \frac{x^2+1}{x^2},$$

или

$$\frac{p^2}{a^2(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x^2},$$

или

$$p^2x^2 - a^2(x^2+1)(x+1)^2 = 0,$$

или

$$a^2x^4 + 2a^2x^3 + (2a^2 - p^2)x^2 + 2a^2x + a^2 = 0.$$

Положивъ $x + \frac{1}{x} = y$, откуда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, и раздѣливъ все ур—ніе на x^2, находимъ

$$a^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2a^2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2a^2 - p^2 = 0, \quad \text{или} \quad a^2y^2 + 2a^2y - p^2 = 0$$

и

$$x^2 - xy + 1 = 0.$$

Изъ ур—нія въ y найдемъ два значенія для y: y' и $-y''$, которыя поочередно внесемъ въ послѣднее ур—ніе. Но чтобы для x получились величины дѣйствительныя, нужно, чтобы абсолютная величина y была больше 2; и слѣд. замѣна y числами 2 и -2 должна давать отрицательные результаты; т.-е.

$$4a^2 + 4a^2 - p^2 < 0, \quad \text{или} \quad p > 2a\sqrt{2}$$

и

$$4a^2 - 4a^2 - p^2 < 0, \quad \text{или} \quad -p^2 < 0,$$

что приводится къ одному условію: $p > 2a\sqrt{2}$, уже извѣстному.

Когда это условіе не выполнено, когда p содержится между $2a\sqrt{2}$ и 0, годится только отрицательное значеніе y, которому отвѣчаютъ два отрицательныя значенія x: сѣкущая проходитъ въ углахъ xOy' и $x'Oy$.

622. **Восьмой способъ—тригонометрическій.**

Пусть (см. черт. 102) уголъ OMN $= x$. Имѣемъ

$$AM = \frac{a}{\sin x}, \quad AN = \frac{a}{\cos x},$$

слѣдовательно

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = p,$$

откуда

$$2a(\sin x + \cos x) = p \, . \sin 2x,$$

а по возвышеніи въ квадратъ и по приведеніи въ порядокъ,

$$p^2 \sin^2 2x - 4a^2 \sin 2x - 4a^2 = 0,$$

откуда

$$\sin 2x = \frac{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 + 4a^2p^2}}{p^2} = \frac{2a}{p^2}(a \pm \sqrt{a^2 + p^2}).$$

Изслѣдованіе. Значенія $\sin 2x$, очевидно, дѣйствительны, но они не должны быть больше 1, откуда условіе

$$2a^2 + \sqrt{4a^4 + 4a^2p^2} \leqslant p^2,$$

или

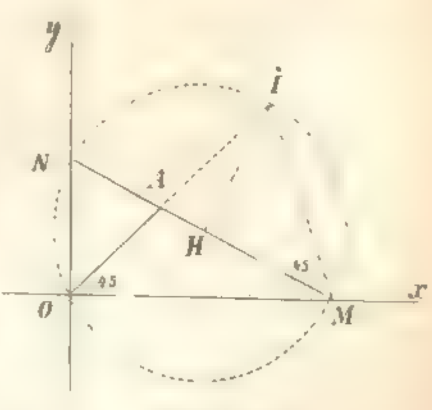
$$8a^2p^2 \leqslant p^4,$$

или

$$p \geqslant 2\sqrt{2} \, . \, a.$$

623. Въ заключеніе укажемъ рѣшеніе вопроса чисто геометрическое.

I. Ищемъ рѣшеніе въ углѣ $x0y$ (черт. 105), и пусть прямая MN—требуемая, такъ что MN $= p$. Вообразимъ, что на MN, какъ на діаметрѣ, описана окружность, которая, слѣдовательно, пройдетъ чрезъ точку 0; пусть эта окружность пересѣкаетъ продолженіе прямой 0A въ точкѣ I, которая будетъ лежать въ срединѣ полуокружности MIN. Очевидно, все сводится къ нахожденію точки I; въ самомъ дѣлѣ, разъ эта точка найдена, то, описавъ радіусомъ $\frac{p}{2}$ окружность, проходящую чрезъ точки O и I, мы будемъ имѣть и точки M и N.



Черт. 105.

Но точку I найти легко. Въ самомъ дѣлѣ, разность между линіями IO и IA извѣстна, ибо она равна OA. Легко видѣть, что и произведеніе IO×IA также извѣстно. Дѣйствительно, треугольники OIM и AIM, имѣя общій уголъ I и углы при O и M въ 45° каждый, подобны, откуда пропорція OI : IM = IM : IA, или

$OI \times IA = \overline{IM}^2$, а какъ точка I находится въ срединѣ дуги MIN, то IM есть сторона вписаннаго квадрата, и потому $\overline{IM}^2 = \frac{p^2}{2}$, такъ что

$$OI \times IA = \frac{p^2}{2}.$$

Зная разность $IO - IA = a\sqrt{2}$ и произведеніе $IO \times IA = \frac{p^2}{2}$, легко построить IO и IA (см. § 472).

Изслѣдованіе. Когда точка I найдена, остается описать чрезъ точки O и I окружность радіусомъ $\frac{1}{2}p$; но чтобы это было возможно, необходимо, чтобы разстояніе OI было не болѣе p. А какъ OI и (− IA) суть корни ур—нія

$$t^2 - a\sqrt{2}\,.\,t - \frac{p^2}{2} = 0,$$

то, чтобы положительный корень былъ не болѣе p, необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки числа p вмѣсто t въ первую часть не былъ отрицательнымъ, т.-е. чтобы было

$$p^2 - pa\sqrt{2} - \frac{p^2}{2} > 0, \quad \text{или} \quad p > 2a\sqrt{2}.$$

Заключаемъ, что:

1) если $p < 2a\sqrt{2}$, задача невозможна;

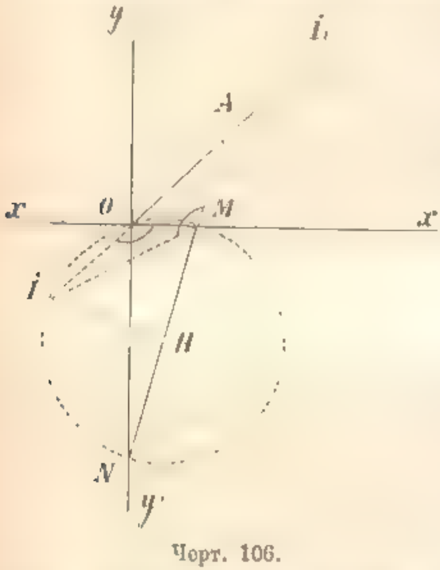
2) если $p = 2a\sqrt{2}$, вопросу отвѣчаетъ одна окружность, діаметромъ которой служитъ OI и слѣд., рѣшеніе въ углѣ xOy *одно*: перпендикуляръ къ OI въ точкѣ A (случай minimum'а);

3) если $p > 2a\sqrt{2}$, вопросу отвѣчаютъ двѣ окружности, симметричныя относительно OA: задача имѣетъ 2 рѣшенія въ углѣ xOy.

II. Будемъ искать рѣшеніе въ углѣ xOy'. Пусть это искомое рѣшеніе будетъ прямая AMN (черт. 106). Вообразивъ опять окружность, описанную на MN какъ на діаметрѣ, найдемъ точку I ея встрѣчи съ продолженіемъ OA. Имѣемъ: $IA - IO = a\sqrt{2}$; затѣмъ, подобные треугольники IOM и IMA даютъ:

$$IO \times IA = \overline{IM}^2 = \frac{p^2}{2},$$

и вопросъ приводится къ построенію двухъ прямыхъ по ихъ разности и произведенію (§ 472).



Черт. 106.

Изслѣдованіе.—Пусть точка I построена; остается радіусомъ $\frac{1}{2}p$ описать чрезъ точки O и I окружность. Чтобы это было возможно, должно быть

$$IO < p.$$

Но IA и (− IO) суть корни ур—нія

$$t^2 - a\sqrt{2}\,.\,t - \frac{p^2}{2} = 0,$$

и чтобы IO (отриц. корень съ обратнымъ знакомъ) было не больше p, необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки $(-p)$ вмѣсто t въ первую часть не былъ отрицательнымъ, т.-е. чтобы было

$$p^2 + pa\sqrt{2} - \frac{p^2}{2} \geqslant 0, \quad \text{или} \quad p^2 + 2pa\sqrt{2} \geqslant 0.$$

Такъ какъ это неравенство всегда удовлетворено, то всегда можно радіусомъ $\frac{1}{2}p$ описать двѣ различныя окружности чрезъ точки O и I; эти окружности и дадутъ рѣшенія въ углахъ xOy' и $x'Oy$.

Можно, сближая обѣ части способа, найти всѣ 4 рѣшенія однимъ построеніемъ. Построивъ, напр., точку I (черт. 106) въ углѣ xOy, получимъ точку I_1, отвѣчающую къ двумъ другимъ рѣшеніямъ, нанеся $OI_1 = AI$.

Задача XIX.

624. *Въ окружности радіуса* R *беремъ секторъ, котораго уголъ* = 45°; *требуется въ этомъ секторѣ помѣстить прямоугольникъ* MNPQ (двѣ вершины котораго находились бы на одномъ радіусѣ, а изъ двухъ остальныхъ одна на другомъ радіусѣ, а другая на дугѣ сектора) *такъ, чтобы діагональ* MP *имѣла данную длину* m.

Примемъ за неизвѣстное длину OP = x, треугольникъ MOP даетъ

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x \,.\, OQ.$$

Но изъ треугольника OQM, замѣчая, что MQ = OP, имѣемъ: $OQ = \sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда

$$m^2 = R^2 + x^2 - 2x\sqrt{R^2 - x^2} \;.\;.\;. (1).$$

Это ур—ніе останется въ томъ же видѣ, пока точка M будетъ находиться на дугѣ AC, ибо уголъ POM будетъ острый.

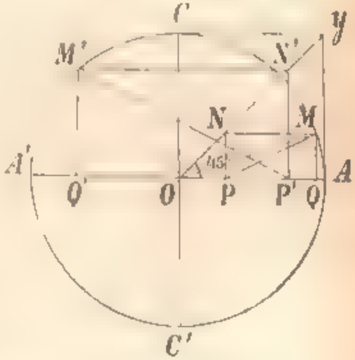
Если точка M будетъ находиться на дугѣ CA', причемъ прямоугольникъ будетъ, напримѣръ, M'N'P'Q', найдемъ, опять полагая OP' = x, ур—ніе

$$m^2 = R^2 + x^2 + 2x\sqrt{R^2 - x^2} \;.\;.\;. (2)$$

отличное отъ (1).

Затѣмъ, безполезно брать точки на полуокружности AC'A', потому что, очевидно, найдемъ рѣшенія симметричныя, относительно O, рѣшеніямъ уже полученнымъ.

Итакъ, задача рѣшается двумя ирраціональными уравненіями



Черт. 107

$$\pm 2x\sqrt{R^2 - x^2} = x^2 + R^2 - m^2 \;.\;.\;. (3),$$

гдѣ $x > 0$, или цѣлымъ ур—ніемъ:

$$4x^2(R^2 - x^2) = (x^2 + R^2 - m^2)^2 \;.\;.\;. (3'),$$

или

$$5x^4 - 2(m^2 + R^2)x^2 + (m^2 - R^2)^2 = 0 \;.\;.\;. (4),$$

изъ числа корней котораго надо брать только положительные и наносить ихъ въ направленіи OA.

Нѣкоторой точкѣ P, для которой OP есть корень ур. (4), соотвѣтствуютъ двѣ точки окружности, лежащія на одной и той же параллели къ AA', если только PN = x не больше R; изъ этихъ двухъ точекъ вопросу отвѣчаетъ та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 > 0, \quad \text{или} \quad x^2 > m^2 - R^2,$$

если она находится на дугѣ AC; или та, для которой

$$x^2 + R^2 - m^2 < 0, \quad \text{или} \quad x^2 < m^2 - R^2,$$

если она находится на дугѣ A'C.

Изслѣдованіе. Чтобы корни уравненія (4) отвѣчали на задачу, необходимо и достаточно: 1) чтобы они были дѣйствительны; 2) положительны, 3) меньше R.

Кромѣ того, à priori видно, что какъ скоро корни будутъ дѣйствительны, они будутъ попарно равны и противоположны по знаку, слѣд. будутъ два положительныхъ корня, и очевидно, что они будутъ меньше R, ибо, удовлетворяя ур—нію (3), дѣлаютъ разность $4x^2(R^2 - x^2)$ положительною. Итакъ, остается единственное условіе—условіе дѣйствительности.

Такъ какъ ур—ніе (4) биквадратное, то для дѣйствительности его корней необходимо, чтобы значенія x^2 были дѣйствительны и положительны; но очевидно, что, какъ скоро они дѣйствительны, то и положительны, слѣдовательно, необходимо и достаточно, чтобы было

$$(m^2 + R^2)^2 - 5(m^2 - R^2)^2 \geqslant 0,$$

или

$$[m^2 + R^2 - (m^2 - R^2)\sqrt{5}]\,[m^2 + R^2 + (m^2 - R^2)\sqrt{5}] \geqslant 0,$$

или

$$[(\sqrt{5} + 1)m^2 - (\sqrt{5} - 1)R^2]\,[(\sqrt{5} - 1)m^2 - (\sqrt{5} + 1)R^2] \leqslant 0.$$

Раздѣляя первый множитель на $\sqrt{5} + 1$, а второй на $\sqrt{5} - 1$ и замѣчая, что

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

даемъ неравенству видъ:

$$\left\{m^2 - \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2\right\}\left\{m^2 - \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right]^2\right\} \leqslant 0,$$

или, по разложеніи на множители первой степени:

$$\left[m + \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]\left[m - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]\left[m + \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right]\left[m - \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right] \leqslant 0.$$

Но первый и третій множители положительны, слѣд. должно быть

$$\left[m - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]\left[m - \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right] \leqslant 0,$$

откуда видно, что m должно удовлетворять условіямъ:

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \leqslant m < \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\;.\;.\;.\;(5).$$

При этихъ условіяхъ всѣ 4 корня ур—нія (4) будутъ дѣйствительны; слѣд. задача будетъ имѣть два рѣшенія въ полуокружности ACA', и два симметричныя имъ рѣшенія въ другой полуокружности.

Остается показать положеніе прямоугольниковъ, отвѣчающихъ задачѣ.

Чтобы *оба положительныя значенія* x давали прямоугольники съ вершиною M на дугѣ AC, необходимо и достаточно, чтобы для каждаго изъ этихъ значеній было $x^2 > m - R^2$; а для этого необходимо и достаточно:

1) Чтобы триномъ, составляющій первую часть (4), былъ положителенъ при замѣнѣ въ немъ x^2 разностью $(m^2 - R^2)$;

2) Чтобы полусумма корней не была меньше $(m^2 - R^2)$.

Первое изъ этихъ условій даетъ:

$$5(m^2 - R^2)^2 - 2(m^2 + R^2)(m^2 - R^2) + (m^2 - R^2)^2 > 0,$$

или

$$(m^2 - R^2)(m^2 - 2R^2) > 0 \ . \ . \ . (6).$$

Второе условіе даетъ

$$\frac{m^2 + R^2}{5} > m^2 - R^2, \quad \text{или} \quad m^2 < \frac{3R^2}{2} \ . \ . \ . (7)$$

Отсюда, такъ какъ $\frac{3R^2}{2}$ содержится между R^2 и $2R^2$, слѣдуетъ, что 1) если $m^2 < R^2$ или $m < R$ оба рѣшенія лежатъ на дугѣ AC; 2) если $R < m < R\sqrt{2}$, одно рѣшеніе находится на AC, другое на A'C, 3) если $m > R\sqrt{2}$, оба рѣшенія на дугѣ A'C.

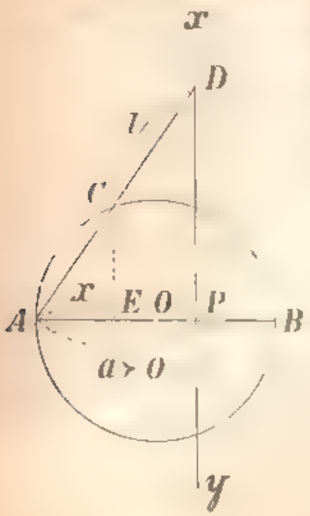
Итакъ, maximum m, равный $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$ (т.-е. сторонѣ правильнаго вписаннаго звѣзднаго десятиугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина M лежитъ на дугѣ A'C, между тѣмъ какъ minimum m, равный $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ (сторонѣ выпуклаго десятиугольника), принадлежитъ прямоугольнику, котораго вершина M находится на дугѣ AC.

Резюме изслѣдованія.

- $m < \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, корни мнимые . . . . 0 рѣшеній.
- $m = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, $x' = x'' = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}$, minimum(m) . . . . . . 1 рѣш. на дугѣ AC.
- $m > \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$
  - $m < \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$
    - $m < R$ . . . . 2 рѣш. на дугѣ AC.
    - $m = R$, $x' = 0$, $x'' = R\sqrt{\frac{2}{5}}$ . . . 2 рѣш. на дугѣ AC.
    - $m > R$
      - $m < R\sqrt{2}$ . . . . 1 рѣш. на AC, 1 р. на A'C.
      - $m = R\sqrt{2}$ . . . . точка C и 1 рѣш. на A'C.
      - $m > R\sqrt{2}$ . . . . 1 рѣш. на дугѣ A'C.
  - $m = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$, $x' = x'' = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, max.(m). 1 рѣш. на дугѣ A'C.
  - $m > \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$, корни мнимые . . . . 0 рѣшеній.

Задача XX.

625. *Дана окружность и одинъ изъ діаметровъ, AB. Къ нему проводятъ перпендикуляръ xy въ разстояніи AP = a отъ точки A. Провести чрезъ точку A сѣкущую такъ, чтобы ея отрѣзокъ CD между прямою xy и второю точкою пересѣченія съ окружностью равнялся данной прямой l.*



Черт. 108.

Составленіе ур—нія. Пусть прямая xy находится вправо отъ A, въ разстояніи AP = a отъ точки A; въ этомъ случаѣ $a>0$. Отрѣзокъ l всегда *положителенъ*. Искомое разстояніе AE = x. Прямоугольный треугольн. ACE даетъ

$$\overline{AC}^2 = x^2 + x(2R - x) \quad . \quad . \quad (1).$$

Подобные треугольники ACE и ADP даютъ

$$\frac{a}{x} = \frac{AC + l}{AC}, \text{ откуда } AC = \frac{lx}{a - x} \ . \ . \ . \ (2).$$

Внося въ ур—ніе (1) и сокращая на x, найдемъ

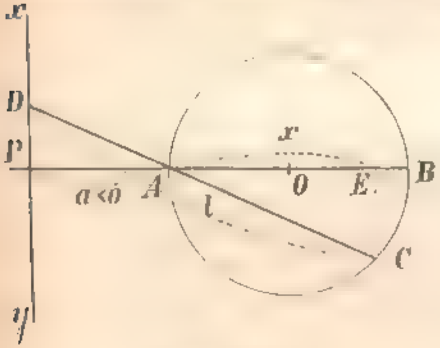
$$2Rx^2 - (l^2 + 4aR)x + 2a^2R = 0 \ . \ . \ . \ (3).$$

Для второго чертежа ур. (1) остается безъ измѣненія; ур. (2) беретъ видъ

$$\frac{AP}{x} = \frac{l - AC}{AC}.$$

Вторая часть положительна; чтобы и первая была положительна, нужно вмѣсто AP поставить уже не a, но $(-a)$, такъ какъ теперь $a < 0$, и получимъ опять ур—ніе (3). Итакъ, въ обоихъ случаяхъ имѣемъ одно и то же ур., въ которомъ нужно принимать $a > 0$ когда отрѣзокъ AP находится вправо отъ A, и $a < 0$, когда онъ располагается отъ этой точки влѣво.

Изслѣдованіе. Чтобы корень ур—нія (3) давалъ отвѣтъ на задачу, онъ долженъ быть дѣйствительнымъ, положительнымъ и $< 2R$.



Черт. 109.

Условіе дѣйствительности x. Реализантъ долженъ быть $\geqslant 0$, т.-е.

$$(l^2 + 4aR)^2 - 4 \ . \ 2R \ . \ 2a^2R \geqslant 0,$$

или $$l^2 + 8aR \geqslant 0.$$

Когда $a > 0$, это условіе всегда удовлетворено. Когда же $a < 0$, то знакъ $l^2 + 8aR$ зависитъ отъ величины l^2 по сравненію съ $-8aR$: если $l^2 \geqslant -8aR$, корни дѣйствительны; если $l^2 < -8aR$ — корни мнимые.

Знаки корней. Корни должны быть положительны. Для сужденія объ ихъ знакахъ, нужно знать знакъ ихъ произведенія и ихъ суммы. Произведеніе корней $= a^2$, слѣд. всегда положительно, и потому дѣйствительные корни имѣютъ одинаковые знаки.

Сумма корней $= \frac{l^2 + 4aR}{2R}$, слѣд. знакъ ея зависитъ отъ знака числителя; очевидно, что при $a > 0$, сумма корней всегда положительна. при $a < 0$, очевидно, всегда будетъ $-8aR > -4aR$, а какъ дѣйствительность корней требуетъ, чтобы было $l^2 > -8aR$, то и подавно будетъ $l^2 > -4aR$, или $l^2 + 4aR > 0$, слѣд. сумма корней опять > 0.

Величина корней. Положительные корни должны быть $< 2R$; чтобы знать положеніе ихъ относительно $2R$, надо знать знакъ $f(2R)$.

$$f(2R) = 2R\,[(2R-a)^2 - l^2],$$

слѣд. имѣетъ знакъ разности

$$(2R-a)^2 - l^2,$$

такъ что

$$f(2R) > 0, \quad \text{когда} \quad (2R-a)^2 > l^2;$$

$$f(2R) < 0, \quad \text{когда} \quad (2R-a)^2 < l^2.$$

Критическія значенія l^2 суть, слѣдовательно: 0, $-8aR$, $(2R-a)^2$, $+\infty$. Ихъ нужно расположить въ восходящемъ порядкѣ, разсматривая два случая: $a > 0$, $a < 0$. Но въ первомъ случаѣ $-8aR$, будучи отрицательнымъ, не входитъ въ число значеній положительнаго количества l^2, и остаются только значенія 0, $(2R-a)^2$, $+\infty$.

Составляемъ таблицу знаковъ.

Случай $a > 0$.

Скала значеній l^2	0		$(2R-a)^2$		$+\infty$
Реализантъ		[illegible]		+	
Произведеніе корней		[illegible]		+	
Сумма корней		+		+	
$f(2R)$		+		—	
1-й коэффиц.		+		+	

Разсматриваемъ каждый интервалъ.

1) Когда l^2 заключается между 0 и $(2R-a)^2$, произведеніе и сумма дѣйствительныхъ корней положительны, слѣд. оба корня положительны. Далѣе $f(2R)$ имѣетъ знакъ 1-го коэффиціента, слѣд. $2R$ находится внѣ корней, и значитъ либо оба корня меньше $2R$, либо оба больше $2R$. Чтобы судить объ этомъ, нужно сравнить $2R$ съ полусуммою корней, которая $= \frac{l^2+4aR}{4R}$. Въ разсматриваемомъ интервалѣ $l^2 < 4R^2 - 4aR + a^2$, слѣд., если $a < 2R$, то будетъ и подавно

$$l^2 < 4R^2 - 4aR + 4R^2, \quad \text{или} \quad l^2 < 8R^2 - 4aR \quad \text{или} \quad l^2 + 4aR < 8R^2,$$

откуда

$$\frac{l^2 + 4aR}{4R} < 2R.$$

Если же $a > 2R$, то и подавно

$$\frac{l^2}{4R} + a > 2R, \text{ или } \frac{l^2+4aR}{4R} > 2R.$$

Такимъ образомъ, если $a < 2R$, полусумма корней меньше $2R$, слѣдовательно и оба корня $< 2R$: *задача имѣетъ два рѣшенія.*

Если же $a > 2R$, то полусумма корней больше 2R, и оба корня больше 2R: *задача не имѣетъ рѣшеній.*

2) $l^2 = (2R - a)^2$. Имѣемъ $f(2R) = 0$, слѣд. одинъ изъ корней равенъ 2R, этотъ корень даетъ точку B. Произведеніе корней $= a^2$, слѣд. другой корень $= \frac{a^2}{2R}$; этотъ корень долженъ быть $< 2R$, откуда $a^2 < 4R^2$, и $a < 2R$. Для построенія сѣкущей, отвѣчающей этому корню, очевидно, достаточно изъ точки A радіусомъ a нанести хорду AC и продолжить ее до данной прямой.

3) $l^2 > (2R - a)^2$. Оба корня опять положительны, но какъ знакъ $f(2R)$ въ этомъ случаѣ противоположенъ знаку перваго члена, то 2R заключается между корнями; и расположеніе чиселъ таково

$$0 \ldots x' \ldots 2R \ldots x''.$$

Заключаемъ, что большій корень (x''), будучи больше 2R, есть корень алгебраическій, меньшій же корень, будучи $< 2R$, даетъ отвѣтъ на задачу, которая такимъ образомъ имѣетъ *1 рѣшеніе*, изображаемое корнемъ

$$x = \frac{l^2 + 4aR - l\sqrt{l^2 - 8aR}}{4R}.$$

Случай $a < 0$.

Въ этомъ случаѣ, какъ выше указано, корни могутъ быть или дѣйствительные, или мнимые: первое имѣетъ мѣсто при $l^2 > -8aR$, второе при $l^2 < -8aR$. При этомъ $(2R - a)^2 > -8aR$, ибо это неравенство эквивалентно съ $(2R + a)^2 > 0$. Скала критич. значеній l^2 въ послѣдовательномъ порядкѣ будетъ, слѣдовательно: $0, -8aR, (2R - a)^2, +\infty$.

Таблица знаковъ будетъ такова:

Скала значеній l^2	0		$-8aR$		$(2R - a)^2$		$+\infty$
Реализантъ		—		+		+	
Произведеніе корней				+		+	
Сумма корней				+		+	
$f(2R)$				+		—	
1-й коэффиц.				+		+	

Изслѣдуемъ каждый интервалъ.

1) $l^2 < -8aR$: корни мнимые, и *задача невозможна.*

2) $l^2 = -8aR$: корни дѣйствительные равные, общая величина ихъ

$$= \frac{l^2 + 4aR}{4R} = \frac{-4aR}{4R} = -a;$$

чтобы можно было допустить такой корень, должно быть

$$-a < 2R, \quad \text{или} \quad a > -2R.$$

3) $-8aR < l^2 < (2R - a)^2$. Корни дѣйствительны, произведеніе и сумма ихъ положительны; слѣд. оба корня положительны. $f(2R)$ имѣетъ знакъ одинаковый

съ 1-мъ членомъ, слѣд. 2R находится внѣ корней. Оба корня тогда будутъ меньше 2R, когда полусумма ихъ будетъ меньше 2R. Такимъ образомъ, нужно изслѣдовать, когда удовлетворяется неравенство

$$\frac{l^2 + 4aR}{4R} < 2R,$$

или ему эквивалентное

$$l^2 < 4R \,.\, 2R - 4R \,.\, a, \quad \text{или} \quad l^2 < 4R\,(2R - a).$$

Когда $a > -2R$, то будетъ $2R - a < 4R$, или, умноживъ обѣ части на положительное количество $2R - a$, найдемъ $(2R - a)^2 < 4R\,(2R - a)$. По условію, l^2 меньше $(2R - a)^2$, слѣд. и подавно будетъ $< 4R\,(2R - a)$. Въ этомъ случаѣ полусумма корней положительна и меньше 2R, слѣд. оба корня меньше 2R, и *задача имѣетъ 2 рѣшенія.*

Когда $a < -2R$, то $2a < -2R + a$ или $2a < -(2R - a)$, сл. $8aR < -4R\,(2R - a)$, или $-8aR > 4R\,(2R - a)$. Но, по условію, l^2 больше $-8aR$, то и подавно больше $4R(2R - a)$. Это значитъ, что полусумма корней больше 2R, слѣд. и каждый изъ корней больше 2R, и *задача не имѣетъ рѣшеній.*

4) $l^2 = (2R - a)^2$. Въ этомъ случаѣ $f(2R) = 0$, одинъ изъ корней $= 2R$; другой корень $= \frac{a^2}{2R}$. Чтобы онъ удовлетворялъ задачѣ, должно быть $\frac{a^2}{2R} < 2R$, или $a^2 - 4R^2 < 0$, или $(a + 2R)\,(a - 2R) < 0$; такъ какъ второй множитель отрицателенъ, то первый долженъ быть положителенъ: $a + 2R > 0$, или $a > -2R$.

5) $l^2 > (2R - a)^2$. Оба дѣйствительные корня, произведеніе и сумма которыхъ > 0, положительны. Знакъ $f(2R)$ противоположенъ знаку 1-го члена, слѣд. 2R заключается между корнями:

$$0 \,.\,.\,.\, x' \,.\,.\,.\, 2R \,.\,.\,.\, x''.$$

Заключаемъ, что задачѣ удовлетворяетъ только меньшій корень x'; *задача имѣетъ 1 рѣшеніе.*

Резюме.

I. $a > 0$.

Корни всегда дѣйствительны.

$$l^2 < (2R - a)^2 \begin{cases} a < 2R \,.\,.\,.\, 2 \text{ рѣшенія: } x = \dfrac{l^2 + 4aR \pm l\sqrt{l^2 + 8aR}}{4R}. \\ a > 2R \,.\,.\,.\, 0 \text{ рѣшеній.} \end{cases}$$

$l^2 = (2R - a)^2$ . . . . 2 рѣшенія: $x' = \frac{a^2}{2R}$ и $x'' = 2R$.

$l^2 > (2R - a)^2$ . . . . 1 рѣшеніе: $x' = \frac{l^2 + 4aR - l\sqrt{l^2 + 8aR}}{4R}$.

II. $a < 0$.

1) $a > -2R$.

$l^2 < -8aR$ . . . корни мнимые.

$l^2 = -8aR$ . . . корня равные: $x' = x'' = a$.

$-8aR < l^2 < (2R - a)^2$ . . . . 2 рѣшенія.

$l^2 = (2R - a)^2$ . . . . 2 рѣшенія: $x' = \frac{a^2}{2R}$, $x'' = 2R$.

$l^2 > (2R - a)^2$ . . . . 1 рѣшеніе.

2) $a < -2R$.

$l^2 < -8aR$ . . . . корни мнимые.

$-8aR \overline{<} l^2 < (2R - a)^2$ . . . 0 рѣшеній.

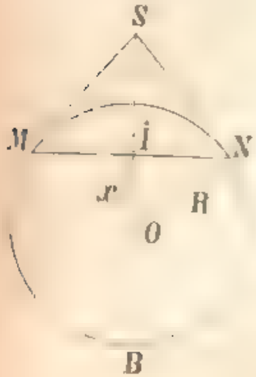
$l^2 = (2R - a)^2$ . . . 1 рѣшеніе: $x = 2R$.

$l^2 > (2R - a)^2$ . . . 1 рѣшеніе.

Задача XXI.

626. *Въ какомъ разстояніи отъ центра даннаго шара провести сѣкущую плоскость, чтобы боковая поверхность конуса SMN, описаннаго около шара по сѣченію, сложенная съ m разъ взятою поверхностью внѣшняго сегмента MBN, равнялась данной поверхности* (m — число положительное).

Рѣшеніе. Примемъ за неизвѣстное разстояніе плоскости MN отъ центра шара, и положивъ OI = x, а данный радіусъ шара назовемъ R.



Черт. 110.

По условію имѣемъ уравненіе

$$\pi SN\,.\,NI + m\,.\,2\pi R\,.\,BI = \pi k^2,$$

если данную поверхность представить въ видѣ круга радіуса k. Нужно вычислить SN, NI и BI въ функціи R и x. Прямо имѣемъ

$$BI = BO + OI = R + x.$$

Затѣмъ, $NI = \sqrt{R^2 - x^2}$. Изъ подобія треугольниковъ SNI и NOI находимъ

$$SN : NI = NO : OI, \quad \text{откуда} \quad SN = \frac{R}{x}\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Подставивъ въ ур—ніе и приведя въ порядокъ, имѣемъ:

$$f(x) = (2m - 1)\,Rx^2 - (k^2 - 2mR^2)\,x + R^3 = 0.$$

Изслѣдованіе. Чтобы значеніе x, выводимое изъ этого уравненія, давало отвѣтъ на задачу, необходимо и достаточно, чтобы оно было дѣйствительно, положительно и не больше R. Въ самомъ дѣлѣ, приведеніе задачи къ уравненію предполагаетъ, чтобы x было положительно, иначе, значеніе SN было бы отрицательно; далѣе будетъ особо указано, какъ можно истолковать отрицательныя значенія x. Возьмемъ эту задачу какъ примѣръ, на которомъ покажемъ, какъ ведется изслѣдованіе *по плану Жиррода*. По этому плану, изслѣдованіе разбивается на двѣ части: ищутъ, при какихъ условіяхъ задача имѣетъ одно рѣшеніе и при какихъ — два рѣшенія. Отсюда сами собою вытекаютъ условія, когда она невозможна.

Случай одного рѣшенія. Чтобы задача имѣла одно, и только одно, рѣшеніе, заключающееся между 0 и R, необходимо и достаточно, чтобы результаты подстановокъ въ $f(x)$ вмѣсто x — нуля и R имѣли противоположные знаки, т.-е. чтобы $f(0)\,.\,f(R) < 0$ (см. § 481, сл. 1). Но $f(0) = R^3$, $f(R) = R(4R^2m - k^2)$, искомое условіе будетъ, поэтому

$$m < \frac{k^2}{4R^2}.$$

Случай двухъ рѣшеній. Чтобы задача имѣла два рѣшенія, необходимо и достаточно:

1) *Чтобы корни были дѣйствительны*, т.-е. чтобы

$$(k^2 - 2mR^2)^2 - 4(2m - 1)R^4 \geqslant 0;$$

рѣшивъ это неравенство относительно m, найдемъ, что ему можно удовлетворить, взявъ либо

$$m \leqslant \frac{k^2 + 2R^2 - 2kR}{2R^2} \quad . \ . \ . \ (1),$$

либо

$$m \geqslant \frac{k^2 + 2R^2 - 2kR}{2R^2} \quad . \ . \ . \ (2)$$

2) *Чтобы корни были положительны*, иначе говоря, чтобы ихъ произведеніе и ихъ сумма были положительны. Условіе положительности произведенія даетъ

$$m > \frac{1}{2} \dots (3),$$

и принимая въ расчетъ это условіе, найдемъ, что сумма корней будетъ положительна, если

$$m < \frac{k^2}{2R^2} \dots (4).$$

3) *Чтобы корни были меньше* R, т.-е. чтобы было заразъ

$$(2m - 1) \, . \, f(R) > 0, \quad \text{откуда} \quad m > \frac{k^2}{4R^2} \dots (5)$$

и

$$x' + x'' < 2R, \quad \text{откуда} \quad m > \frac{k^2 + 2R^2}{6R^2} \dots (6)$$

Нужно теперь сравнить между собою найденные предѣлы.

Неравенство (4) противорѣчитъ 2-му; и если взять $k < R$, то (3) и (4) также будутъ противорѣчить одно другому. Но такъ какъ (3) и (4) неравенства — обѣ необходимы, то нужно предположить $k > R$; но въ такомъ случаѣ, если написать (1) въ видѣ

$$m < \frac{k^2 - 2(k - R)R}{2R^2},$$

легко замѣтить, что оно ведетъ за собою (4). Такимъ образомъ имѣемъ одинъ высшій предѣлъ для m, выражаемый неравенствомъ (1).

Совмѣстны ли съ нимъ низшіе предѣлы? Эти низшіе предѣлы m суть

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{k^2}{4R^2} \quad \text{и} \quad \frac{k^2 + 2R^2}{6R^2};$$

нужно составить разности

$$\frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} - \frac{1}{2} = \frac{(k - R)^2}{2R^2},$$

$$\frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} - \frac{k^2}{4R^2} = \frac{(k - 2R)^2}{4R^2},$$

$$\frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} - \frac{k^2 + 2R^2}{6R^2} = \frac{2(k - R)(k - 2R)}{6R^2}.$$

Слѣдовательно, чтобы искомая совмѣстность имѣла мѣсто, необходимо взять $k > 2R$. Но въ такомъ случаѣ будетъ

$$\frac{k^2}{4R^2} - \frac{1}{2} = \frac{k^2 - 2R^2}{4R^2} > 0,$$

$$\frac{k^2}{4R^2} - \frac{k^2 + 2R^2}{6R^2} = \frac{k^2 - 4R^2}{12R^2} > 0;$$

т.-е. изъ низшихъ предѣловъ наивысшимъ будетъ $\frac{k^2}{4R^2}$.

Заключаемъ, что задача будетъ имѣть 2 рѣшенія, если будутъ одновременно выполнены условія

$$k > 2R,$$

$$\frac{k^2}{4R^2} < m < \frac{k^2 - 2kR + 2R^2}{2R^2} \quad \text{или} \quad \frac{k^2 + (k - 2R)^2}{4R^2}.$$

Истолкованіе отрицательныхъ значеній x. — Для всякаго отрицательнаго x, большаго (— R), значенія BI и NI дѣйствительны и положительны, тогда какъ величина SN является дѣйствительною и отрицательною; это значеніе соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, соотношенію

$$\pi \,.\, (-\mathrm{SN}) \,.\, \mathrm{NI} + m \,.\, 2\pi\mathrm{R} \,.\, \mathrm{BI} = \pi k^2,$$

или

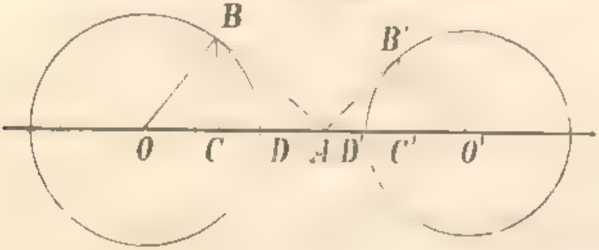
$$-\pi \,.\, \mathrm{SN} \,.\, \mathrm{NI} + m \,.\, 2\pi\mathrm{R} \,.\, \mathrm{BI} = \pi k^2.$$

Слѣдовательно, отрицательное значеніе x даетъ такое положеніе плоскости сѣченія MN, при которомъ поверхность сегмента MBN *безъ* боковой поверхности конуса SMN составляетъ поверхность, равную данной πk^2.

Задача XXII.

627. *Даны два шара, лежащіе одинъ внѣ другого, O и O'; на линіи центровъ, между обоими шарами, найти такую точку A, чтобы два конуса, имѣющіе общую вершину въ этой точкѣ и касающіеся къ даннымъ шарамъ, заключали внутри себя два сегмента, сумма поверхностей которыхъ имѣла бы данную величину.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ r, r' и d — радіусы шаровъ и разстояніе центровъ, x и x' — разстоянія AO и AO'. Зная, что поверхность сферич. сегмента равна произведенію окружности большаго круга на высоту сегмента, имѣемъ: пов. сегмента BCD = $2\pi r$. CD, но CD = r — OC, по свойству же катета имѣемъ: r^2 = OC . x, откуда



Черт. 111.

$$\mathrm{OC} = \frac{r^2}{x} \quad \text{и} \quad 2\pi r \,.\, \mathrm{CD} = 2\pi\left(r^2 - \frac{r^3}{x}\right).$$

Сумма поверхностей обоихъ сегментовъ выразится формулой

$$2\pi\left[r^2 + r'^2 - \frac{r^3}{x} - \frac{r'^3}{x'}\right].$$

За данное можно принять $2\pi\left(\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x'}\right)$; изобразивъ его формулою $2\pi m^2$, и замѣнивъ x' равною величиною $d - x$, получимъ уравненіе

$$\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{d - x} = m^2, \quad \text{или} \quad m^2x^2 - (r^3 - r'^3 + dm^2)\,x + dr^3 = 0 \;.\;.\;.\; (1)$$

откуда

$$x = \frac{r^3 - r'^3 + dm^2 \mp \sqrt{(r^3 - r'^3 + dm^2)^2 - 4dm^2r^3}}{2m^2}.$$

Изслѣдованіе. Количество x будетъ дѣйствительно, если

$$m^2 < \frac{(r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d} \;\ldots(2), \text{ или } m^2 > \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} \;\ldots(3),$$

а по ур—нію (1) заключаемъ, что оба корня будутъ и положительны.

Но чтобы величина x представляла рѣшеніе даннаго вопроса нужно еще, чтобы она была $> r$, но $< d - r'$. Результаты подстановки количествъ r и $d - r'$ вмѣсто x въ первую часть ур—нія (1) суть:

$$r\,[dr^2 + r'^3 - r^3 - m^2(d - r)] \text{ и } r'\,[dr'^2 + r^3 - r'^3 - m^2(d - r')],$$

поэтому главными значеніями m^2 будутъ количества

$$\frac{dr^2 + r'^3 - r^3}{d - r} \text{ и } \frac{dr'^2 + r^3 - r'^3}{d - r'}.$$

Сверхъ того нужно сравнить съ r^2 и $(d - r')^2$ произведеніе корней $\frac{dr^3}{m^2}$, что даетъ еще два главныя значенія m^2, именно dr и $\frac{dr^3}{(d - r')^2}$.

Положимъ

$$\frac{(r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})^2}{d} = a,\; \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d} = b,\; \frac{dr'^2 + r^3 - r'^3}{d - r} = f,$$

$$\frac{dr^2 + r'^3 - r^3}{d - r} = g,\; \frac{dr^3}{(d - r')^2} = c,\; dr = h.$$

Во-первыхъ, замѣтимъ, что неравенство (2) должно отбросить, и слѣд. взять неравенство (3). Въ самомъ дѣлѣ, разности $f - a$ и $c - a$ положительны, ибо

$$f - a = \frac{(dr' - r'^2 - r\sqrt{rr'})^2}{d(d - r')},\; \sqrt{c} - \sqrt{a} = \frac{r'(d\sqrt{r} - r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})}{\sqrt{d}(d - r')}.$$

Значитъ, если бы количество m^2 было меньше a, то тѣмъ болѣе оно было бы меньше c и f, и слѣд. произведеніе обоихъ корней x было бы болѣе $(d - r')^2$, въ то время какъ результатъ подстановки разности $d - r'$ на мѣсто x въ первую часть ур—нія (1) былъ бы положителенъ. Обѣ величины x были бы больше $d - r'$ и слѣд. должны бы быть отброшены.

Распредѣлимъ теперь въ восходящемъ порядкѣ главныя значенія m^2, т.-е. b, f, c, g, h. Для этого вычислимъ сначала разности: $h - g$, $g - f$, $f - b$, находимъ:

$$h - g = \frac{r(d - r)^2 - r'^3}{d(d - r')},\; f - b = \frac{(dr' - r'^2 - r\sqrt{rr'})^2}{d(d - r')},$$

$$\frac{g - f}{r - r'} = \frac{(r + r')d^2 - (2r^2 + 2r'^2 + 3rr')d + (r + r')(r^2 + r'^2 + rr')}{(d - r)(d - r')};$$

первыя двѣ разности очевидно положительны; положительна и третья. Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю ея числителя и рѣшая получаемое ур. относительно d, находимъ корни: $r + r'$ и $r + r' - \frac{rr'}{r + r'}$. Но какъ шары лежатъ одинъ внѣ другого, то d больше большаго изъ корней $r + r'$, и слѣд. числитель дроби, а потому и $g - f$ положительны. Итакъ, доказано, что $b < f < g < h$.

Вычисляя затѣмъ разности $f - c$, $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, получаемъ

$$f - c = \frac{r'\,[r'(d - r')^2 - r^3]}{(d - r')^2},\; \sqrt{b} - \sqrt{c} = \frac{r'(d\sqrt{r'} - r\sqrt{r} - r'\sqrt{r'})}{(d - r')\sqrt{d}},$$

откуда видно, что обѣ разности будутъ положительны, или же обѣ отрицательны, смотря по тому, будетъ ли d больше или меньше $r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$. Затѣмъ, три количества b, c и f составятъ одно, если d будетъ $= r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$. Отсюда заключаемъ, что когда $d > r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$, количество c будетъ $< b$, въ противномъ случаѣ будетъ $c > f$. Далѣе изслѣдованіе покажетъ, что когда $d < r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$, то достаточно знать, что $c > f$, не фиксируя его мѣста относительно количествъ g и h. Изъ сказаннаго видно, что слѣдуетъ различать 3 случая, смотря по тому, будетъ ли d больше, равно, или меньше суммы $r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Распредѣливъ критическія значенія m^2 въ восходящемъ порядкѣ, составляемъ таблицу знаковъ. Такимъ образомъ, найдемъ:

I случай: $d > r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Значенія m^2	0		$a \ldots c \ldots b$		f		$g \ldots h \ldots$
Реализантъ.			—				
Произведеніе корней.		+		+		+	+
Сумма корней.							
$f(r)$.		—					—
$f(d-r)$.							—
1-й коэффиціентъ.							

Выше было выяснено, что количеству m^2 нельзя давать значеній ни меньшихъ a, ибо въ этомъ интервалѣ, хотя корни и дѣйствительны, но они оба больше $d - r'$, ни между a и b, ибо въ этомъ интервалѣ корни уравненія мнимы. Итакъ, разсматриваемъ случаи:

1) $m^2 = b = \frac{(r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'})^2}{d}$. Подставивъ въ уравненіе это значеніе m^2, найдемъ $x = \frac{dr\sqrt{r}}{r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'}}$. Это значеніе x допустимо, если оно будетъ больше r, но меньше $d - r'$.

Положивъ $\frac{dr\sqrt{r}}{r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'}} > r$, имѣемъ отсюда $d > r - r'\sqrt{\frac{r'}{r}}$, и легко провѣрить, что $r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}} > r - r'\sqrt{\frac{r'}{r}}$, слѣдовательно, найденный корень $> r$.

Положивъ $\frac{dr\sqrt{r}}{r\sqrt{r} + r'\sqrt{r'}} < d - r'$, имѣемъ $d > r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$, что и дано.

Заключаемъ, что въ данномъ случаѣ задача возможна и имѣетъ 1 рѣшеніе.

2) $b < m^2 < f$, или $\frac{(r+r')(r+r')^2}{d} < m^2 < \frac{dr^2 + r^3 - r'^3}{d - r'}$. Сумма и произведеніе корней положительны, слѣд., оба корня положительны. Затѣмъ, по знаку $f(r)$ и $f(d-r')$ заключаемъ, что r и $d-r'$ лежатъ внѣ корней.

Сравненіе r и $d-r'$ съ полусуммой корней въ данномъ случаѣ неудобно. Чтобы знать, будутъ ли оба корня больше r, замѣтимъ, что если $x > r$ и $x' > r$, то должно быть $xx' > r^2$, т. е. нужно сравнить съ r^2 произведеніе корней, равное $\frac{dr^3}{m^2}$. Положивъ $\frac{dr^3}{m^2} > r^2$, имѣемъ $m^2 < dr$, что вѣрно, такъ какъ $dr > h$ лежитъ въ этомъ интервалѣ. Итакъ, оба корня больше r. Чтобы, затѣмъ, провѣрить, будутъ ли оба корня меньше $d-r'$, смотримъ, будетъ ли ихъ произведеніе $< (d-r')^2$. Положивъ $\frac{dr^3}{m^2} < (d-r')^2$, имѣемъ отсюда $m^2 > \frac{dr^3}{(d-r')^2}$, или $m^2 > c$, что для разсматриваемаго интервала имѣетъ мѣсто.

Заключаемъ, что въ данномъ случаѣ задача имѣетъ 2 рѣшенія.

3) $m^2 = f$. Въ этомъ случаѣ $f(d-r') = 0$, слѣдовательно, одинъ корень $= d - r'$. Другой корень $= \frac{dr^3}{m^2(d-r')}$, и какъ для даннаго интервала m^2 больше $\frac{dr^3}{(d-r')^2}$, то другой корень меньше $d-r'$. Задача опять имѣетъ два рѣшенія.

4) $f < m^2 < g$, или $\frac{dr^2 + r^3 - r'^3}{d-r'} < m^2 < \frac{dr^2 + r'^3 - r^3}{d-r}$. Оба корня положительны, и какъ $f(d-r') < 0$, то $d-r'$ лежитъ между корнями: одинъ корень, слѣдовательно, меньше $d-r'$, другой больше $d-r'$. Второй корень отбрасываемъ, а чтобы первый давалъ рѣшеніе, онъ долженъ быть еще $> r$. Но, находясь въ разсматриваемомъ интервалѣ, m^2 меньше h, а при этомъ условіи оба корня больше r. Задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

5) $m^2 = g$. Для этого значенія m^2 имѣемъ $f(r) = 0$, слѣдовательно, одинъ изъ корней $= r$. А какъ $f(d-r') < 0$, то $d-r'$ заключается между корнями, изъ которыхъ одинъ меньше $d-r'$, другой больше $d-r'$. Послѣдній не даетъ рѣшенія, а первый отвѣчаетъ на задачу, которая такимъ образомъ имѣетъ 1 рѣшеніе: $x = r$.

6) $m^2 > g$. Оба корня положительны, $f(r)$ и $f(d-r')$ отрицательны, слѣд., r и $d-r'$ находятся между корнями, такъ что меньшій корень меньше r, а большій корень больше $d-r'$; ни тотъ, ни другой не отвѣчаютъ задачѣ, которая въ разсматриваемомъ случаѣ невозможна.

Резюме.

$$d > r > r' \Big] \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix}.$$

$m^2 < b$ . . . Задача невозможна.

$m^2 = b$ . . . 1 рѣшеніе: $x = \frac{dr + r'}{r + r' \quad r + r'}$.

$b < m^2 < f$ . . . 2 рѣшенія.

$m^2 = f$ . . . 2 рѣшенія.

$f < m^2 < g$ . . . 1 рѣшеніе: меньшій корень.

$m^2 = g$ . . . 1 рѣшеніе: $x = r$.

$m^2 > g$ . . . Задача невозможна.

II случай: $d = r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Въ этомъ случаѣ $c = b = f$, и $f < g < h$. Интервалла отъ b до f не существуетъ; изслѣдованію подлежатъ два послѣдніе интервалла предыдущей таблицы.

1) $m^2 < f$. Такъ какъ $f = b$, а m^2 не можетъ быть $< b$, то задача невозможна.

2) $m^2 = f$. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, одинъ корень $= d - r'$. Произведеніе корней $= \frac{dr^3}{m^2}$; но $m^2 = f = c = \frac{dr^3}{(d-r')^2}$; слѣдовательно, другой корень $= \frac{dr^3 (d-r')^2}{dr^3 (d-r')} = d - r'$. Задача имѣетъ два рѣшенія сливающіяся: $x = d - r'$.

3) $f < m^2 \leqslant g$. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

4) $m^2 > g$. Задача невозможна.

Итакъ, въ случаѣ $d = r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$, задача или невозможна, или имѣетъ 1 рѣшеніе.

III случай: $d < r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$.

Критическія значенія m^2 идутъ, возрастая, въ порядкѣ b, f, g, h. Но теперь уже $c > f$. Пользуемся таблицею I-го случая, перемѣстивъ c вправо отъ f.

1) $m^2 = b$. Выше мы видѣли, что въ этомъ случаѣ, чтобы задача была возможна, должно быть $d \geqq r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$. Слѣдов., въ разсматриваемомъ случаѣ она при $m^2 = b$ невозможна.

2) $b < m^2 < f$. Оба корня положительны. Какъ въ пунктѣ 4-мъ случая I, чтобы оба корня были $> r$, должно быть $m^2 > dr$, что и имѣетъ мѣсто. Чтобы оба корня были $< d - r'$, должно быть $m^2 > c$, что въ разсматриваемомъ интервалѣ не имѣетъ мѣста, и оба корня $> d - r'$; задача невозможна.

3) $m^2 = f$. При этомъ $f(d - r') = 0$; одинъ корень $= d - r'$. Другой корень $= \frac{dr^3}{m^2(d-r')}$; а какъ теперь $m^2 < \frac{dr^3}{(d-r')^2}$, то другой корень $> d - r'$, и задача имѣетъ 1 рѣшеніе: $x = d - r'$.

4) $f < m^2 < g$. Въ этомъ случаѣ $d - r'$ находится между корнями, т.-е. одинъ корень больше $d - r'$ и долженъ быть отброшенъ, другой, меньшій $d - r'$, корень долженъ быть больше r, но, находясь въ разсматриваемомъ интервалѣ, m^2 меньше dr, а при этомъ условіи оба корня $> r$; задача имѣетъ 1 рѣшеніе.

5) $m^2 = g$. Такъ какъ $f(r) = 0$, то одинъ корень $= r$. Такъ какъ $d - r'$ лежитъ между корнями, то другой корень больше $d - r'$ и не отвѣчаетъ задачѣ, которая, такимъ образомъ, имѣетъ 1 рѣшеніе.

6) $m^2 > g$. Задача невозможна по той же причинѣ какъ и въ I случаѣ.

Резюме.

I

$$d < r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

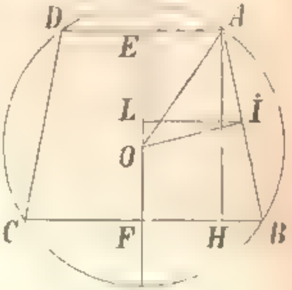
$m^2 = b$ . . . Задача невозможна.
$b < m^2 < f$ . . . Задача невозможна.
$m^2 = f$ . . . 1 рѣшеніе: $x = d - r'$.
$f < m^2 < g$ . . . 1 рѣшеніе: меньшій корень.
$m^2 = g$ . . . 1 рѣшеніе: $x = r$.
$m^2 > g$ . . . Задача невозможна.

Сумма поверхностей сегментовъ уменьшается съ увеличеніемъ m^2, и увеличивается съ уменьшеніемъ m^2; откуда видно, что эта сумма имѣетъ maximum, соотвѣтствующій $m^2 = h$ въ первомъ случаѣ, и $m^2 = l$ — въ третьемъ.

Задача XXIII.

628. *Въ данный шаръ радіуса r вписать усѣченный конусъ* ABCD, *имѣющій данныя: высоту h и объемъ* $\frac{1}{3}\pi a^2 h$.

Рѣшеніе. Пусть будутъ x, y, z радіусы FB, AE основаній и образующая AB. Выражая, что объемъ тѣла $= \frac{1}{3}\pi a^2 h$, имѣемъ ур.



Черт. 112.

$$x^2 + xy + y^2 = a^2 \ldots (1).$$

Проведя радіусъ OA, прямыя OI, AH, соотвѣтственно перпендикулярныя къ AB и FB и параллель IL къ BF, изъ треугольниковъ AOI и AHB имѣемъ:

$$OI = \frac{\sqrt{4r^2 - z^2}}{2} \ldots (2),$$

$$(x - y)^2 = z^2 - h^2 \ldots (3),$$

и изъ подобія треугольниковъ OIL и ABH получаемъ

$$(x + y)^2 = \frac{h^2(4r^2 - z^2)}{z^2} \ldots (4).$$

Помноживъ ур. (1) на 4 и вычтя (3), имѣемъ

$$3(x + y)^2 = 4a^2 - z^2 + h^2.$$

Приравнивая величины $(x + y)^2$ изъ этого ур. и изъ (4), получаемъ

$$z^4 - 4(a^2 + h^2)z^2 + 12h^2r^2 = 0 \ldots (5).$$

Отсюда

$$z = \sqrt{2(a^2 + h^2 \mp \sqrt{(a^2 + h^2)^2 - 3h^2r^2}} \ldots (6).$$

Изслѣдованіе.

629. Анализъ. Все дѣло, очевидно, въ вычисленіи z. Но недостаточно, чтобы величина z была дѣйствительною и положительною: нужно еще, чтобы она была не меньше h и не больше $2r$. Можно разсматривать усѣченные конусы обоего рода, къ которымъ, какъ легко убѣдиться, одинаково приложимы ур. (1), (3), и (4), и слѣд. ур. (5). Значеніе z даетъ усѣченный конусъ 1-го или 2-го рода, смотря потому, меньше ли оно или больше $\sqrt{2rh}$. Въ самомъ дѣлѣ, въ трапеціи ABCD произведеніе AB × AC стороны на діагональ равно $2rh$, а какъ изъ двухъ линій AB и AC меньшая есть первая или вторая, смотря потому, 1-го или 2-го рода усѣчен. конусъ, то сторона z меньше $\sqrt{2rh}$ въ первомъ случаѣ, и больше — во второмъ. Если $z = \sqrt{2rh}$, усѣчен. конусъ дѣлается полнымъ.

Зная это, находимъ, во-первыхъ, для дѣйствительности z условіе

$$a^2 \geqslant h(r\sqrt{3} - h) \ldots (7).$$

(Можно замѣтить, что когда h равно или больше $r\sqrt{3}$, условіе само собою удовлетворяется.)

Какъ скоро неравенство (7) существуетъ, то, въ силу ур. (5), оба значенія z^2 дѣйствительны и положительны.

Затѣмъ, для сравненія значеній z^2 съ h^2, $4r^2$ и $2rh$, подставляемъ поочередно эти три количества въ первую часть ур—нія (5), разсматривая ее какъ триномъ квадратный относительно z^2. Находимъ слѣдующіе результаты подстановокъ:

$$h^2(12r^2-4a^2-3h^2) \text{ для } h^2 \quad .\ .\ .\ (8)$$

$$4r^2(4r^2-4a^2-h^2) \quad ,, \quad 4r^2 \quad .\ .\ .\ (9)$$

$$8rh(2rh-r^2-a^2) \quad ,, \quad 2rh \quad .\ .\ .\ (10).$$

Приравнивая нулю каждый изъ этихъ трехъ полиномовъ и рѣшая относительно a^2 получаемыя ур—нія, находимъ слѣдующія главныя значенія для a^2:

$$\frac{3}{4}(4r^2-h^2)=e, \quad \frac{4r^2-h^2}{4}=d, \quad h(2r-h)=c.$$

Вторую часть неравенства (7) слѣдуетъ также разсматривать какъ главное значеніе a^2; полагаемъ

$$h(r\sqrt{3}-h)=b.$$

Такъ какъ произведеніе корней, по ур. (5), не зависитъ отъ a^2, то, сравнивая это произведеніе съ количествами h^4, $16r^4$ и $4r^2h^2$, новыхъ главныхъ значеній не получимъ.

Теперь слѣдуетъ узнать, въ какомъ порядкѣ идутъ возрастая количества b, c, d, e. Во-первыхъ, очевидно, что $b < c$, и что $d < e$. Вычислимъ затѣмъ разности $d-b$, $e-c$, $d-c$.

Имѣемъ:

$$d-b=\frac{(h\sqrt{3}-2r)^2}{4}; \quad e-c=\frac{(2r-h)(6r-h)}{4}; \quad d-c=\frac{(2r-3h)(2r-h)}{4}.$$

Двѣ первыя разности всегда положительны; третья же—положительна, равна нулю, или отрицательна, см. пот. будетъ ли $h <, =,$ или $> \frac{2r}{3}$. Итакъ, видно, что смотря по тому, будетъ ли h меньше или больше $\frac{2r}{3}$, главныя значенія a^2 распредѣляются такъ: b, c, d, e; b, d, c, e.

Когда $h=\frac{2r}{3}$, c и d будутъ равны.

Замѣтимъ еще, что произведеніе обоихъ значеній z^2, т. е. $12h^2r^2$ всегда больше h^4 и $4h^2r^2$, слѣд. никогда не можетъ случиться, чтобы два значенія z были оба меньше h или $\sqrt{2rh}$. Но какъ произведеніе значеній z^2 меньше или больше $16r^4$, смотря по тому, будетъ ли h меньше или больше количества $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, это послѣднее количество слѣдуетъ также разсматривать какъ главное значеніе количества h.

630. Синтезъ. Изъ предыдущаго анализа видно, что изслѣдованіе распадается на такіе три главные случая:

$$h < \frac{2r}{3}; \quad \frac{2r}{3} < h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}; \quad h > \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Первый случай: $h \leqslant \frac{2r}{3}$.

Измѣненія a^2	Число рѣшеній	
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 < c$	0	2
$c < a^2 \leqslant d$	1	1
$d < a^2 \leqslant e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Рѣшеніями 1-го рода назовемъ усѣченный конусъ 1-го рода, рѣшеніями 2-го рода усѣчен. конусъ 2-го рода. Главныя величины взяты въ порядкѣ b, c, d, e, a^2 измѣняемъ съ b до e, проходя черезъ промежуточныя значенія c и d.

1. $a^2 < b$. Обѣ величины z мнимы: задача невозможна.

2. $a^2 = b$. Для z получаемъ формулу $z = \sqrt{2rh}+3$. Эта величина больше h, и $\sqrt{2rh}$, но меньше $2r$, ибо $h < \frac{2r}{3}$, а потому меньше и $\frac{2r+3}{3}$. Слѣдов., имѣемъ усѣч. конусъ 2-го рода.

3. $b < a^2 < c$. Количества a^2 меньше c, d, e, слѣд. полиномы (8), (9) и (10) положительны, и какъ h меньше $\frac{2r}{3}$, обѣ величины z меньше $2r$ и больше h и $\sqrt{2rh}$. Задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

Когда $a^2 = c$, одна изъ величинъ z равна $\sqrt{2rh}$, и ей соотвѣтствуетъ цѣлый конусъ; вторая величина остается меньше $2r$, но больше h и $\sqrt{2rh}$, и даетъ усѣч. кон. 2-го рода. Такъ какъ полный конусъ можно разсматривать безразлично какъ усѣч. кон. 1-го или 2-го рода, то можно сказать, что и въ этомъ случаѣ задача имѣетъ два рѣшенія 2-го рода.

4. $c < a^2 \leqslant d$. Такъ какъ a^2 становится больше c, полиномъ (10) отрицателенъ, и одна изъ величинъ z меньше $\sqrt{2rh}$, между тѣмъ какъ другая больше. Но обѣ эти значенія остаются, какъ и прежде, больше h, но меньше $2r$. Имѣемъ одно рѣшеніе 1-го и одно рѣшеніе 2-го рода.

Когда $a^2 = d$, одна изъ величинъ z становится равною $2r$, другая меньше $2r$, но онѣ всегда больше h, и одна больше $\sqrt{2rh}$, другая меньше. Слѣдовательно, имѣемъ усѣч. кон. 1-го рода и усѣч. кон. 2-го рода, только этотъ послѣдній имѣетъ образующую $= 2r$.

5. $d < a^2 \leqslant e$. Такъ какъ $a^2 > d$, полиномъ (9) отрицателенъ, и одна изъ величинъ z меньше $2r$, другая больше. Значеніе z, большее $2r$, отбрасываемъ, и какъ меньшее значеніе z меньше $\sqrt{2rh}$, а другое больше, имѣемъ только одно рѣшеніе: усѣч. конусъ 1-го рода.

Когда $a^2 = e$, получаемъ цилиндръ высоты h.

6. $a^2 > e$. Задача невозможна. Въ самомъ дѣлѣ, когда a^2 превосходитъ e, одно изъ значеній z меньше, а другое больше, нежели h и $2r$. Поэтому, первое должно быть отброшено какъ меньшее h, а другое—какъ большее $2r$.

Когда $h = \frac{2}{3}r$, заключенія остаются тѣ же, какъ и при $h < \frac{2}{3}r$. Только оба предѣла c и d дѣлаются равными, и потому интервалла между c и d въ таблицѣ изслѣдованія не будетъ.

Затѣмъ, безъ новыхъ объясненій, слѣдуютъ таблицы для двухъ послѣднихъ случаевъ: содержащіяся въ нихъ детали изслѣдованія найдемъ, слѣдуя пути, указанному въ первомъ случаѣ.

Второй случай: $\frac{2r}{3} < h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Измѣненія a^2	Число рѣшеній.	
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 < d$	0	2
$d < a^2 < c$	0	1
$c < a^2 \leqq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Третій случай: $h > \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Измѣненія a^2	Число рѣшеній	
	1-го рода.	2-го рода.
$a^2 < d$	0	0
$a^2 = d$	0	1
$d < a^2 < c$	0	1
$c < a^2 \leqq e$	1	0
$a^2 > e$	0	0

Сдѣлаемъ только слѣдующія замѣчанія:

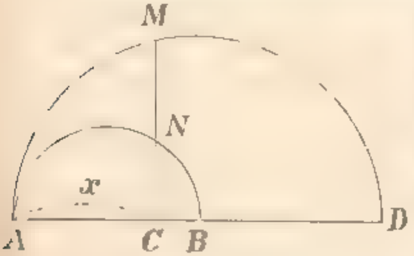
Когда $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, d равно b, и во второй таблицѣ нужно только опустить интервалъ отъ d до b.

Что касается третьей таблицы, то низшій предѣлъ a^2 равенъ d вмѣсто b. Это значитъ, что какъ h больше $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ когда a^2 меньше d, то оба значенія z становятся больше $2r$.

Примѣчаніе. Такъ какъ maximum a^2 во всѣхъ случаяхъ равенъ e, то заключаемъ, что всѣ усѣченные конусы данной высоты, вписанные въ шаръ, всегда меньше цилиндра той же высоты. Но minimum a^2 различенъ, смотря по тому, меньше ли h или больше нежели $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$: онъ равенъ b въ первомъ случаѣ, и d во второмъ. Когда $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, d равно b, и оба minima сливаются въ одинъ.

Задача XXIV.

631. *На прямой даны три точки* A, B, D, *такія, что* AB = BD = 2a. *На отрѣзкѣ* AB *найти такую точку* C, *чтобы перпендикуляръ, возставленный изъ нея къ прямой* AB, *пересѣкалъ окружности, описанныя на* AB *и* AD *какъ на діаметрахъ, въ такихъ точкахъ* M *и* N, *чтобы* CN + CM = l, *гдѣ* l *данная длина.*



Черт. 113.

Рѣшеніе. Принявъ за неизвѣстное отрѣзокъ AC = x, имѣемъ ур—іе

$$\sqrt{x(2a-x)} + \sqrt{x(4a-x)} - l = 0 \ldots (1)$$

Разсматривая l какъ $\sqrt{l^2}$, мы можемъ приложить къ рѣшенію и изслѣдованію этого ур—нія пріемъ, указанный въ § 546. Положивъ

$$x(2a-x) = P, \quad x(4a-x) = Q, \quad l^2 = R,$$

найдемъ резольвентъ ур—нія (1):

$$x^2(2a-x)^2+x^2(4a-x)^2+l^4-2x^2(2a-x)(4a-x)-2l^2x(2a-x)-2l^2x(4a-x)=0,$$

или

$$f(x)=4(a^2+l^2)x^2-12al^2x+l^4=0\ .\ .\ .\ (2),$$

откуда

$$x=\frac{6al^2\pm\sqrt{36a^2l^4-4l^4(a^2+l^2)}}{4(a^2+l^2)}=\frac{3al^2\pm l^2\sqrt{8a^2-l^2}}{2(a^2+l^2)}.$$

Изслѣдованіе. — Корни должны быть дѣйствительны; это будетъ при $l^2 \leqq 8a^2$. Разъ это требованіе удовлетворено, оба корня будутъ положительны. Чтобы они удовлетворяли данной геометрической задачѣ, они должны быть $\leqq 2a$. Составляя $f(2a)$, найдемъ

$$f(2a)=16a^2(a^2+l^2)-24a^2l^2+l^4=(4a^2-l^2)^2,$$

результатъ одинаковаго знака съ коэффиціентомъ при x^2, слѣдоват., $2a$ лежитъ внѣ интервала корней, и чтобы корни были меньше $2a$, ихъ полусумма должна быть $< 2a$. Но неравенство

$$\frac{3al^2}{2(a^2+l^2)}<2a,\quad \text{или}\quad 3l^2<4a^2+4l^2,$$

всегда удовлетворено. Итакъ, корни резольвента, при условіи $l^2 \leqq 8a^2$, дѣйствительны, положительны и меньше $2a$. Но мы знаемъ (см. гл. XXXVI, § 546), что корни резольвента могутъ удовлетворять или данному ур—нію, или одному изъ двухъ сопряженныхъ съ нимъ, а именно:

данному $\sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$, если будетъ $P+Q-R<0$ . . . (3)
ур—нію $\sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0$, „ „ $P-Q+R<0$ . . . (4)
„ $-\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0$, „ „ $-P+Q+R<0$ . . . (5).

Слѣдовательно, чтобы видѣть, какому изъ этихъ трехъ ур—ній принадлежатъ корни резольвента, нужно опредѣлить, какой знакъ они сообщаютъ триномамъ, находящимся въ первыхъ частяхъ неравенствъ (3), (4) и (5). А для этого надо знать, какъ расположены корни резольвента относительно корней выраженій (3), (4) и (5), которыя могутъ быть квадратными либо первой степени относительно x. Такимъ образомъ вопросъ приводитъ къ задачѣ о размѣщеніи корней одного квадратнаго тринома относительно корней другого. Критерій для этого данъ въ § 491 главы XXXII.

I. Уравненіе $\sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$.

Ему отвѣчаетъ вопросъ въ прямомъ смыслѣ заданія.

Составимъ выраженіе $P+Q-R$. Это будетъ

$$x(2a-x)+x(4a-x)-l^2,\quad \text{или}\quad -2x^2+6ax-l^2.$$

Если корень x резольвента сдѣлаетъ

$$-2x^2+6ax-l^2<0,\quad \text{или}\quad 2x^2-6ax+l^2>0,$$

то онъ будетъ корнемъ даннаго ур—нія. Чтобы знать, какъ корни резольвента расположены относительно корней тринома

$$2x^2-6ax+l^2\ .\ .\ .\ (6),$$

надо составить Δ.

$$\Delta=[4l^2(a^2+l^2)-2l^4]^2-[-24a(a^2+l^2)+24al^2][-12al^4+6al^4]-$$
$$-4l^4[(2a^2+l^2)^2-36a^4]=4l^4(8a^2+l^2)(l^2-4a^2).$$

Примѣняя методъ § 491, найдемъ, что:

Если $\Delta > 0$, т.-е. $l^2 - 4a^2 > 0$, то корни резольвента и тринома $2x^2 - 6ax + l^2$ не отдѣляютъ другъ друга.

Если $\Delta < 0$, т.-е. $l^2 - 4a^2 < 0$, то корни одного тринома отдѣляютъ корни другого.

Наконецъ, при $\Delta = 0$, или $l^2 - 4a^2 = 0$, оба тринома имѣютъ общій корень.

Разсмотримъ сначала этотъ послѣдній случай. Когда $l^2 = 4a^2$, корни резольвента суть $x_1 = \frac{2}{5}a$, $x_2 = 2a$. Корни тринома (6) суть: $\xi_1 = a$, $\xi_2 = 2a$. Въ этомъ случаѣ данная задача имѣетъ два рѣшенія

$$x_1 = \frac{2}{5}a, \quad x_2 = 2a,$$

и легко непосредственно провѣрить, что оба они удовлетворяютъ задачѣ въ прямомъ смыслѣ заданія.

Пусть $l^2 < 4a^2$. Легко убѣдиться, что $aa'(ab' - ba') < 0$ (см. нотацію § 491), и потому расположеніе корней таково:

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2$$

т.-е. меньшій корень x_1 резольвента находится внѣ интервалла корней тринома (6), слѣдовательно сообщаетъ этому триному положительный знакъ, и потому можетъ служить отвѣтомъ на задачу въ прямомъ смыслѣ заданія. Большій корень резольвента, находясь между корнями тринома (6), сообщаетъ ему отрицательный знакъ и потому не отвѣчаетъ уравненію $\sqrt{P} - \sqrt{Q} = \sqrt{R} = 0$.

Когда $l^2 > 4a^2$, то, какъ легко убѣдиться, будетъ $aP > 0$, и слѣдовательно числа x_1, x_2, ξ_1, ξ_2, располагаются въ порядкѣ

$$x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$$

корни резольвента, находясь внѣ корней тринома (6), дѣлаютъ его положительнымъ, и оба корня резольвента отвѣчаютъ задачѣ.

II. Уравненіе $\sqrt{P} - \sqrt{Q} + \sqrt{R} = 0$.

Ищется такая точка C, чтобы было $CM - CN = l$.

Корни резольвента должны удовлетворять условію $P - Q + R < 0$, или $x(2a - x) - x(4a - x) + l^2 < 0$, или $x \geqslant \frac{l^2}{2a}$.

Подставляя $\frac{l^2}{2a}$ вмѣсто x въ (2), найдемъ

$$f\left(\frac{l^2}{2a}\right) = \frac{l^4}{a^2}(l^2 - 4a^2).$$

Когда $l^2 < 4a^2$, этотъ результатъ отрицателенъ, слѣдоват. будетъ

$$x_1 < \frac{l^2}{2a} < x_2,$$

и слѣдоват., большій корень ур—нія (2) отвѣчаетъ видоизмѣненной задачѣ.

Когда $l^2 > 4a^2$, результатъ подстановки положителенъ, и $\frac{l^2}{2a}$ — внѣ корней. Положивъ

$$\frac{l^2}{2a} > \frac{3al^2}{2(a^2 + l^2)},$$

найдемъ $a^2 + l^2 > 3a^2$, что вѣрно, слѣдоват. оба корня ур—нія (2) меньше $\frac{l^2}{2a}$: видоизм. задача при условіи $l^2 > 4a^2$ невозможна.

III. Уравненіе $-\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0$.

Ищется такая точка C, чтобы было $CN - CM = l$.

Условіе $-P+Q+R<0$ дастъ $2ax+l^2<0$, что при $x>0$ невозможно: задача невозможна,—и это видно à priori.

Резюме.

Когда $l<2a$, меньшій корень ур—нія (2) дастъ отвѣтъ на предложенную задачу, а большій корень служитъ отвѣтомъ на первое видоизмѣненіе задачи

Когда $l>2a$, оба корня ур—нія (2, служатъ отвѣтомъ на предложенную задачу.

ГЛАВА XLII.

Maxima и minima въ задачахъ.

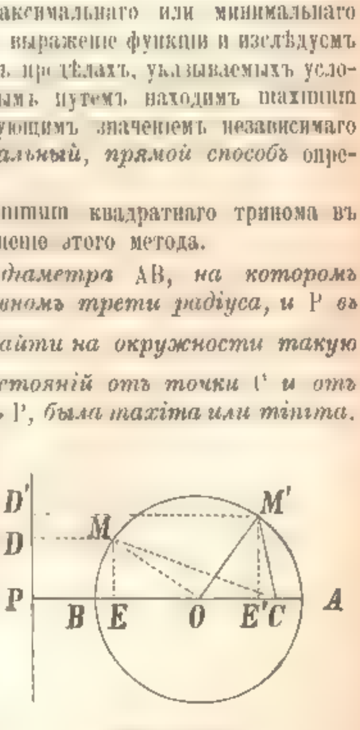
Maxima и minima простѣйшихъ цѣлыхъ функцій.—Maxima и minima квадратной дроби. Измѣненія этой функціи.—Maxima и minima функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

I. Maxima и minima простѣйшихъ цѣлыхъ функцій.

632. Прямой способъ. При опредѣленіи максимальнаго или минимальнаго значенія функціи этимъ способомъ, составляемъ выраженіе функціи и изслѣдуемъ ея измѣненіе, измѣняя независимое перемѣнное въ предѣлахъ, указываемыхъ условіями вопроса. Такимъ образомъ мы естественнымъ путемъ находимъ maximum или minimum функціи вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ значеніемъ независимаго перемѣннаго. Въ этомъ и заключается *натуральный, прямой способъ* опредѣленія max. или min. функціи.

Этимъ путемъ мы нашли maximum и minimum квадратнаго тринома въ § 585. Здѣсь мы приводимъ примѣры въ поясненіе этого метода.

633. Примѣръ I. *Дана окружность діаметра* AB, *на которомъ взяты точки:* C *въ разстояніи отъ* A, *равномъ трети радіуса, и* P *въ разстояніи* $OP=\frac{5}{3}$ *радіуса отъ центра. Найти на окружности такую точку* M, *чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ точки* C *и отъ перпендикуляра, проведеннаго къ* AB *въ точкѣ* P, *была maxima или minima.*



Черт. 114.

За неизвѣстное примемъ разстояніе центра круга отъ проэкціи E точки M на діаметръ AB, принимая это неизвѣстное положительнымъ, когда точка E лежитъ влѣво отъ O, и отрицательнымъ, когда эта точка вправо отъ O. Такимъ образомъ для точки M изъ тупоугольнаго △ MOC найдемъ:

$$MC^2=MO^2+OC^2+2OC\cdot OE=R^2+\frac{4}{9}R^2+\frac{4}{3}R\,.\,x.$$

$$MD^2=\left(\frac{5}{3}R-x\right)^2=\frac{25}{9}R^2-\frac{10}{3}Rx+x^2;$$

слѣд. $$MC^2+MD^2=R^2+\frac{29}{9}R^2-2Rx+x^2=(x-R)^2+\frac{29}{9}R^2.$$

Легко видѣть, что это выраженіе сохраняетъ видъ при всякомъ положеніи точки M на окружности, благодаря условію относительно знака количества x. Итакъ, изслѣдованію подлежитъ выраженіе

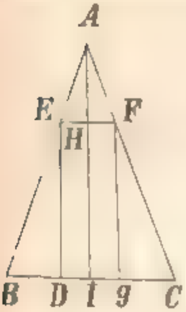
$$y = (x - R)^2 + \frac{29}{9} R^2,$$

представляющее квадратный триномъ, въ которомъ x нужно измѣнять отъ $-R$ до $+R$. Изъ этого выраженія видно, что по мѣрѣ уменьшенія абсолютной величины бинома $x - R$, и y будетъ идти уменьшаясь, слѣд. достигаетъ minimum'а при $x = R$; такимъ образомъ имѣемъ таблицу:

$$\begin{array}{c|l} x & -R \cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot \quad 0 \quad \cdot\cdot\cdot < \cdot\cdot\cdot + R \\ y & \frac{65}{9} R^2 \cdot\cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot \frac{38}{9} R^2 \cdot\cdot\cdot > \cdot\cdot\cdot \frac{29}{9} R^2. \end{array}$$

Слѣд. y имѣетъ *minimum* $\frac{29}{9} R^2$ при $x = +R$. Такимъ образомъ, при движеніи точки отъ B къ A по верхней полуокружности, функція y, начиная съ своего *минимальнаго значенія* $\frac{29}{9} R^2$, увеличивается до *maximum'a* $\frac{65}{9} R^2$, котораго она достигаетъ, когда точка приходитъ въ A; затѣмъ, при движеніи точки по нижней полуокружности, функція уменьшается до $\frac{29}{9} R^2$.

634. Примѣръ II. *Въ прямой круглый конусъ вписанъ цилиндръ; найти, при какихъ размѣрахъ полная поверхность ея будетъ maxima или minima?*



Черт. 115.

Пусть будетъ r радіусъ основанія конуса, h — его высота. Назовемъ радіусъ основанія ID цилиндра буквою x, высоту его IH буквою y. Изъ подобія △-ковъ AEH и ABI находимъ связь между x и y, выражаемую пропорціей:

$$EH : BI = AH : AI, \quad \text{или} \quad x : r = (h - y) : h,$$

откуда

$$y = \frac{h(r - x)}{r}.$$

Полная поверхность S цилиндра выражается формулою: $2\pi . DI^2 + 2\pi . DI . IH$, или $2\pi(x^2 + xy)$, или, замѣняя y его величиною:

$$S = \frac{2\pi}{r} [(r - h)x^2 + hrx] \ . \ . \ . \ (1)$$

Въ данномъ вопросѣ радіусъ x основанія цилиндра можетъ измѣняться только отъ 0 до r. Припоминая № 585, замѣчаемъ, что смыслъ измѣненій квадратнаго тринома зависитъ отъ знака коэффиціента при x^2; слѣд. надо различать 3 случая: $r > h$, $r = h$, $r < h$.

I. $r > h$ (конусъ сплюснутый). Въ этомъ случаѣ, представивъ триномъ

$(r-h)x^2+hrx$ въ видѣ $(r-h)\left[\left(x+\frac{hr}{2(r-h)}\right)^2-\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}\right]$, имѣемъ слѣдующую таблицу измѣненій:

$$\begin{array}{r|l}
x & -\infty\cdots<\cdots<\cdots-\frac{hr}{2(r-h)}\cdots<\cdots<\cdots+\infty \\
\left(x+\frac{hr}{2(r-h)}\right)^2-\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2} & +\infty\cdots>\cdots>\cdots-\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}\cdots<\cdots<\cdots+\infty \\
S & +\infty\cdots>\cdots>\cdots-\frac{\pi h^2r}{2(r-h)}\cdots<\cdots<\cdots+\infty
\end{array}$$

Заключаемъ, что когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{-hr}{2(r-h)}$, функція S уменьшается, а затѣмъ увеличивается, когда x возрастаетъ отъ $\frac{hr}{2(r-h)}$ до $+\infty$. Но какъ количество $\frac{hr}{2(r-h)}$ отрицательно, то изъ таблицы видимъ, что измѣненіямъ x въ области отъ 0 до r отвѣчаетъ возрастаніе функціи S. Слѣд. когда $r>h$, полная поверхность цилиндра увеличивается по мѣрѣ увеличенія радіуса основанія цилиндра. При $x=0$, и $S=0$; при $x=r$, $S=2\pi r^2$; такъ что S увеличивается отъ 0 до $2\pi r^2$; и въ самомъ дѣлѣ, при $x=0$, цилиндръ обращается въ прямую AI; при $x=r$, боковая поверхность обращается въ 0, полная же поверхность приводится къ суммѣ двухъ круговъ радіуса $BI=r$.

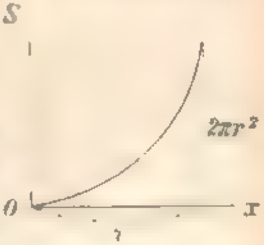
Таблица измѣненій функціи S приводится къ слѣдующей части предыдущей таблицы:

$$r>h\quad\begin{array}{c|l}
x & 0 \text{ возрастаетъ до } r \\
S & 0 \text{ возрастаетъ до } 2\pi r^2.
\end{array}$$

II. $r=h$. Триномъ приводится къ hrx, и $S=2\pi rx$, откуда непосредственно видно, что при возрастаніи x отъ 0 до r, S увеличивается отъ 0 до $2\pi r^2$. Таблица измѣненій та же, что и для случая I.

Въ обоихъ случаяхъ функція имѣетъ: абсолютный minimum, равный 0, и абсолютный maximum $=2\pi r^2$.

Въ обоихъ случаяхъ кривая, изображающая ходъ измѣненій функціи, такова, какъ представляетъ черт. 116, гдѣ на оси Ox представлены измѣненія x отъ 0 до r, а измѣненія S представлены ординатами кривой. Эта кривая есть часть параболы, отверстіемъ обращенная вверхъ.



Черт. 116.

III. $r<h$ (конусъ вытянутый). Въ этомъ случаѣ множитель $r-h$ отрицателенъ, и таблица измѣненій функціи S такова:

$$\begin{array}{r|l}
x & -\infty\cdots<\cdots<\cdots-\frac{hr}{2(r-h)}\cdots<\cdots<\cdots+\infty \\
\left(x+\frac{hr}{2(h-r)}\right)^2-\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2} & +\infty\cdots>\cdots>\cdots\frac{h^2r^2}{4(r-h)^2}\cdots<\cdots<\cdots+\infty \\
S & -\infty\cdots<\cdots<\cdots\frac{\pi h^2r}{2(h-r)}\cdots>\cdots>\cdots-\infty
\end{array}$$

Такимъ образомъ функція S сначала увеличивается до $\frac{\pi h^2r}{2(h-r)}$, а потомъ уменьшается; слѣд. имѣетъ maximum при $x = \frac{hr}{2(h-r)}$. Хотя это количество положительно, но оно можетъ быть или $> r$, или $< r$; между тѣмъ какъ въ данномъ вопросѣ x измѣняется только отъ 0 до r. Посмотримъ, при какой зависимости между r и h, это значеніе x будетъ $\geqslant r$. Положивъ

$$\frac{hr}{2(h-r)} \geqslant r, \quad \text{или} \quad \frac{h}{2(h-r)} \geqslant 1,$$

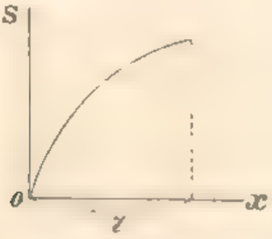
и умноживъ обѣ части на $h - r$ (большее 0), найдемъ: $h > 2h - 2r$, или $h < 2r$.

1) Пусть $r < h < 2r$. Въ этомъ случаѣ x, возрастая отъ 0 до r, всегда будетъ меньше $\frac{hr}{2(h-r)}$, а слѣдовательно, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, полная поверхность цилиндра идетъ увеличиваясь. Изслѣдованіе даетъ таблицу:

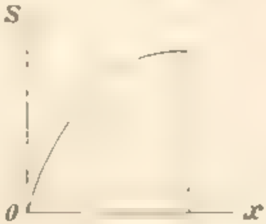
$$r < h < 2r \quad \begin{array}{c|l} x & 0 \;\cdots < \cdots \quad \cdots \quad \cdots < \cdots\; r \\ S & 0 \;\cdots < \cdots\cdots\cdots\cdots < \cdots\; 2\pi r^2, \end{array}$$

а кривая, изображающая эти измѣненія, есть часть параболы, отверстіе которой обращено внизъ (черт. 117).

2) Пусть $h = 2r$. Полусумма корней въ этомъ случаѣ равна r, триномъ достигаетъ maximum'а при $x = r$; таблица измѣненій — таже, какъ только что указано; кривая измѣненій — таже, съ тою лишь разницею, что точка кривой, имѣющая абсциссу r, есть вершина параболы (черт. 118).



Черт. 117.



Черт. 118.

3) Пусть, наконецъ, $\frac{hr}{2(h-r)} < r$, или $h > 2r$. Въ этомъ случаѣ x, возрастая отъ 0 до r, проходитъ чрезъ значеніе $\frac{hr}{2(h-r)}$; слѣд. полная поверхность S цилиндра, начиная съ нуля, возрастаетъ, достигаетъ maximum'а при

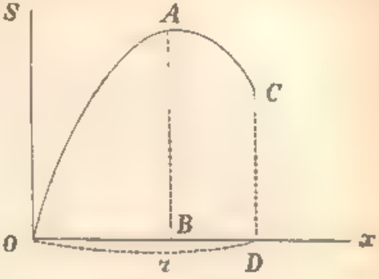
$$x = \frac{hr}{2(h-r)},$$

затѣмъ, при возрастаніи x до r, идетъ, уменьшаясь.

Максимальное значеніе S, при $x = \frac{hr}{2(h-r)}$, равно $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$; значеніе S при $x = r$ есть $2\pi r^2$. Таблица измѣненій такова:

$$h > 2r \quad \begin{array}{cl} x & 0 \cdots\cdots < \cdots \frac{hr}{2(h-r)} \cdots < \cdots\; r \\ S & 0 \cdots\cdots < \cdots \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)} \cdots > \cdots\; 2\pi r^2. \end{array}$$

Измѣненія эти выражаются дугою параболы, обращенной отверстіемъ внизъ, причемъ ордината вершины есть $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$.



Черт. 119.

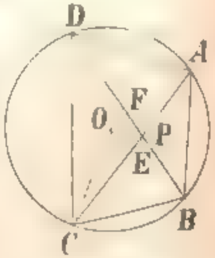
На чертежѣ

$$AB = \frac{\pi h^2 r}{2(h-r)};\quad CD = 2\pi r^2;$$

$$OB = \frac{hr}{2(h-r)};\quad OD = r.$$

Итакъ: когда $h \leqslant 2r$, полная поверхность S цилиндра принимаетъ одинъ, и только одинъ, разъ каждое значеніе, содержащееся между 0 и $2\pi r^2$, не дѣлаясь больше $2\pi r^2$. Но при $h > 2r$, S принимаетъ однажды всякое значеніе между 0 и $2\pi r^2$; дважды всякую величину, содержащуюся между $2\pi r^2$ и $\frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$, и не дѣлается больше $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$.

635. Примѣръ III. *Черезъ данную точку* P *внутри окружности* O *провести двѣ взаимно перпендикулярныя хорды* AC *и* BD *такъ, чтобы площадь четыреугольника* ABCD *была maxima или minima.*



Черт. 120.

Пусть $OP = a$ и пусть $OF = x$ перемѣнное разстояніе хорды BD отъ центра.

Площадь $\triangle DAB = \frac{1}{2} DB \times AP$, $\triangle BCD = \frac{1}{2} DB \times CP$; складывая, найдемъ, что площадь y четыреугольника ABCD равна $\frac{1}{2} DB \times AC$, или, если перпендикуляръ изъ центра на хорду AC встрѣчаетъ ее въ точкѣ E, можемъ написать:

$$y = 2DF \times CE;\quad \text{но}\quad DF = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$CE = \sqrt{R^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - (a^2 - x^2)};$$

слѣдовательно $$y = 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - a^2 + x^2)}.$$

Но y величина положительная, а потому ея maximum или minimum будутъ имѣть мѣсто при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и maximum или minimum квадрата функціи y:

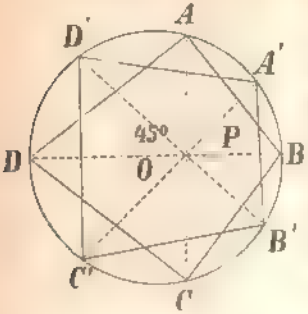
$$y^2 = -4x^4 + 4a^2x^2 + 4R^2(R^2 - a^2).$$

Вопросъ приведенъ къ изслѣдованію измѣненій биквадратнаго тринома, которому въ этихъ цѣляхъ даемъ видъ:

$$y^2 = -4\left[\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 - \left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right]$$

Отсюда видно, что когда x увеличивается отъ нуля до $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, количество y^2 идетъ возрастая; когда же x продолжаетъ увеличиваться отъ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ до a,

y^2 уменьшается; слѣд. количество y^2, а слѣд. и y имѣетъ *maximum*, когда обѣ хорды одинаково наклонены къ діаметру OP; самый maximum y-ка равенъ $2R^2 - a^2$.



Черт. 121.

Затѣмъ, такъ какъ площадь уменьшается когда x возрастаетъ отъ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ до a, т.-е. до того момента, когда хорда BD становится перпендикулярна къ діаметру OP, то ясно, что если эта хорда будетъ продолжать вращаться около точки P, площадь послѣдовательно пройдетъ черезъ всѣ предшествовавшія состоянія, сл. достигнетъ minimum'а, когда одна изъ хордъ совпадетъ съ діаметромъ OP; самый minimum $= 2R\sqrt{R^2 - a^2}$.

Резюме: когда прямой уголъ совершаетъ полный оборотъ около точки P, площадь четыреугольника проходитъ дважды чрезъ maximum, равный A'B'C'D' и дважды чрезъ minimum, равный ABCD.

636. Непрямой способъ. Сущность этого метода, предложеннаго *Симономъ Люилье*, можно резюмировать такъ: пусть будетъ y нѣкоторая функція перемѣннаго x, maximum или minimum которой мы желаемъ найти. Съ этою цѣлью предложимъ себѣ найти, какъ нужно взять x, чтобы функція имѣла данную величину m, которую на время оставляемъ произвольною; рѣшая эту вспомогательную задачу, мы получимъ ур—ніе въ x; и если это ур—ніе будетъ такое, которое мы можемъ рѣшить (напрм. квадратное, биквадратное), то опредѣляя условія возможности вопроса, мы и найдемъ предѣлы неопредѣленнаго количества m; эти предѣлы вообще и будутъ maximum или minimum m, т. е. функціи.

Такимъ образомъ здѣсь maxima и minima опредѣляются не прямо, а *косвенно*, какъ результаты изслѣдованія условій возможности вопроса. Примѣры этого рода мы имѣли въ главѣ XLI. Вотъ еще примѣры примѣненія косвеннаго метода.

637. Вопросъ. *Найти maximum и minimum квадратнаго тринома* $ax^2 + bx + c$.

Положимъ $ax^2 + bx + c = m$, гдѣ m произвольное количество, рѣшаемъ это ур—ніе относительно x; найдемъ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a} \quad \ldots (1).$$

Мы ищемъ дѣйствительныя значенія перемѣннаго x, при которыхъ триномъ получаетъ данное значеніе m; но чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательно: слѣд. триномъ можетъ получать только такія дѣйствительныя значенія m, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$b^2 - 4ac + 4am \geqslant 0, \quad \text{или} \quad 4am \geqslant 4ac - b^2.$$

Для опредѣленія отсюда предѣла для m, придется обѣ части неравенства дѣлить на $4a$, причемъ отъ знака a будетъ зависѣть или сохраненіе знака неравенства, или перемѣна его на обратный. Отсюда два случая:

I. $a > 0$. Въ этомъ случаѣ дѣля на $4a$, мы не измѣнимъ смысла неравенства, и получимъ:

$$m \geqq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

т.-е. m не можетъ быть меньше $\frac{4ac - b^2}{4a}$, слѣд. *minimum количества m равенъ* $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Подставляя это значеніе m въ формулу (1), находимъ соотвѣтствующее значеніе независимаго перемѣннаго: $x = -\frac{b}{2a}$.

II. $a < 0$. Въ этомъ случаѣ дѣля на $4a$, измѣнимъ знакъ неравенства, и получимъ:

$$m \leqq \frac{4ac - b^2}{4a},$$

т.-е. m должно быть меньше и, въ крайнемъ случаѣ, равно $\frac{4ac - b^2}{4a}$; слѣдов. $\frac{4ac - b^2}{4a}$ есть *maximum* тринома. Соотвѣтствующее значеніе x выражается опять формулою $x = -\frac{b}{2a}$. Итакъ

При $a > 0$ триномъ имѣетъ minimum, при $a < 0$ онъ имѣетъ maximum; maximum и minimum выражаются формулою $\frac{4ac - b^2}{4a}$; *а соотвѣтствующія значенія независимаго перемѣннаго формулою:* $x = -\frac{b}{2a}$.

Найденное значеніе $\frac{4ac - b^2}{4a}$ представляетъ, такимъ образомъ, наибольшее или наименьшее значеніе функціи; но пока не видно, чтобы это были maximum или minimum относительные. Нужно еще доказать это, т.-е. доказать, что наприм. найденное минимальное значеніе тринома дѣйствительно меньше двухъ смежныхъ съ нимъ значеній функціи. Для этого мы должны вычислить два значенія тринома, которыя онъ имѣетъ при двухъ значеніяхъ x: одномъ, немного меньшемъ $-\frac{b}{2a}$, другомъ, немного большемъ $-\frac{b}{2a}$. Называя буквою h абсолютную величину нѣкотораго весьма малаго количества, вычислимъ величины тринома при $x = -\frac{b}{2a} - h$ и при $x = -\frac{b}{2a} + h$. Приведя триномъ къ виду

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

подставляемъ сюда сначала $-\frac{b}{2a} - h$, потомъ $-\frac{b}{2a} + h$ вмѣсто x; въ обоихъ случаяхъ находимъ, что триномъ беретъ видъ

$$P = \frac{4ac - b^2}{4a} + ah^2.$$

Замѣчая, что 1) при $a > 0$, ah^2 величина существенно положительная, находимъ, что $P > \frac{4ac - b^2}{4a}$, т.-е. что дробь $\frac{4ac - b^2}{4a}$ меньше двухъ сосѣднихъ съ нею значеній тринома: дробь эта, слѣдоват., дѣйствительно представляетъ относительный минимумъ функціи; 2) при $a < 0$, ah^2 есть количество существенно отрицательное, а потому въ этомъ случаѣ $P < \frac{4ac - b^2}{4a}$, и слѣд, дробь $\frac{4ac - b^2}{4a}$ больше двухъ смежныхъ съ нею значенiй тринома, т.-е. представляетъ относительный максимумъ функцiи.

Результаты эти вполнѣ согласны съ выводами § 585.

638. Примѣръ I. *Найти maximum или minimum тринома*

$$2x^2 - 5x + 7.$$

Положивъ $2x^2 - 5x + 7 = m$ и рѣшивъ относительно x уравненiе

$$2x^2 - 5x + 7 - m = 0,$$

имѣемъ

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8(7 - m)}}{4}.$$

Для дѣйствительности x необходимо, чтобы было $25 - 8(7 - m) \geqslant 0$, или $-31 + 8m \geqslant 0$, откуда $m \geqslant \frac{31}{8}$.

Заключаемъ, что m не должно быть меньше $\frac{31}{8}$, сл. $min.\ (m) = \frac{31}{8}$, а соотвѣтствующее значенiе $x = \frac{5}{4}$.

Для провѣрки беремъ $x = \frac{5}{4} \pm h$, гдѣ h безконечно-мало, и при этомъ значенiи x находимъ величину тринома, именно: $2\left(\frac{5}{4} \pm h\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4} \pm h\right) + 7$ или, по упрощенiи, $\frac{31}{8} + 2h^2$. Итакъ, при двухъ значенiяхъ x, смежныхъ съ $\frac{5}{4}$, триномъ получаетъ величины, большiя $\frac{31}{8}$, ибо $2h^2$ — положительно; слѣдов. $\frac{31}{8}$ есть дѣйствительно minimum тринома.

639. Примѣръ II. *Найти maximum и minimum функцiи*

$$cx^2 - b(a - x)^2.$$

Приравнявъ это выраженiе m, расположивъ по степенямъ x и собравъ всѣ члены въ первую часть, имѣемъ ур—нiе

$$(c - b)x^2 + 2abx - (a^2b + m) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 + (c - b)(a^2b + m)}}{c - b}.$$

Для дѣйствительности x необходимо, чтобы m удовлетворяло неравенству $a^2b^2 + (c - b)(a^2b + m) \geqslant 0$, или $(c - b)m + a^2bc \geqslant 0$. Рѣшая это неравенство, различаемъ два случая:

1) Если $c - b > 0$, то $m \geqslant \frac{a^2bc}{b - c}$, откуда minimum $(m) = \frac{a^2bc}{b - c}$, а соотвѣтствующее значенiе x есть $x = \frac{ab}{b - c}$.

2) Если $c - b < 0$, то $m \leqslant \frac{a^2bc}{b-c}$ откуда maximum $(m) = \frac{a^2bc}{b-c}$, а $x = \frac{ab}{b-c}$.

Для повѣрки подставляемъ въ данное выраженіе вмѣсто x два значенія, смежныя съ $\frac{ab}{b-c}$, именно $\frac{ab}{b-c} \pm h$; находимъ:

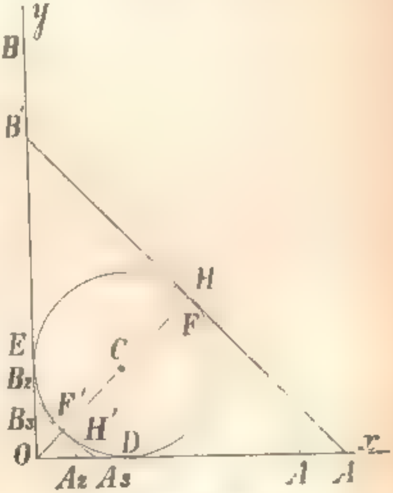
$$c\left(\frac{ab}{b-c} \pm h\right)^2 - b\left(a - \frac{ab}{b-c} \pm h\right)^2,$$

или, по упрощеніи, $\frac{a^2bc}{b-c} + (c-b)h^2$. При $c - b > 0$, членъ $(c-b)h^2$ существенно положителенъ; а это значитъ, что при x смежныхъ съ $\frac{ab}{b-c}$ триномъ больше, нежели $\frac{a^2bc}{b-c}$: послѣднее выраженіе есть, слѣдоват., minimum тринома. При $c - b < 0$, членъ $(c-b)h^2$ отрицателенъ; это значитъ, что величины тринома при x смежныхъ съ $\frac{ab}{b-c}$ меньше $\frac{a^2bc}{b-c}$; слѣдов. эта дробь есть maximum тринома.

640. Примѣръ III. *Данъ кругъ радіуса* R, *вписанный въ прямомъ углѣ. Провести къ этому кругу касательную такъ, чтобы площадь отсѣкаемаго ею въ углѣ треугольника* AOB *была minima.*

Пусть $OA = x$, $OB = y$. Площадь Δ $AOB = \frac{1}{2}xy$; чтобы представить ее въ функціи одного перемѣннаго, выразимъ, что прямая AB касательна къ кругу C; имѣемъ $AB = BF + FA = BE + AD = y - R + x - R = x + y - 2R$; съ другой стороны, такъ какъ $AB^2 = x^2 + y^2$, связь между x и y будетъ: $(x + y - 2R)^2 = x^2 + y^2$. Итакъ, ур—нія задачи суть (называя площадь Δ AOB чрезъ m^2):

$$xy = 2m^2, \quad 2R(x + y) = xy + 2R^2.$$



Черт. 122.

Подставляя во второе ур—ніе вмѣсто xy его величину $2m^2$, имѣемъ:

$$xy = 2m^2 \quad \text{и} \quad x + y = \frac{m^2 + R^2}{R};$$

такимъ образомъ видно, что неизвѣстныя x и y суть корни ур—нія

$$X^2 - \frac{m^2 + R^2}{R}X + 2m^2 = 0,$$

откуда

$$X = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{m^2 + R^2}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{m^2 + R^2}{2R}\right)^2 - 2m^2} = \frac{m^2 + R^2 \pm \sqrt{m^4 - 6R^2m^2 + R^4}}{2R}$$

Для дѣйствительности x и y необходимо, чтобы было

$$m^4 - 6R^2m^2 + R^4 \geq 0, \quad \text{или} \quad [m^2 - R^2(3 + \sqrt{8})][m^2 - R^2(3 - \sqrt{8})] \geq 0.$$

Это неравенство будетъ удовлетворено, если количеству m^2 дадимъ значенія, лежащія внѣ корней тринома, т.-е.: 1) значенія, содержащіяся между 0 и $R^2(3 - 2\sqrt{2})$; 2) значенія, большія $R^2(3 + 2\sqrt{2})$. Maximum значеній перваго ряда есть $R^2(3 - 2\sqrt{2})$; minimum значеній второго ряда равенъ $R^2(3 + 2\sqrt{2})$.

Что касается minimum'a, то значенія x и y, ему соотвѣтствующія, суть: $x = y = \frac{m^2 + R^2}{2R} = R(2 + \sqrt{2})$. Равенство x и y показываетъ, что Δ минимальной площади есть равнобедренный прямоугольный Δ AOB', котораго гипотенуза есть касательная AB въ конечной точкѣ діаметра-биссектора OCH даннаго угла.

Что касается maximum'a $R^2(3 - 2\sqrt{2})$, то онъ не можетъ соотвѣтствовать треугольникамъ, образуемымъ касательными, проводимыми къ дугѣ EHD, ибо площади этихъ треугольниковъ измѣняются отъ $+\infty$ до $+\infty$, слѣд. не имѣютъ maximum'a; съ другой стороны, и самая величина maximum'a, $R^2(3 - 2\sqrt{2})$, меньше R^2. Онъ соотвѣтствуетъ треугольникамъ, образуемымъ касательными къ дугѣ DHE. Въ самомъ дѣлѣ, площади этихъ треугольниковъ измѣняются отъ 0 до 0 и слѣд. имѣютъ maximum. Обозначивъ: $OA_2 = x$, $OB_2 = y$, имѣемъ: $A_2B_2 = EB_2 + DA_2 = R - x + R - y = 2R - x - y$, и ур—нія этой новой задачи будутъ:

$$xy = 2m^2, \quad x^2 + y^2 = (2R - x - y)^2;$$

они не отличаются отъ ур—ній предыдущей задачи, и изслѣдуя подрадикальный триномъ, мы должны были, на ряду съ minimum'омъ первой серіи Δ-ковъ, найти и maximum второй серіи.

641. Примѣръ IV. *Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты h* (опущенной на гипотенузу) *у какого периметръ имѣетъ наименьшую величину?*

Пусть будутъ: x и y — катеты, z — гипотенуза и $2p$ — периметръ треугольника; ур—нія задачи суть:

$$x + y + z = 2p, \quad xy = hz, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Изъ перваго: $x + y = 2p - z$, или $(x + y)^2 = (2p - z)^2$; затѣмъ, придавая къ третьему удвоенное второе, имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2hz, \quad \text{или} \quad (x + y)^2 = z^2 + 2hz;$$

приравнивая оба выраженія $(x + y)^2$, имѣемъ ур—ніе въ z

$$(2p - z)^2 = z^2 + 2hz,$$

изъ котораго

$$z = \frac{2p^2}{h + 2p}.$$

Слѣдовательно

$$x + y = 2p - \frac{2p^2}{h + 2p} = \frac{2ph + 2p^2}{h + 2p} = 2p \cdot \frac{h + p}{h + 2p}; \quad xy = hz = \frac{2p^2h}{h + 2p}.$$

Итакъ, x и y суть корни квадратнаго ур—нія

$$X^2-2p\cdot\frac{h+p}{h+2p}\cdot X+\frac{2hp^2}{h+2p}=0.$$

Изъ него

$$X=\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}=p\cdot\frac{h+p}{h+2p}\pm\sqrt{p^2\cdot\left(\frac{h+p}{h+2p}\right)^2-\frac{2hp^2}{h+2p}},$$

а какъ подрадикальное выраженіе приводится къ $\frac{p^2}{(h+2p)^2}(p^2-h^2-2hp)$, то

$$X=\frac{p}{h+2p}(h+p\pm\sqrt{p^2-h^2-2ph}).$$

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы p удовлетворяло неравенству $p^2-2ph-h^2\geqslant 0$, или

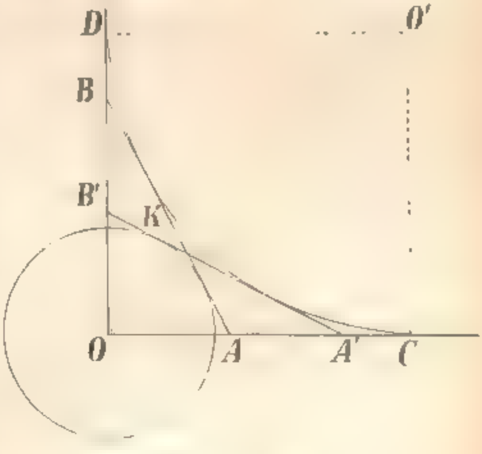
$$[p-h(1+\sqrt{2})]\,.\,[p-h(1-\sqrt{2})]\geqslant 0.$$

Отсюда извѣстнымъ образомъ заключаемъ, что неравенство удовлетворяется двумя серіями значеній p, а именно: 1) всѣми $p<h(1-\sqrt{2})$; 2) всѣми $p>h(1+\sqrt{2})$; слѣд. $h(1-\sqrt{2})$ есть maximum p, а $h(1+\sqrt{2})$ minimum p.

Что касается minimum'а, равнаго $h(1+\sqrt{2})$, то отвѣчающія ему значенія x и y суть:

$$x=y=\frac{h(1+\sqrt{2})\,h(2+\sqrt{2})}{h(3+2\sqrt{2})}=h\frac{4+3\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=h\sqrt{2}.$$

Слѣд. *изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты, равнобедренный имѣетъ наименьшій периметръ.*



Черт. 123.

Что касается найденнаго maximum'а, то, будучи отрицательнымъ, онъ не можетъ относиться къ данному геометрическому вопросу. Но замѣчая, что при $p=h(1-\sqrt{2})$, количества x и y отрицательны, а z положительно, мы, перемѣнивъ въ ур—яхъ вопроса знаки количества x, y и p, найдемъ уравненія:

$$x+y-z=-2p,\quad xy=hz.$$
$$x^2+y^2=z^2$$

Этимъ ур—ямъ отвѣчаетъ вопросъ: Изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковой высоты h у какого избытокъ суммы катетовъ надъ гипотенузою будетъ наименьшій? Рѣшивъ этотъ вопросъ, найдемъ, что искомый треугольникъ есть равнобедренный, и что minimum половины избытка дается абсолютною величиною отрицательнаго maximum'а предыдущей задачи.

Примѣчаніе. Если бы требовалось изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ одинаковаго периметра найти такой, котораго высота, опущенная на гипотенузу, была бы наибольшая; тогда p была бы величина данная и нужно бы было найти h, удовлетворяющія неравенству

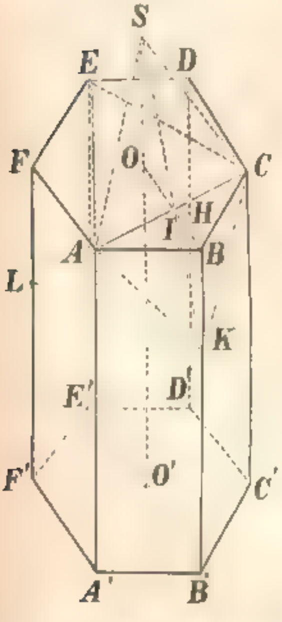
$$h^2 + 2ph - p^2 \leqslant 0, \quad \text{или} \quad [h - p(\sqrt{2} - 1)][h + p(1 + \sqrt{2})] \leqslant 0.$$

Отсюда нашли бы, что maximum $(h) = p(\sqrt{2} - 1)$; соотвѣтствующія значенія x и y равны между собою, и общая величина ихъ есть

$$x = y = p \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = p(2 - \sqrt{2}).$$

Эти результаты легко найти геометрически. Извѣстно, что для построенія прямоугольнаго треугольника по даннымъ: периметру и высотѣ на гипотенузу, откладываютъ на сторонахъ прямого угла $OC = OD = p$; возставляютъ въ точкахъ C и D перпендикуляры, которыхъ пересѣченіе опредѣляетъ центръ O' круга, внѣ-вписаннаго въ искомомъ $\Delta\, AOB$; изъ точки O какъ изъ центра радіусомъ Ok, равнымъ высотѣ, описываютъ другой кругъ. Гипотенуза AB должна быть касательною къ обоимъ кругамъ O и O'. Слѣд. вообще задача имѣетъ два рѣшенія одинаковыя, ибо тр—ки OAB и $OA'B'$ равны, такъ какъ $OA = OB'$ и $OA' = OB$.

Задача возможна, когда обѣ окружности лежатъ одна внѣ другой; для того, чтобы онѣ были касательны, необходимо чтобы $OO' = h + p$, а какъ $OO' = p\sqrt{2}$, то $h + p = p\sqrt{2}$, или $h = p(\sqrt{2} - 1)$. Если h будетъ имѣть большую величину, окружности пересѣкутся, и задача станетъ невозможна.



Черт. 124.

642. Примѣръ V. *Задача о пчелиныхъ ячейкахъ.* На продолженіи оси OO' правильной шестиугольной призмы возьмемъ точку S; чрезъ эту точку и чрезъ каждую изъ сторонъ правильнаго треугольника ACE, полученнаго соединеніемъ чрезъ одну вершинъ верхняго основанія призмы, проведемъ три плоскости, по которымъ отрѣжемъ отъ призмы три тетраэдра $BACK$, $DCEH$ и $FEAL$ и замѣнимъ ихъ однимъ театраэдромъ $SACE$, поставленнымъ надъ призмой. Новый многогранникъ будетъ ограниченъ сверху тремя ромбами $SAKC$, $SCEH$, $SEAL$; объемъ его всегда равенъ объему взятой призмы, гдѣ бы ни взять точку S на оси, ибо пирамида $SACE$ составлена изъ трехъ пирамидъ $SOAC$, $SOCE$ и $SOEA$, соотвѣтственно равныхъ тремъ отрѣзаннымъ пирамидамъ; такъ пирамида $SOAC$ = пир. $KABC$, ибо они имѣютъ равныя основанія ($\Delta OAC = \Delta ABC$, какъ половины ромба $ABCO$) и равныя высоты SO и KB (по равенству прямоугольныхъ треугольниковъ SOI и KBI). Имѣя равные объемы, многогранники имѣютъ, однако, различныя поверхности, и *задача состоитъ въ опредѣленіи точки S такъ, чтобы поверхность новаго десятигранника имѣла наименьшую величину.*

Пусть $AB = a$, $BB' = OO' = b$, $BK = SO = x$; въ такомъ случаѣ: $AC = a\sqrt{3}$;

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2};\ \text{слѣд.}\ SK = \sqrt{4x^2 + a^2};$$

площадь ромба $SAKC$, равная полупроизведенію діагоналей AC и SK, выразится формулою $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$; площадь трапеціи $CKB'C'$—формулою $\frac{1}{2}a(2b - x)$. Слѣдоват., поверхность многогранника, не считая основанія, выражается формулою $\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b - x)$, или $3a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x\right]$. Постоянный множитель $3a$ не вліяетъ на условія max и min., и потому вопросъ приводится къ опредѣленію minimum'а скобочнаго выраженія. Положивъ

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x = m$$

и освободивъ это ур—ніе отъ радикала, найдемъ

$$8x^2 - 8(m - 2b)x + 3a^2 - 4(m - 2b)^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2(m - 2b) \pm \sqrt{6[2(m - 2b)^2 - a^2]}}{4}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было

$$2(m - 2b)^2 - a^2 \geq 0, \quad \text{или} \quad (m - 2b)^2 \geq \frac{a^2}{2}, \quad \text{или} \quad m - 2b \geq \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда minim. $(m) = 2b + \frac{a}{\sqrt{2}}$. Помноживъ на $3a$, найдемъ, что искомая минимальная поверхность $=$

$$6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

а соотвѣтствующая величина $x = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Формула для x показываетъ, что разность двухъ смежныхъ боковыхъ реберъ должна быть — четверти діагонали квадрата, построеннаго на сторонѣ шестиугольника, служащаго основаніемъ призмы.

Поверхность призмы, не считая основанія, была бы $6ab + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; слѣд. поверхность многогранника минимальной поверхности меньше на $\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ поверхности шестиугольной призмы, имѣющей то же основаніе и тотъ же объемъ.

Легко видѣть, что для треугольника KBI имѣетъ мѣсто пропорція

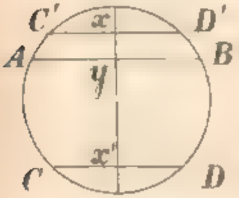
$$BK : BI : IK = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3},$$

откуда (при помощи тригонометріи) найдемъ, что уголъ $BIK = 35°15'52''$.

Примѣчаніе. Пчелы строятъ ячейки своихъ сотовъ именно въ формѣ такихъ десятигранниковъ съ минимальною поверхностью; шестиугольникъ образуетъ входъ въ ячейку; медъ кладется на дно; пчелы строятъ сначала ромбы, затѣмъ боковыя трапеціи. Если вообразить себѣ плоскость, заполненную шестиугольниками и построить на каждомъ изъ нихъ ячейку, то вершины ячеекъ будутъ находиться всѣ въ одной плоскости, параллельной первой. Затѣмъ, если къ такой фигурѣ приложить другую выпуклостями во впадины первой, получимъ совокупность ячеекъ, называемую *сотомъ*. Улей наполняется сотами, помѣщенными другъ надъ другомъ такъ, чтобы двѣ пчелы могли вмѣстѣ пройти между двумя послѣдовательными сотами.

Итакъ: 1) наклоненіе трехъ ромбовъ, образующихъ дно, таково, что ячейки при данномъ объемѣ имѣютъ минимальную поверхность; 2) правильный треугольникъ, квадратъ и правильный шестиугольникъ суть единственные правильные многоугольники, которыми можно заполнить плоскость безъ просвѣтовъ, и изъ нихъ шестиугольникъ, при той же площади, имѣетъ наименьшій контуръ. Такимъ образомъ является двойная экономія на воскѣ. — Геометрическое строеніе пчелиныхъ ячеекъ, замѣченное еще Паппусомъ, геометромъ IV вѣка до Р. Х., было изучаемо сначала Филиппомъ Маральди (1712 г.), затѣмъ Реомюромъ, который и предложилъ вопросъ о минимумѣ Самуилу Кенигу и Маклорену. Послѣдній впервые далъ точное теоретическое рѣшеніе вопроса. Для угла ромба Кенигъ нашелъ 109°26′ вмѣсто 109°28′16″.

643. Примѣръ VI. *Зная сумму 2a двухъ параллельныхъ хордъ круга радіуса R, опредѣлить ихъ положеніе такъ, чтобы разстояніе этихъ хордъ имѣло наибольшую или наименьшую величину.*



Черт. 125.

Пусть длины параллельныхъ полухордъ будутъ x и y; прямо имѣемъ, назвавъ разстояніе между ними буквою m:

$$\sqrt{R^2 - x^2} \pm \sqrt{R^2 - y^2} = m,$$

гдѣ знакъ (+) относится къ случаю, когда хорды расположены по обѣ, а (−) по одну сторону центра. Затѣмъ, по условію:

$$x + y = a.$$

Возвышая обѣ части перваго ур—нія въ квадратъ, имѣемъ:

$$2R^2 - (x^2 + y^2) \pm 2\sqrt{(R^2 - x^2)(R^2 - y^2)} = m^2,$$

или

$$(m^2 - 2R^2 + x^2 + y^2)^2 = 4(R^2 - x^2)(R^2 - y^2).$$

Раскрывая и дѣлая приведеніе, имѣемъ:

$$m^4 + (x^2 + y^2)^2 - 4m^2R^2 + 2m^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2.$$

Изъ второго ур—нія находимъ: $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$; слѣд.

$$m^4 + (a^2 - 2xy)^2 - 4m^2R^2 + 2m^2(a^2 - 2xy) = 4x^2y^2,$$

откуда

$$xy = \frac{(m^2 + a^2)^2 - 4m^2R^2}{4(a^2 + m^2)}$$

По произведенію и суммѣ x и y можемъ выразить эти количества какъ корни квадратнаго ур—нія

$$u^2-au+\frac{(m^2+a^2)^2-4m^2R^2}{4(a^2+m^2)}=0.$$

Условіе дѣйствительности корней таково:

$a^2(a^2+m^2)-(m^2+a^2)^2+4m^2R^2>0$, или $m^2(-m^2-a^2+4R^2)>$

Такъ какъ по свойству геометрическаго вопроса $a^2<4R^2$, то предыдущее неравенство можно написать такъ:

$$(\sqrt{4R^2-a^2}-m)(\sqrt{4R^2-a^2}+m)\geqslant 0\ .\ .\ .\ (1)$$

Когда $m>0$, изъ неравенства (1) находимъ: $m\leqslant\sqrt{4R^2-a^2}$, сл. maximum (m) $=\sqrt{4R^2-a^2}$, а соотвѣтствующія значенія x и y суть $x=y=\frac{a}{2}$. Очевидно, этотъ maximum принадлежитъ функціи $\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R^2-y^2}$, ибо другая функція при $x=y=\frac{a}{2}$ обращается въ 0.

Когда $m<0$, неравенство (1) даетъ: $m>-\sqrt{4R^2-a^2}$, откуда minimum (m) $=-\sqrt{4R^2-a^2}$. Этотъ minimum принадлежитъ функціи $-\sqrt{R^2-x^2}$ $-\sqrt{R^2-y^2}$. Опредѣленіе minim или max. этой функціи привело бы, послѣ возвышенія въ квадратъ, къ прежнему ур—нію въ u.

Для провѣрки найденнаго maximum'а $=\sqrt{4R^2-a^2}$, которому соотвѣтствуютъ $x=y=\frac{a}{2}$, даемъ количеству $\frac{a}{2}$ безконечно малое приращеніе δ, т.-е. полагаемъ $x=\frac{a}{2}+\delta$; въ такомъ случаѣ изъ соотношенія $x+y=a$, находимъ: $y=\frac{a}{2}-\delta$; вопросъ приводится къ провѣркѣ неравенства

$$\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}+\delta\right)^2}+\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}-\delta\right)^2}<\sqrt{4R^2-a^2}.$$

Такъ какъ обѣ части этого неравенства положительны, то возвысивъ въ квадратъ, замѣняемъ эквивалентнымъ ему неравенствомъ

$$4\sqrt{\left[R^2-\left(\frac{a}{2}+\delta\right)^2\right]\left[R^2-\left(\frac{a}{2}-\delta\right)^2\right]}<4R^2-a^2+4\delta^2;$$

замѣчая, что $4R^2-a^2$ положительно, можемъ еще разъ возвысить въ квадратъ, не измѣняя смысла неравенства; и по упрощеніи находимъ: $-32R^2\delta^2<+32R^2\delta^2$, что вѣрно.

644. Третій способъ. Этотъ способъ основанъ на самомъ опредѣленіи maximum'а и minimum'а функціи. Пусть данная функція есть квадратный триномъ ax^2+bx+c, и пусть она при $x=x'$ достигаетъ maximum'a; въ такомъ случаѣ, каковъ бы ни былъ знакъ произвольно-малаго количества h, должно имѣть мѣсто неравенство

$$a(x'+h)^2+b(x'+h)+c-(ax'^2+bx'+c)<0,$$

или

$$h(2ax'+b)+ah^2<0;$$

такъ какъ h *произвольно-мало,* то первая часть неравенства имѣетъ знакъ перваго члена; поэтому она будетъ мѣнять знакъ съ перемѣною знака h, и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, пока первый членъ будетъ отличенъ отъ нуля; другими словами, неравенство можетъ существовать при измѣненіи знака h только тогда, когда первый членъ будетъ тождественно $=0$, т.-е. когда $2ax'+b=0$, или $x'=-\frac{b}{2a}$. Но при этомъ значеніи x' неравенство приводится къ $ah^2<0$, и потому, чтобы оно было возможно, необходимо, чтобы было $a<0$.

Итакъ, при $a<0$ триномъ имѣетъ maximum, когда $x'=-\frac{b}{2a}$. Самый же maximum $=-\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что триномъ имѣетъ минимумъ при $x'=-\frac{b}{2a}$, если $a>0$. Самый minimum выражается тою же формулою.

Этотъ способъ, принадлежащій къ числу натуральныхъ, важенъ для насъ въ томъ отношеніи, что даетъ возможность элементарнаго опредѣленія max. и min. въ такихъ случаяхъ, въ какихъ вышеизложенные элементарные методы не примѣнимы. Найдемъ помощію этого способа

645. Maxima и minima кубичной функціи ax^3+bx^2+cx+d. Пусть x и будетъ то значеніе перемѣннаго, при которомъ функція имѣетъ maximum или minimum; въ такомъ случаѣ, называя буквою h произвольно малое приращеніе перемѣннаго x, будемъ имѣть

$$a(x+h)^3+b(x+h)^2+c(x+h)+d-(ax^3+bx^2+cx+d)\lessgtr 0,$$

гдѣ верхній знакъ неравенства относится къ случаю maximum'а, нижній — къ случаю minimum'а; по упрощеніи, найдемъ

$$(3ax^2+2bx+c)h+(3ax+b)h^2+ah^3\lessgtr 0\;.\;\;.\;\;.\;(1).$$

Пока первый членъ, при h весьма маломъ, не равенъ нулю, первая часть будетъ мѣнять знакъ вмѣстѣ съ h, и слѣд. не будетъ постоянно отрицательною, или постоянно положительною, какъ требуетъ неравенство; итакъ, значенія x, дающія maximum или minimum функціи, должны удовлетворять уравненію

$$3ax^2+2bx+c=0\;.\;\;.\;\;.\;(2).$$

Первое условіе чтобы функція имѣла max. или min., состоитъ въ томъ, чтобы корни ур—нія (2) были дѣйствительны, т.-е. чтобы $b^2-3ac>0$; но равенство $b^2-3ac=0$ необходимо исключить, ибо при немъ не м. б. ни max., ни min. Въ самомъ дѣлѣ, если $b^2-3ac=0$, корни ур—нія (2) дѣйствительные и равные и общая величина ихъ $x=-\frac{b}{3a}$, откуда $3ax+b=0$, т.-е. второй членъ нер. (1) обращается въ нуль, и первая часть этого неравенства обращается въ ah^3; поэтому разность между максимальнымъ (или минимальнымъ) значеніемъ функціи, если бы таковое существовало, и смежными ея значеніями, выражалось бы количествомъ ah^3, мѣняющимъ знакъ вмѣстѣ съ h. Итакъ, первое условіе, необходимое для того, чтобы функція имѣла max. или min., есть $b^2 - 3ac > 0$.

Пусть это условіе удовлетворяется; въ такомъ случаѣ корни ур—нія (2) будутъ дѣйствительные и неравные, и сл. будутъ отличны отъ $-\frac{b}{3a}$, т.-е. необходимо будетъ:

$$3ax' + b \lessgtr 0, \quad 3ax'' + b \lessgtr 0.$$

Пусть $x' < x''$; тогда

$$x' < -\frac{b}{3a} < x'' \quad . \quad . \quad . (3)$$

ибо $-\frac{b}{3a}$ есть полусумма корней.

Затѣмъ различаемъ два случая.

Первый случай: $a > 0$.—Неравенства (3) въ этомъ случаѣ можно представить въ видѣ:

$$3ax' < -b < 3ax'',$$

откуда

$$3ax' + b < 0 \quad \text{и} \quad 3ax'' + b > 0;$$

слѣд. каковъ бы ни былъ знакъ весьма малаго количества h, будетъ

$$(3ax' + b)h^2 + ah^3 < 0 \quad \text{и} \quad (3ax'' + b)h^2 + ah^3 > 0.$$

Первое неравенство показываетъ, что приращенія функціи при значеніяхъ x, смежныхъ съ x', отрицательны, а при значеніяхъ x, смежныхъ съ x'', положительны, слѣд.: при $x = x'$ функція имѣетъ maximum, а при $x = x''$ она имѣетъ minimum.

Второй случай $a < 0$.—Неравенства (3) въ этомъ случаѣ, по умноженіи на положит. количество $-3a$, даютъ:

$$3ax' + b > 0 \quad \text{и} \quad 3ax'' + b < 0;$$

слѣд. каковъ бы ни былъ знакъ h, имѣемъ два неравенства:

$$(3ax' + b)h^2 + ah^3 > 0 \quad \text{и} \quad (3ax'' + b)h^2 + ah^3 < 0,$$

изъ которыхъ выводимъ заключеніе, обратное предыдущему.

Отсюда *правило: чтобы найти maxima или minima кубичной функціи* $ax^3 + bx^2 + cx + d$, *приравниваемъ нулю полиномъ* $3ax^2 + 2bx + c$, *составляемый умноженіемъ каждаго члена функціи на показателя буквы* x *въ этомъ членѣ, и уменьшеніемъ этого показателя на 1* *); *так. обр. получаемъ уравненіе*

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad . \quad . \quad . (1)$$

Если $b^2 - 3ac \leqslant 0$, *функція не имѣетъ ни max., ни minimum'a; если же* $b^2 - 3ac > 0$, *меньшему корню ур—нія (1) соотвѣтствуетъ*

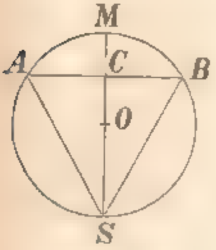
---

*) Изъ этого слѣдуетъ, что послѣднимъ членомъ новаго полинома будетъ c, ибо послѣдній членъ данной функціи, который можно написать въ видѣ dx^0, дастъ, слѣдуя этому закону, $0.dx^{-1}$, или 0.

maximum, а большему minimum, когда $a > 0$; *напротивъ, меньшему корню соотвѣтствуетъ minimum, а большему — maximum, когда* $a < 0$.

646. Примѣръ. *Найти maximum и minimum разности объемовъ: конуса, вписаннаго въ данный шаръ и сферическаго сегмента, имѣющаго то же основаніе.*

Вопросъ можно понимать двояко, а именно: высота конуса можетъ совпадать или не совпадать съ высотою сегмента. Въ первомъ предположеніи, означивъ MC буквою x, имѣемъ:



Черт 126.

$$\text{объемъ конуса}\quad SAB = \frac{1}{3}\pi x(2R - x)^2;$$

$$\text{объемъ сегмента}\ ABS = \frac{1}{3}\pi(2R - x)^2(3R - SC)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2R - x)^2(R + x).$$

Разность между первымъ и вторымъ объемомъ выражается формулою: $-\frac{1}{3}\pi R(2R - x)^2$. Такъ какъ множитель $-\frac{1}{3}\pi R$ — постояненъ, то измѣненія выраженія зависятъ отъ $(2R - x)^2$; но это выраженіе есть квадратъ, слѣд. оно имѣетъ minimum равный нулю, что имѣетъ мѣсто при $x = 2R$; а слѣд. выраженіе $-\frac{1}{3}\pi(2R - x)^2 R$ имѣетъ maximum при $x = 2R$, а какъ при этомъ x не можетъ, возрастая, превзойти $2R$, то полученный maximum есть абсолютный.

Во второмъ предположеніи:

$$\text{объемъ сегмента}\ AMB = \frac{1}{3}\pi x^2(3R - x),$$

слѣд. разность между конусомъ и сегментомъ равна $\frac{1}{3}\pi x(2R - x)^2 - \frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$ или

$$\frac{1}{3}\pi[2x^3 - 7Rx^2 + 4R^2x].$$

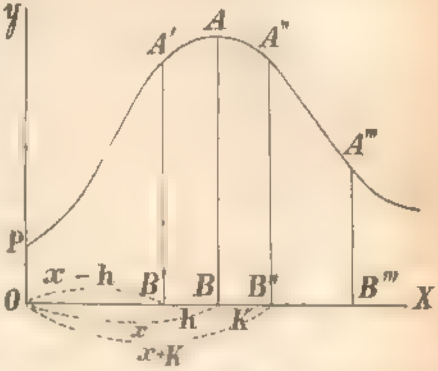
Измѣненія зависятъ отъ перемѣннаго множителя $2x^3 - 7Rx^2 + 4R^2x$, представляющаго кубичную функцію; значенія x, дающія этой функціи maximum и minimum, по правилу, суть корни квадратнаго уравненія

$$3 . 2x^2 - 2 . 7Rx + 4R^2 = 0, \quad \text{или} \quad 6x^2 - 14Rx + 4R^2 = 0.$$

Эти корни суть: $x = \frac{R}{3}$, $x' = 2R$; а какъ коэффиціентъ при x^2 положителенъ, то меньшему корню соотвѣтствуетъ maximum разности объемовъ $\frac{17\pi R^3}{81}$, а большему ея minimum: $\frac{4}{3}\pi R^3$, причемъ этотъ minimum — абсолютный.

647. Принципъ Фермата. Знаменитый французскій математикъ Фермаъ, въ одномъ изъ своихъ писемъ къ Паскалю и Робервалю, отъ 23 августа 1636 г. заявляетъ, что изъ всѣхъ своихъ открытій наибольшее значеніе онъ придаетъ методу опредѣленія максимальныхъ и минимальныхъ значеній во всевозможныхъ задачахъ, основанному на принципѣ, который онъ считаетъ фундаментальнымъ. Этотъ принципъ легко понять, разсматривая функцію какъ ординату кривой.

Пусть ордината AB представляетъ максимальное состояніе разсматриваемой функціи, а абсцисса $OB = x$ соотвѣтствующее значеніе перемѣннаго. Принципъ Фермата состоитъ въ томъ, что всегда существуютъ такія два значенія независимаго перемѣннаго—одно $x - h$, немного меньшее x, другое $x + k$, немного большее x, которымъ соотвѣтствуютъ два значенія функціи: $f(x - h)$ и $f(x + k)$ (или двѣ ординаты $A'B'$ и $A''B''$) равныя между собою. Въ самомъ дѣлѣ, функція, возрастая, и приближаясь къ своему maximum'у AB, пройдетъ чрезъ свое значеніе $f(x - h)$, безконечно-близкое къ этому maximum'у AB; затѣмъ, достигнувъ maximum'a, она начнетъ убывать и, прежде чѣмъ дойдетъ до нѣкотораго состоянія $A'''B'''$, меньшаго AB, должна, по свойству непрерывности, пройти всѣ промежуточныя состоянія, слѣд., между прочимъ, пройдетъ и чрезъ состояніе $A''B''$ или $f(x + k)$, равное $A'B'$ или $f(x - h)$ и безконечно-близкое къ AB.



Черт. 127.

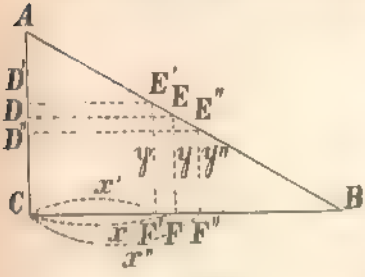
Такое же равенство имѣло бы мѣсто и тогда, если бы AB изображала minimum функціи.

Отсюда непосредственно вытекаетъ и самый методъ. Приравнивъ два значенія функціи, одно, соотвѣтствующее $x - h$, другое $x + k$, гдѣ x есть значеніе перемѣннаго, дающее maximum или minimum функціи, а h и k безконечно-малыя; такимъ образомъ получаемъ уравненіе $f(x - h) = f(x + k)$. Очевидно, что если значенія перемѣннаго $x - h$ и $x + k$, дающія равныя значенія функціи, сближать между собою, т.-е. приближать h и k къ нулю, то оба значенія функціи будутъ приближаться къ maximum'у (или min.), и въ предѣлѣ, т.-е. при $h = k = 0$, сольются съ maximum'омъ (или min.), а оба значенія перемѣннаго сольются съ тѣмъ значеніемъ, которое соотвѣтствуетъ maximum'у (или min.). Такимъ образомъ, въ предѣлѣ получится ур—ніе въ x: $\varphi(x) = 0$, которому будетъ удовлетворять значеніе перемѣннаго x, дающее или maximum или minimum. Рѣшивъ это ур—ніе, найдемъ, вообще говоря, нѣсколько значеній для x, напр. $x = a, b, c, \ldots$ Ничто не указываетъ, чтобы всѣ эти рѣшенія давали maximum или minimum функціи; слѣд. для каждаго нужна повѣрка. Впрочемъ, если ур—ніе $\varphi(x) = 0$ имѣетъ только одно рѣшеніе, и по свойству вопроса можно a priori заключить, что $f(x)$ имѣетъ max. или min., повѣрка будетъ не необходима.

На практикѣ поступаемъ такъ. Выразивъ всѣ неизвѣстныя черезъ одно x и положивъ $x - h = x'$, $x + k = x''$, въ ур—ніи $f(x') = f(x'')$ дѣлаемъ упрощенія, удаляя общія части и сокращая на $x'' - x'$, въ оставшихся членахъ дѣлаемъ $x'' - x'$ равнымъ нулю, послѣ чего и получаемъ ур—ніе $\varphi(x) = 0$.

Методъ Фермата есть болѣе общій изъ числа элементарныхъ методовъ опредѣленія максим. и миним. значеній функціи. Въ историческомъ отношеніи онъ важенъ тѣмъ, что послужилъ зародышемъ, изъ котораго позднѣе развилось дифференціальное исчисленіе.

648. Примѣръ I.—*Изъ какой точки гипотенузы даннаго прямоугольнаго треугольника нужно опустить перпендикуляры на катеты, чтобы прямоугольникъ, образуемый ими со сторонами прямого угла, имѣлъ наибольшую площадь.*



Черт. 128

Взявъ точку E на гипотенузѣ и опустивъ изъ нея перпендикуляры ED и EF на катеты, образуемъ прямоугольникъ EDCF; когда точка E совпадаетъ съ A, прямоугольникъ превращается въ прямую AC, а его площадь въ нуль; если затѣмъ двигать точку E отъ A къ B, то площадь прямоугольника сначала будетъ увеличиваться, а потомъ начинаетъ уменьшаться, и когда точка E совпадаетъ съ B, площадь снова обращается въ нуль. Такимъ образомъ, измѣняясь отъ нуля до нуля, она необходимо проходитъ чрезъ maximum.

Пусть въ положеніи EDCF прямоугольникъ имѣетъ наибольшую площадь xy. По принципу Фермата, всегда существуютъ такіе два безконечно близкіе къ DEFC прямоугольника D'E'F'C и D''E''F''C, которыхъ площади равны, т.-е.

$$x'y' = x''y'' \ . \ . \ . (1)$$

Чтобы y выразить черезъ x, замѣчаемъ, что для всякаго положенія прямоугольника между его измѣреніями существуетъ соотношеніе (напр. изъ подобія $\triangle$-въ BEF и BAC), выражающееся пропорціей $y : (a - x) = b : a$, откуда $y = \frac{b}{a}(a - x)$. Въ силу этого соотношенія можно исключить перемѣнное y и представить (1) въ формѣ

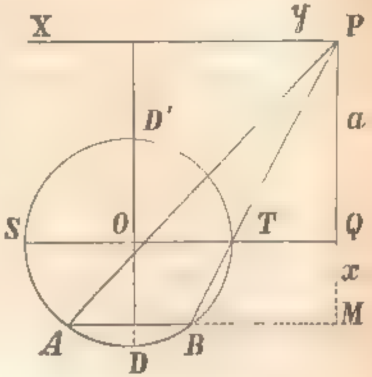
$$\frac{b}{a} x' (a - x') = \frac{b}{a} x'' (a - x''),$$

откуда: $ax' - x'^2 = ax'' - x''^2$, или $a(x' - x'') = (x' + x'')(x' - x'')$. Сокративъ на $x' - x''$, имѣемъ: $a = x' + x''$. Положивъ $x' = x'' = x$, получимъ ур-ніе $2x = a$, котораго корень $x = \frac{a}{2}$ даетъ искомый maximum. Отсюда, изъ вышеприведенной пропорціи, найдемъ: $y = \frac{b}{2}$. Эти результаты показываютъ, что maximum площади прямоугольника даетъ точка, лежащая въ срединѣ гипотенузы. Самый же maximum площади $= \frac{ab}{4}$ (половина площади $\triangle$-ка).

649. Примѣръ II.—*Данъ кругъ и прямая xy. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершину въ точкѣ* P, *данной на этой прямой, а основаніемъ хорду* AB, *параллельную этой прямой, найти тотъ, площадь котораго имѣетъ наибольшую величину.*

Различаемъ два случая, смотря по тому, пересѣкаетъ данная прямая xy кругъ O или нѣтъ.

I. Пусть прямая xy не пересѣкаетъ кругъ O. Задача имѣетъ maximum, потому что если перемѣщать хорду AB параллельно xy, отъ D къ D, она будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, а слѣд. такимъ же образомъ будетъ измѣняться и площадь треугольника: послѣдняя имѣетъ, поэтому, maximum. Затѣмъ, замѣчаемъ, что если перемѣщать хорду отъ D′ къ ST, площадь треугольника будетъ увеличиваться, ибо увеличивается высота и основаніе его. Въ другомъ полукругѣ, по мѣрѣ удаленія хорды отъ центра, она уменьшается, высота же увеличивается. поэтому здѣсь и слѣдуетъ искать maximum.



Черт 129

Пусть хорда AB $= 2y$, разстояніе ея OC отъ центра равно x, радіусъ курга $= R$, перпендикуляръ $PQ = a$. Пусть максимальная площадь соотвѣтствуетъ $OC = x$, эта площадь $= (a + x)\sqrt{R^2 - x^2}$.

По принципу Фермата имѣемъ

$$(a + x')\sqrt{R^2 - x'^2}$$
$$= (a + x'')\sqrt{R^2 - x''^2}.$$

Возвышая въ квадратъ, тотчасъ же освободили бы ур. отъ радикаловъ, но для опредѣленія x получили бы кубичное ур—ніе. Слѣдующій пріемъ позволяетъ привести вопросъ къ рѣшенію квадратнаго ур—нія. Даемъ уравненію видъ

$$a(\sqrt{R^2 - x'^2} - \sqrt{R^2 - x''^2}) = x''\sqrt{R^2 - x''^2} - x'\sqrt{R^2 - x'^2}.$$

Умножая и дѣля первую часть на сумму радикаловъ этой части, а вторую на сумму членовъ второй части, имѣемъ:

$$a \cdot \frac{x''^2 - x'^2}{\sqrt{R^2 - x'^2} + \sqrt{R^2 - x''^2}} = \frac{R^2(x''^2 - x'^2) - (x''^4 - x'^4)}{x''\sqrt{R^2 - x''^2} + x'\sqrt{R^2 - x'^2}}.$$

Раздѣлимъ обѣ части на $x''^2 - x'^2$ и положивъ затѣмъ $x' = x'' = x$, получаемъ ур—ніе

$$\frac{a}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R^2 - 2x^2}{2x\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \text{или} \quad 2x^2 + ax - R^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8R^2}}{4}.$$

Отрицательный корень отбрасываемъ, ибо въ верхнемъ полукругѣ, съ повиниженіемъ хорды идетъ постепенное увеличеніе площади Δ-ка. Итакъ, x соотвѣтствующій максимальной площади, равенъ

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 8R^2}}{4}.$$

Корень этотъ дѣйствительно меньше R, ибо подстановка 0 и R вмѣсто x въ триномъ $2x^2 + ax - R^2$ даетъ результаты противоположнаго знака: $-R^2$ и $R^2 + aR$.

Въ частномъ случаѣ, когда прямая xy касается къ кругу, $a = R$, и $x = \frac{1}{2}R$. Когда точка P совпадаетъ съ D′ (точкою касанія), треугольникъ

D'AB равнобедренный и вписанный; площадь его $=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$ Итакъ: *изъ всѣхъ равнобедренныхъ вписанныхъ треугольниковъ правильный имѣетъ наибольшую площадь.*

II. Если прямая xy пересѣкаетъ кругъ, то для каждой части круга получается maximum. Къ большему сегменту относится разобранный случай; для меньшаго, изъ ур—нія $(x'-a)\sqrt{R^2-x'^2}=(x''-a)\sqrt{R^2-x''^2}$ находимъ:

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+8R^2}}{4}.$$

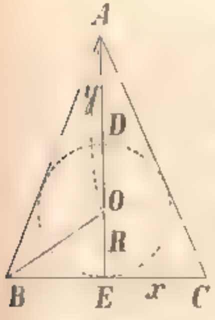
Если параллель проходитъ черезъ центръ, то $a=0$, и $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$.

650 Методъ равныхъ корней. Пусть кривая PAQ (черт. 127) изображаетъ ходъ функціи $f(x)$; давая функціи частное значеніе m и рѣшая ур—ніе $f(x)-m=0$, мы опредѣляемъ тѣ значенія x, при которыхъ функція получаетъ эту величину m. Съ геометрической точки зрѣнія это приводится къ опредѣленію точекъ встрѣчи кривой съ параллелью, проведенною въ разстояніи m отъ оси x. Когда m мало разнится отъ maximum'а AB, мы находимъ для x двѣ величины OB' и OB'', мало разнящіяся между собою; онѣ дѣлаются равными между собою и OB, когда m обращается въ AB. Итакъ, когда цѣлая въ x функція получаетъ при $x=\alpha$ maximum m, уравненіе $f(x)-m'=0$ имѣетъ два корня равные α, и слѣд. его первая часть раздѣлится на $(x-\alpha)^2$. Въ самомъ дѣлѣ: если ур. $f(x)-m=0$ имѣетъ корни α' и α'', то $f(\alpha')-m=0$ и $f(\alpha'')-m=0$; первое равенство показываетъ, что $f(x)-m$ дѣлится на $x-\alpha'$, второе, что тотъ же полиномъ дѣлится на $x-\alpha''$; сл. онъ дѣлится и на $(x-\alpha')(x-\alpha'')$, и при $\alpha'=\alpha''$, на $(x-\alpha)^2$. Отсюда правило:

Чтобы найти maximum цѣлой функціи, дѣлимъ разность $f(x)-m$ на $(x-\alpha)^2$ или на $x^2-2\alpha x+\alpha^2$, продолжая дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ первой степени, вида $Mx+N$; *выражаютъ, что этотъ остатокъ тождественно равенъ нулю при всякомъ x, полагая* $M=0$, $N=0$; *рѣшивъ эти уравненія, и найдемъ $x=\alpha$, соотвѣтствующій maximum'у, и самый этотъ maximum m.*

Очевидно, то же относится и къ minimum'у функціи.

651. Примѣръ. *Изъ всѣхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, описанныхъ около круга, найти тр—къ наименьшей площади.*



Черт. 130.

Если перемѣщать вершину A по высотѣ AE отъ D до безконечности, то площадь △-ка будетъ измѣняться отъ ∞ до ∞, слѣд. имѣетъ minimum. Пусть половина основанія равна x, высота $=R+y$; чтобы выразить y черезъ x, изъ △ABE, по свойству биссектрисы, имѣемъ $y:R=AB:x$, или $y^2:R^2=[(y+R)^2+x^2]:x^2$, откуда найдемъ:

$$y=\frac{R(R^2+x^2)}{x^2-R^2}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу площади тр—ка, получимъ

$$\triangle ABC=x(y+R)=x\left(\frac{R(R^2+x^2)}{x^2-R^2}+R\right)=\frac{2Rx^4}{x^2-R^2}.$$

Вопросъ приводится къ нахожденію minimum'а выраженія $\frac{x^3}{x^2-R^2}$. Приравнивая это выраженіе m, получаемъ ур-ніе

$$x^3-mx^2+mR^2=0.$$

Раздѣливъ первую часть его на $x^2-2ax+a^2$, находимъ въ остаткѣ $(3a^2-2am)x+(mR^2-2a^3+a^2m)$, откуда, слѣдуя правилу, имѣемъ 2 ур-нія

$$3a^2-2am=0,\quad mR^2-2a^3+a^2m=0.$$

Изъ перваго находимъ: $m=\frac{3}{2}a$; подставляя во второе, получаемъ: $x=R\sqrt{3}$, слѣд. $m=\frac{3}{2}R\sqrt{3}$, а минимальная площадь $=3R^2\sqrt{3}$: заключаемъ, что искомый треугольникъ—правильный.

II. Maxima и minima квадратной дроби $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$.

652 Первый методъ. Нужно опредѣлить x такъ, чтобы при всякомъ знакѣ безконечно-малаго h, имѣло мѣсто неравенство

$$\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c}{a'(x+h)^2+b'(x+h)+c'}-\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\lessgtr 0,$$

гдѣ знакъ $<$ относится къ случаю maximum'а дроби, знакъ $>$ къ случаю ея minimum'а.

Умножая на произведеніе знаменателей, которое положительно, ибо полиномъ $a'(x+h)^2+b(x+h)+c'$, разнясь безконечно мало отъ ax^2+bx+c', имѣетъ одинаковый съ нимъ знакъ, находимъ неравенство:

$$[a(x+h)^2+b(x+h)+c]\,[a'x^2+b'x+c']-$$
$$[a'(x+h)^2+b'(x+h)+c']\,(ax^2+bx+c)\lessgtr 0,$$

которое, будучи упрощено и расположено по возрастающимъ степенямъ h, приводится къ:

$$h[(ab'-ba')x^2+2(ac-ca')x+bc'-cb]+h^2[(ab'-ba)x+ac'-ca]\lessgtr 0 \;.\;.\;(1).$$

Чтобы это выраженіе не перемѣняло знака вмѣстѣ съ h, коэффиціентъ при h долженъ быть нулемъ; слѣд. значенія x, которыя могутъ дать дроби максимальное или минимальное значеніе, суть корни уравненія:

$$(ab-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')=0\;.\;.\;.\;(2).$$

Итакъ первое условіе, чтобы дробь имѣла maximum или minimum, состоитъ въ томъ, чтобы ур. (2) имѣло корни дѣйствительные, т.-е. чтобы было

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb)\geqslant 0\;.\;.\;.\;(3).$$

Взявъ равенство, т.-е. полагая, что ур. (2) имѣетъ корни равные, находимъ, что общая величина ихъ опредѣляется равенствомъ: $x = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, откуда

$$x(ab' - ba') + ac' - ca' = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что неравенство (1) привело бы къ равенству $0 = 0$, каково бы ни было h: въ этомъ случаѣ, слѣдов., дробь не имѣетъ ни maximum'a, ни minimum'a.

Обращаясь къ равенству $(ac' - ca')^2 - (ab - ba')(bc' - cb') = 0$, замѣчаемъ, что, какъ доказано въ § 467, оно выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы два ур—нія $ax^2 + bx + c = 0$ и $a'x^2 + b'x + c' = 0$ имѣли общій корень, именно: $x_1 = -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba}$; слѣд. оба члена дроби дѣлятся на $x - x_1$ и, по сокращеніи, дробь приводится къ $\frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}$, а это выраженіе не имѣетъ ни maximum'a, ни minimum'a (§ 591).

Итакъ, пусть существуетъ неравенство (3), и пусть x' и x'' суть два корня ур—нія (2), причемъ $x' < x''$; сравнивая ихъ съ полусуммою корней, имѣемъ неравенства

$$x' < -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} < x''.$$

1-й случай: $ab' - ba' > 0$. Предыдущія неравенства эквивалентны слѣдующимъ:

$$(ab' - ba')x' + ac' - ca' < 0, \quad (ab' - ba')x'' + ac' - ca' > 0.$$

Отсюда выводимъ:

$$[(ab' - ba')x' + (ac' - ca')]h^2 < 0, \quad [(ab' - ba')x'' + (ac' - ca')]h^2 > 0.$$

Первое условіе выражаетъ, что величинѣ x' соотвѣтствуетъ maximum дроби, а второе, что большему корню x'' отвѣчаетъ minimum дроби.

2-й случай $ab' - ba' < 0$. Умножая на положительное количество

$$-(ab' - ba'),$$

находимъ

$$[(ab' - ba')x' + ac' - ca']h^2 > 0 \quad \text{и} \quad [(ab' - ba')x'' + ac' - ca']h^2 < 0;$$

заключенія обратны предыдущимъ.

3-й случай: $ab' - ba' = 0$. Ур—ніе (2) въ этомъ случаѣ дѣлается 1-й степени, а потому дробь имѣемъ maximum или minimum, смотря по тому, отрицательно $ac' - ca'$ или положительно, ибо неравенство (1) приводится къ $h^2(ac' - ca') \lesseqgtr 0$.

Наконецъ, если бы сверхъ того имѣли $ac' - ca' = 0$, и слѣд. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, дробь не имѣла бы ни maximum'a, ни minimum'a: она имѣла бы постоянную величину $\frac{a}{a'}$, при всякомъ x. Этотъ анализъ приводитъ къ слѣдующему правилу нахожденія maximum'a и minimum'a квадратной дроби:

Составляемъ уравненіе:

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + bc' - cb' = 0 \ . \ . \ . (2).$$

Если его корни равные или мнимые, дробь не имѣетъ ни maximum'a, ни minimum'a; если же корни дѣйствительные и неравные, то меньшему корню соотвѣтствуетъ maximum, большему minimum, если коэффиціентъ $ab' - ba'$ положителенъ; напротивъ, меньшему корню отвѣчаетъ minimum, а большему maximum, если $ab' - ba' < 0$; если же $ab' - ba' = 0$, дробь имѣетъ maximum или minimum, смотря по тому, будетъ ли $ac' - ca' < 0$ или > 0.

Примѣръ I. *Найти maximum и minimum дроби* $\frac{5x-1}{4x^2}$.

Уравненіе, аналогичное (2), въ данномъ случаѣ есть: $-20x^2 + 8x = 0$, откуда:

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{2}{5}.$$

Меньшему корню соотвѣтствуетъ абсолютный minimum дроби, равный $-\infty$; большему корню—maximum, равный $\frac{25}{16}$.

Примѣръ II. *Найти maximum и minimum дроби* $\frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$.

Уравненіе, дающее значенія x, обращающія дробь въ maximum и minimum, въ данномъ случаѣ есть

$$-bx^2 + 2(a - c)x + b = 0.$$

Корни этого ур—нія всегда дѣйствительные и неравные, ибо подрадикальное количество есть сумма двухъ квадратовъ. Такимъ образомъ, если $b > 0$, дробь имѣетъ

$$\text{maximum} = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{2}, \text{ при } x = \frac{a - c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{b};$$

$$\text{и minimum} = \frac{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{2}, \text{ при } x = \frac{a - c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{b}.$$

Обратно—если $b < 0$.

653. Второй методъ. Приравнявъ дробь произвольному, но опредѣленному количеству m, опредѣлимъ, при какихъ значеніяхъ перемѣннаго x она можетъ имѣть эту величину m. Искомыя значенія x дастъ ур—ніе

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m, \quad \text{или} \quad (a - a'm)x^2 + (b - b'm)x + c - c'm = 0,$$

изъ котораго

$$x = \frac{-(b - b'm) \pm \sqrt{(b - b'm)^2 - 4(a - a'm)(c - c'm)}}{2(a - a'm)},$$

или, расположивъ подрадикальное количество по степенямъ m, найдемъ:

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{(b'^2 - 4a'c')m^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')m + b^2 - 4ac}}{2(a - a'm)}.$$

Положивъ

$$b'^2 - 4a'c' = P, \quad 2ac' + 2ca' - bb' = Q, \quad b^2 - 4ac = R,$$

дадимъ подрадикальному количеству видъ

$$Pm^2 + 2Qm + R \; . \; . \; . \; (1).$$

Для того, чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подрадикальное количество не было отрицательнымъ, т.-е. чтобы было

$$Pm^2 + 2Qm + R \geqslant 0 \; . \; . \; . \; (2).$$

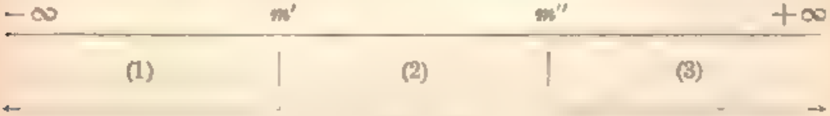
Итакъ, m можетъ измѣняться только въ предѣлахъ, удовлетворяющихъ этому неравенству; соотвѣтствующія значенія x получатся изъ формулы

$$x = \frac{b'm - b \pm \sqrt{Pm^2 + 2Qm + R}}{2(a - a'm)} \; . \; . \; . \; (3).$$

Здѣсь могутъ представиться три случая: $Q^2 - PR > 0$, $Q^2 - PR = 0$ и $Q^2 - PR < 0$.

Первый случай: $Q^2 - PR > 0$. Корни тринома (1) будутъ дѣйствительные неравные: пусть меньшій корень будетъ m', большій m''. Извѣстно, что при всякомъ значеніи m, лежащемъ внѣ корней, знакъ тринома (1) одинаковъ съ знакомъ коэффиціента P; при всѣхъ же значеніяхъ m, лежащихъ между корнями, знакъ тринома противоположенъ знаку P. Отсюда необходимость различать два случая:

1. $P > 0$, т.-е. знаменатель изучаемой дроби имѣетъ дѣйствительные неравные корни. Неравенство (2) будетъ удовлетворено, если количеству m будемъ давать значенія, лежащія внѣ корней тринома (1); такимъ образомъ дробь m можетъ принимать два ряда значеній: отъ $-\infty$ до m' и отъ m'' до $+\infty$, и не имѣетъ значеній между m' и m''; такимъ образомъ ея значенія лежатъ въ областяхъ (1) и (3):



Черт. 131.

См. Зад. III, § 658.

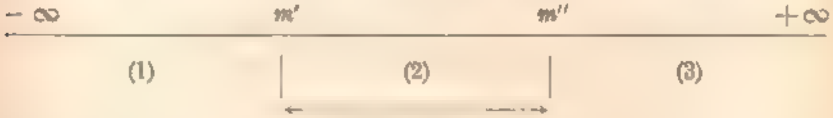
Заключаемъ, что m' есть наибольшее значеніе перваго ряда а m'' — наименьшее значеніе второго ряда, т.-е. *maximum дроби равенъ меньшему корню тринома* (1), *а minimum—большему его корню;* и дробь не имѣетъ значеній между корнями тринома. Когда дробь принимаетъ максимальное и минимальное значеніе, подрадикальное количество формулы (3) обращается въ нуль, и

$$x = \frac{b'm - b}{2(a - a'm)};$$

подставивъ сюда m' вмѣсто m, найдемъ x, соотвѣтствующій maximum'у дроби, а замѣнивъ m количествомъ m', найдемъ x, соотвѣтствующій minimum'у.

При этомъ каждое свое значеніе меньшее m', и каждое значеніе большее m'' дробь принимаетъ при двухъ различныхъ значеніяхъ x.

2. $P < 0$, т.-е. знаменатель дроби имѣетъ корни мнимые. Неравенство (2) будетъ удовлетворено, если количеству m дадимъ значенія, лежащія между корнями тринома (1); такимъ образомъ дробь m можетъ имѣть всѣ значенія въ предѣлахъ: $m'' \geqslant m \geqslant m'$, т.-е. значенія дроби лежатъ въ области (2), и она не имѣетъ дѣйствительныхъ значеній въ областяхъ (1) и (3). Заключаемъ, что *меньшій корень тринома* (1) *есть minimum дроби, а большій —ея maximum*. Соотвѣтствующія значенія x вычисляются по прежней формулѣ. Каждое свое значеніе между m' и m'' дробь принимаетъ дважды, при двухъ различныхъ значеніяхъ x, и только значенія m' и m'' принимаетъ, каждое, при одномъ опредѣленномъ x-сѣ. См. Зад. I, § 656 и II, § 657.



Черт. 132.

Примѣры: 1. *Найти maximum и minimum дроби* $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$.

Приравнявъ данную дробь произвольному количеству m, рѣшаемъ ур—ніе

$$\frac{x^2-2x+21}{6x-14}=m, \quad \text{или} \quad x^2-(2+6m)x+(14m+21)=0,$$

откуда

$$x=1+3m\pm\sqrt{9m^2-8m-20}.$$

Корни подрадикальнаго тринома суть: 2 и $-\frac{10}{9}$. Такъ какъ въ данномъ случаѣ $P > 0$, то заключаемъ, что maximum дроби равенъ меньшему корню, а minimum—большему; слѣд.

$$\text{max. } (m)=-\frac{10}{9}; \text{ minimum } (m)=2.$$

Подставивъ въ формулу x вмѣсто m, сперва $\left(-\frac{10}{9}\right)$, а потомъ 2, и замѣчая, что при этихъ значеніяхъ m подрадикальное количество обращается въ нуль, находимъ:

$$x_{(\max)}=1-\frac{10}{3}=-\frac{7}{3}; \quad x_{(\min)}=1+3\,.\,2=7.$$

2. *Найти max. и min. дроби* $\frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$.

Приравнявъ дробь количеству m, и рѣшивъ полученное ур. относительно x, имѣемъ

$$x=\frac{5-m\pm\sqrt{-3m^2-2m+21}}{2(1-m)}.$$

Корни подрадикальнаго тринома суть: -3 и $+2\frac{1}{3}$; а какъ $P < 0$, то заключаемъ, что большій корень есть maximum дроби, меньшій — ея minimum; итакъ

$$\text{max. } (m) = 2\frac{1}{3}; \text{ minimum } (m) = -3.$$

Вычисливъ соотвѣтствующія значенія x по формулѣ $x = \frac{5 - m}{2(1 - m)}$, находимъ: $x_{\text{max.}} = -1$; $x_{\text{min.}} = +1$.

Второй случай: $Q^2 - PR = 0$. Триномъ (1) имѣетъ корни дѣйствительные равные и общая величина ихъ $= -\frac{Q}{P}$; триномъ принимаетъ видъ $P\left(m + \frac{Q}{P}\right)^2$, а условіе дѣйствительности x — видъ:

$$P\left(m + \frac{Q}{P}\right)^2 \geqslant 0.$$

Заключаемъ, что триномъ всегда имѣетъ знакъ количества P. Отсюда:

1. $P > 0$. При всякомъ m триномъ (1) остается положительнымъ, а при $m = -\frac{Q}{P}$ обращается въ нуль, слѣд. дробь можетъ имѣть какую угодно величину, и слѣд. нѣтъ ни maximum'а, ни minimum'а. Это можно было предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ: $Q^2 - PR = (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')$; но въ данномъ случаѣ это выраженіе $= 0$, а мы видѣли (§ 467), что при такомъ условіи триномы $ax^2 + bx + c$ и $a'x^2 + b'x + c'$ имѣютъ одинъ общій корень, а слѣд. оба члена дроби — общаго множителя; сокративъ его, найдемъ

$$m = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'}.$$

Отсюда видно, что задача всегда возможна; всегда найдемъ для x одну величину, и только одну, при которой дробь принимаетъ данную величину.

2. $P < 0$. Въ этомъ случаѣ триномъ (1) будетъ отрицателенъ при всякомъ m, кромѣ $m = -\frac{Q}{P}$; слѣд. какую бы величину дробь m ни имѣла, кромѣ величины $-\frac{Q}{P}$, x остается мнимымъ, и только при $m = -\frac{Q}{P}$, онъ дѣйствителенъ; слѣд., наоборотъ, всякая дѣйствительная величина x должна дѣлать дробь равною $\left(-\frac{Q}{P}\right)$, иначе говоря, дробь должна имѣть постоянную величину, а сл. не имѣетъ ни max., ни min.

Можно доказать непосредственно, что когда совмѣстно имѣемъ $P < 0$ и $Q^2 - PR = 0$, то дробь имѣетъ постоянную величину. Въ самомъ дѣлѣ:

$$Q^2 - PR = a'c'\left[b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'}\right]^2 + \frac{4a'c' - b'^2}{4a'c'}(ac' - ca')^2 \ . \ \ . \ \ . \ (4).$$

Но P или $b'^2 - 4a'c' < 0$, слѣд. $4a'c' - b'^2 > 0$, откуда $4a'c' > 0$; слѣд. $Q^2 - PR$ есть сумма двухъ существенно положительныхъ количествъ, и потому можетъ быть нулемъ только тогда, когда каждое изъ этихъ количествъ въ отдѣльности $= 0$; итакъ, должно быть:

$$b - \frac{b'(ac' + ca')}{2a'c'} = 0 \ . \ \ . \ \ . \ (1) \quad \text{и} \quad ac' - ca' = 0 \ . \ \ . \ \ . \ (2),$$

или, замѣнивъ въ (1) c' его величиною, выведенною изъ (2):

$$\left\{\begin{aligned} &2bc\,.\,\frac{a'^2}{a^2}-2b'ca'=0, \quad \text{или} \quad \frac{b}{b'}=\frac{a}{a'} \\ &\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}, \end{aligned}\right.$$

т.-е.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'};$$

но мы видѣли (§ 468), что при этихъ условіяхъ дробь имѣетъ постоянную величину, не зависитъ отъ x.

Примѣчаніе. Задача: *найти прямо условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы дробь* $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ *имѣла постоянную величину при всякомъ x?*

1-й способъ. Оставаясь постоянною при всякомъ x, дробь должна имѣть одну и ту же величину и для трехъ различныхъ значеній x, напр., для $x=0$, $x=-1$ и $x=+1$; слѣд. должно быть:

$$\frac{c}{c'}=\frac{a-b+c}{a'-b'+c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'},$$

откуда, по § 309, найдемъ:

$$\frac{c}{c'}=\frac{a+c}{a'+c'}=\frac{b}{b'}, \quad \text{или, наконецъ,} \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Эти условія, будучи необходимы, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточны: ибо какъ скоро они выполнены, то, назвавъ общую величину равныхъ отношеній буквою k, найдемъ: $a=a'k$, $b=b'k$, $c=c'k$, и дробь беретъ видъ $\frac{k(a'x^2+b'x+c')}{a'x^2+b'x+c'}$, т.-е. $=k$.

2-й способъ. Пусть постоянная, впрочемъ, неизвѣстная, величина дроби будетъ k. Положить $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=k$ значитъ положить, что $ax^2+bx+c=$ $=k(a'x^2+b'x+c')$, или $(a-a'k)x^2+(b-b'k)x+c-c'k=0$, каковъ бы ни былъ x. Отсюда, по § 72, заключаемъ, что

$$a-a'k=0, \quad b-b'k=0, \quad c-c'k=0, \quad \text{или} \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Третій случай. $Q^2-PR<0$. Въ этомъ случаѣ корни тринома (1) мнимые, слѣд. триномъ всегда сохраняетъ знакъ коэффиціента P. Отсюда:

1. $P>0$. Подрадикальное количество формулы x будетъ при всякомъ m положительно, а слѣдов. x дѣйствителенъ; такимъ образомъ дробь m можетъ имѣть какую угодно величину, и слѣд. не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а.

2. $P<0$. Подрадикальное количество формулы x будетъ существенно-отрицательно, слѣд. при всякомъ m для x будетъ получаться мнимое значеніе; а слѣд. обратно, какое бы дѣйствительное значеніе мы ни дали перемѣнному x, дробь m не можетъ получить дѣйствительнаго значенія. Но это заключеніе, очевидно, нелѣпо, ибо изъ уравненія $m=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ видно, что дѣйствительному значенію x соотвѣтствуетъ дѣйствительное же значеніе дроби m. Стало быть, случай совмѣстнаго существованія условій: $P<0$ и $Q^2-PR<0$ невозможенъ.

Впрочемъ, можно доказать это и прямо; въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (4) видно, что когда $P < 0$, выраженіе $Q^2 - PR$ представляетъ сумму двухъ квадратовъ, а такая сумма никогда не можетъ быть отрицательною.

Частные случаи Когда $P = 0$, подрадикальное выраженіе формулы x обращается въ $2Qm + R$. Чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы $2Qm + R \geqslant 0$, или $2Qm \geqslant -R$. Отсюда:

1) Если $Q > 0$, то $m \geqslant -\frac{R}{2Q}$, слѣд. min. $(m) = -\frac{R}{2Q}$: дробь имѣетъ только min., и не имѣетъ max.

2) Если $Q < 0$, то $m \leqslant -\frac{R}{2Q}$, откуда max. $(m) = -\frac{R}{2Q}$ дробь имѣетъ только max., и не имѣетъ min.

3) Если $Q = 0$, неравенство приводится къ $R \geqslant 0$: оно всегда удовлетворяется; ибо въ этомъ случаѣ $b^2 - 4ac = \frac{(ac' - ca')^2}{a'c'}$, гдѣ $a'c' > 0$, такъ какъ $b'^2 - 4a'c' = 0$. Слѣд. всякому значенію m отвѣчаетъ дѣйствительное значеніе x-са: дробь не имѣетъ ни max., ни min.

Изслѣдованіе приводитъ къ слѣдующему результату: *Когда корни тринома* $Pm^2 + 2Qm + R$ *мнимые или дѣйствительные равные, дробь не имѣетъ ни max., ни min.; если же корни этого тринома дѣйствительные неравные, дробь имѣетъ maximum и minimum, выражаемыя корнями тринома; соотвѣтствующія значенія x получаются изъ формулы*

$$x = -\frac{b - b'm}{2(a - a'm)},$$

въ которой m нужно замѣнить корнями тринома.

О результатахъ этого изслѣдованія мы получимъ болѣе ясное понятіе, изслѣдуя измѣненія дроби при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

III. Изслѣдованіе измѣненій дроби $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

654. Теорема.—*Квадратная дробь непрерывна при измѣненіи x отъ α до β, если только въ промежуткѣ между α и β не содержится ни одинъ изъ корней знаменателя.*

Во-первыхъ, очевидно, что данная дробь дѣйствительна при всякомъ дѣйствительномъ x, и что она конечна, если только значеніе, данное x-су, не обращаетъ знаменателя въ нуль. Остается доказать, что если x_1 есть нѣкоторое значеніе x, заключающееся между α и β, то количеству x_1 всегда можно дать приращеніе h, на столько близкое къ нулю, чтобы и приращеніе K дроби y_1 само было какъ угодно близко къ нулю. Имѣемъ:

$$y_1 = \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{a'x_1^2 + b'x_1 + c'}, \quad y_1 + K = \frac{a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c}{a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'},$$

$$K = \frac{[a(x_1+h)^2 + b(x_1+h) + c](a'x_1^2 + b x_1 + c') - [a'(x_1+h)^2 + b'(x_1+h) + c'](ax_1^2 + bx_1 + c)}{[a(x_1+h)^2 + b'(x_1+h) + c'](a'x_1^2 + b'x_1 + c')}$$

или, по упрощеніи числителя,

$$K = \frac{h\{(ab' - ba')x_1^2 + [(ab - ba')h + 2(ac' - ca')]x_1 + [(ac' - a'c)h + (bc' - b'c)]\}}{[a'(x_1 + h)^2 + b'(x_1 + h) + c'](a'x_1^2 + b'x_1 + c')}.$$

По мѣрѣ приближенія h къ нулю числитель стремится къ нулю, а знаменатель къ $(a'x_1^2 + bx_1 + c')^2$. Но x_1 не обращаетъ этого тринома въ нуль, ибо интервалъ отъ α до β, содержащій x_1, не содержитъ корней знаменателя; слѣд. вмѣстѣ съ h и K стремится къ нулю; иначе говоря, можно приращенію h перемѣннаго x дать значеніе настолько близкое къ нулю, чтобы и соотвѣтственное приращеніе K дроби было также какъ угодно близко къ нулю; что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Если x-су дать значеніе x_1, обращающее въ нуль знаменателя дроби, то она вообще обратится въ безконечность, испытывая при этомъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $\pm\infty$ въ $\mp\infty$, если только корни знаменателя неравные, или если оба члена дроби не имѣютъ общаго множителя $x - x_1$. Если эти исключенія не имѣютъ мѣста, то слѣдуетъ опредѣлить знакъ безконечности, когда x приближается къ x_1, возрастая, и затѣмъ переходитъ чрезъ x_1. Для этого достаточно опредѣлить знакъ числителя при $x = x_1$; зная знакъ и знаменателя, будемъ знать и знакъ дроби.

655. При изученіи измѣненій дроби будемъ держаться слѣдующаго порядка.

1. Опредѣляемъ maximum и minimum, если таковыя имѣются, и соотвѣтственныя значенія x.

2. Приравниваемъ нулю числителя, потомъ знаменателя и рѣшаемъ полученныя ур—нія: корни перваго ур—нія, если они дѣйствительны, дадутъ тѣ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ нуль; втораго — тѣ значенія x, при которыхъ она обращается въ $\pm\infty$.

3. Опредѣляемъ значеніе дроби при $x = 0$.

4. Наконецъ, ищемъ предѣльныя значенія дроби, т.-е. при $x = \pm\infty$.

Расположивъ значенія x въ порядкѣ ихъ возрастанія, а противъ нихъ соотвѣтствующія величины дроби, составимъ таблицу, ясно показывающую измѣненія дроби по величинѣ и знаку. Для наглядности такую таблицу будемъ сопровождать графическимъ изображеніемъ измѣненій дроби.

Задача I.

656. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{3x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 10x + 7}$ *при непрерывномъ возрастаніи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Слѣдуя вышеозначенному плану, опредѣляемъ:

1. *Maximum* и *minimum* дроби. — Приравнивая данную дробь произвольному количеству y, получаемъ ур—ніе

$$\frac{3x^2 + 2x - 3}{4x^2 - 10x + 7} = y, \quad \text{или} \quad (3 - 4y)x^2 + (2 + 10y)x - (3 + 7y) = 0.$$

изъ котораго (расположивъ подрадик. колич. по степенямъ y):

$$x = \frac{-(1 + 5y) \pm \sqrt{-3y^2 + 19y + 10}}{3 - 4y} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Приравнявъ подрадик. выраженіе нулю и рѣшивъ ур. $3y^2 - 19y - 10 = 0$, находимъ: $y' = -0,488$, $y'' = 6,821$; а какъ въ данномъ случаѣ коэффиціентъ при y^2 подъ радикаломъ отрицателенъ, то заключаемъ, что большій корень есть maximum дроби, меньшій — ея minimum. Итакъ

$$\text{max. } (y) = 6,821; \quad \text{min. } (y) = -0,488.$$

Соотвѣтствующія значенія x суть:

$$x_{max} = \frac{-(1+5.6,821)}{3-4.6,821} = 1,445; \quad x_{min.} = -\frac{(1+5.-0,488)}{3-4.-0,488} = 0,291.$$

Заключаемъ, что дробь можетъ измѣняться только между $-0,488$ и $+6,821$ и не имѣетъ значеній, меньшихъ $-0,488$ и большихъ $6,821$. Всякое же значеніе между этими предѣлами она принимаетъ два раза, при двухъ различныхъ значеніяхъ x, потому что для каждаго y, лежащаго между $-0,488$ и $+6,821$, мы изъ формулы (1) находимъ два различныхъ дѣйствит. значенія x.

2. *Нулевыя значенія дроби,* соотвѣтствующія конечнымъ значеніямъ x. Алгебраическая дробь $\frac{A}{B}$ обращается въ нуль, когда обращается въ нуль числитель A, знаменатель же B остается отличнымъ отъ нуля; или когда B обращается въ ∞, причемъ A остается конечнымъ. Но B — выраженіе цѣлое относительно x, сл. оно не можетъ обратиться въ ∞ при конечныхъ x; остается приравнять A нулю. Положивъ $3x^2+2x-3=0$ и рѣшивъ это ур., найдемъ:

$$x' = -1,387, \quad x'' = +0,721.$$

3. *Безконечныя значенія дроби.*—Дробь не обращается въ ∞; въ этомъ убѣждаемся, приравнявъ знаменателя нулю, и рѣшивъ ур—ніе $4x^2-10x+7=0$: найдемъ для x мнимыя значенія.

4. *Значенія дроби при* $x=0$.—Положивъ $x=0$, найдемъ $y = -\frac{3}{7}$.

5. *Предѣльныя значенія дроби.* Положивъ $x = \pm\infty$, находимъ, что y принимаетъ неопред. видъ $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытія котораго дѣлимъ числ. и знам. на x^2 и затѣмъ полагаемъ $x=\pm\infty$.

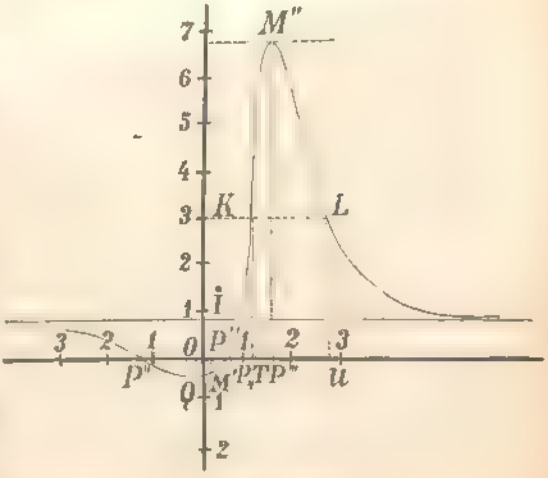
Такимъ образомъ получаемъ, что при $x = \pm\infty$, $y = +\frac{3}{4}$.

Результаты этого изслѣдованія даютъ слѣдующую таблицу измѣненій дроби:

Таблица измѣненій дроби.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	$+\frac{3}{4}$	$+$
$-1,387$	0	
0	$-0,428 = -\frac{3}{7}$	
$0,291$	$-0,488$ (min.)	$-$
$0,721$	0	
$1,445$	$+6,821$ (max.)	
$+\infty$	$+\frac{3}{4}$	

Кривая измѣненій.



Черт. 133.

Кривая измѣненій дроби. Взявъ оси координатъ xx' и yy' и произвольную прямую за 1, наносимъ на оси x-овъ $OP'' = -1,387$ и получаемъ точку P'', для которой ордината равна 0, и въ которой, слѣд., кривая пересѣкаетъ ось отрицательныхъ x-овъ. Отложивъ $OQ = -0,425$, имѣемъ точку Q, въ которой кривая пересѣкаетъ ось отрицательныхъ y-овъ. Нанеся $OP' = 0,291$ и возставивъ въ точкѣ P' перпендикуляръ къ оси x-овъ, откладываемъ на немъ $P'M' = -0,488$ — ординату minimum. Нанеся $OP_1 = 0,721$, получаемъ другую точку P_1, въ которой кривая пересѣкаетъ ось x-овъ. $OP''' = 1,445$ даетъ точку P''', въ которой, проведя перп. $P''M'' = 6,821$, имѣемъ наибольшую ординату. Наконецъ, отложивъ $OI = \frac{3}{4}$ и проведя черезъ точку I параллель оси x-овъ, имѣемъ ассимптоту кривой, къ которой кривая неограниченно приближается, сливаясь съ нею на безконечныхъ разстояніяхъ отъ оси y-овъ.

Соединяя построенныя точки непрерывною кривою, получаемъ линію, представленную на черт. 133. Такъ какъ каждую свою величину дробь принимаетъ только два раза, при двухъ различныхъ значеніяхъ x (напр. $y = 3$ при $x = OT$ и $x = OI$), то всякая прямая параллельная xx' пересѣкаетъ кривую только въ двухъ точкахъ. Исключеніе составляютъ max и min. прямыя, параллельныя оси x и проведенныя отъ нея, одна въ разстояніи $-0,488$, другая $6,821$, встрѣчаютъ кривую, каждая въ одной точкѣ, иначе — касательныя къ кривой. Такимъ обр., кривая не можетъ представлять иныхъ изгибовъ, кромѣ указанныхъ на чертежѣ. Чертежъ наглядно показываетъ, что $-0,488$ есть наименьшая ордината или minimum дроби, а $6,821$ — наибольшая, или maximum дроби.

Задача II.

657. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{2x^2-3}{x^2+4x+5}$ *при непрерывномъ возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

1. *Maximum и minimum дроби.*—Приравнявъ дробь y-ку, получаемъ ур.

$$\frac{2x^2-3}{x^2+4x+5} = y, \quad \text{или} \quad (2-y)x^2 - 4y \,.\, x + 3 - 5y = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{-y^2+13y-6}}{2-y}.$$

Корни подрад. тринома суть: $y' = 0,48$ и $y'' = 12,52$, а какъ коэф. при y^2 отрицателенъ, то заключаемъ, что

$$\text{max. } (y) = 12,52; \quad \text{minimum } (y) = 0,48.$$

Соотвѣтствующія значенія x суть:

$$x_{\text{max.}} = \frac{2.12,52}{2-12,52} = -2,38; \quad x_{\text{min.}} = \frac{2.0,48}{2-0,48} = 0,63.$$

Такимъ образомъ дробь можетъ измѣняться только между предѣлами 0,48 и 12,52, принимая каждое свое значеніе между этими предѣлами два раза — при двухъ различныхъ значеніяхъ x.

2. *Нулевыя значенія дроби.*—Такъ какъ между предѣлами 0,48 и 12,52 не содержится нуль, то дробь ни при какомъ дѣйствительномъ x не обращается въ нуль. Это видно и изъ того, что, приравнивая числителя нулю, получаемъ ур. $2x^2+3=0$, имѣющее мнимые корни.

3. *Безконечныя значенія дроби.*—Дробь не обращается въ ∞, ибо корни знаменателя мнимые.

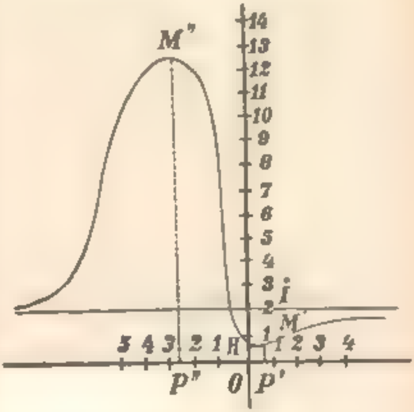
4. *Значенія дроби при $x=0$.*—Положивъ $x=0$, имѣемъ $y=\frac{3}{5}$. Сл. кривая пересѣкаетъ ось y на разстояніи $+\frac{3}{5}$ отъ начала.

5. *Предѣльныя значенія дроби.*—Какъ и въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что при $x=\pm\infty$, $y=2$. Слѣд. кривая неограниченно приближается къ ассимптотѣ, параллельной оси x и отстоящей отъ нея на 2.

Таблица измѣненій дроби.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	$+2$	
$-2{,}38$	$+12.52$(max.)	
0	$+\frac{3}{5}$	$+$
$+0{,}63$	$+0{,}48$ (min.)	
$+\infty$	$+2$	

Кривая измѣненій дроби.



Черт. 134.

$OP'=0{,}63$; $OP''=-2{,}38$;
$P'M'=0{,}48$; $P''M''=12{,}52$.
$OH=\frac{3}{5}$; $OI=2$.

Задача III.

658. *Изслѣдовать измѣненія дроби $\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

1. *Maximum* и *minimum*.—Положивъ

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}=y, \quad \text{или} \quad (1-y)x^2+4y\,.\,x-1-3y=0,$$

находимъ

$$x = \frac{-2y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 1}}{1 - y}.$$

Корни тринома $y^2 + 4y - 1$ суть: $y' = -4,236$; $y'' = 0,236$; а какъ коэффиціентъ при y^2 положителенъ, то

$$\max.\ (y) = -4,236; \quad \min.\ (y) = 0,236;$$

соотвѣтствующія значенія x суть: $x_{\max.} = 1,618$ $x_{\min.} = -0,617$.

2. Дробь не обращается въ нуль, ибо числитель $x^2 + 1$ существенно положителенъ.

3. Дробь обращается въ ∞, или претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при двухъ значеніяхъ x, обращающихъ знаменателя въ нуль: именно при $x' = 1$ и $x'' = 3$. Для опредѣленія знаковъ безконечности, замѣчаемъ, что числитель дроби при всякомъ x положителенъ, сл. нужно изслѣдовать знаки знаменателя. Обозначивъ буквою h произвольно малое полож. количество, замѣчаемъ, что $x = 1 - h$ и $x = 3 + h$ будутъ находиться внѣ корней знаменателя, и слѣд. при этихъ значеніяхъ x знаменатель положителенъ, а потому и $y > 0$; затѣмъ, $x = 1 + h$ и $x = 3 - h$ содержатся между корнями знаменателя, а потому знаменатель и вся дробь при этихъ значеніяхъ x отрицательны. Отсюда видно, что если измѣнять x отъ $-\infty$ непрерывно до $+\infty$, то при $x = 1$ и при $x = 3$ дробь претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $+\infty$ въ $-\infty$, въ первомъ случаѣ, т.-е. при $x = 1$, и изъ $-\infty$ въ $+\infty$ во второмъ, т.-е. при $x = 3$.

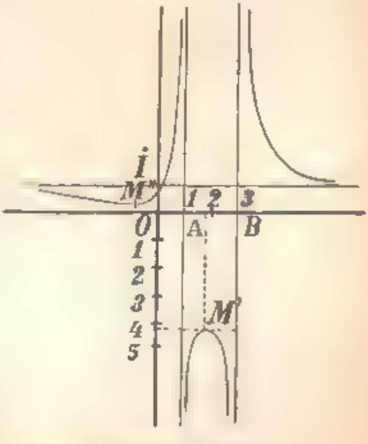
4. При $x = 0$ дробь обращается въ $\frac{1}{3}$.

5. При $x = \pm\infty$ она равна 1.

Таблица измѣненій дроби.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	1	$+$
$-0,617$	0,236 (min.)	
$1 - h$	$+\infty$	
$1 + h$	$-\infty$	$-$
1,618	$-4,236$ (max.)	
$3 - h$	$-\infty$	
$3 + h$	$+\infty$	$+$
$+\infty$	1	

Кривая измѣненій.



Черт. 135.

Кривая измѣненій дроби.—Намѣтивъ точки M' и M'', соотвѣтствующія max. и min. дроби, проводимъ чрезъ нихъ параллели оси x-овъ: кривая не имѣетъ точекъ между этими параллелями Затѣмъ наносимъ $OA = 1$ и $OB = 3$ и черезъ точки A и B проводимъ параллели оси y, которыя будутъ служить ассимтотами кривой въ мѣстахъ разрыва непрерывности. Такъ какъ при $x = \pm\infty$, $y = 1$, то параллель оси x на единичномъ отъ нея разстояніи будетъ служить 3-ею ассимтотою. Наконецъ, замѣчая, что для всѣхъ x-овъ, лежащихъ внѣ 1 и 3, дробь > 0, и < 0 для всѣхъ x-овъ, лежащихъ между 1 и 3, заключаемъ, что точки кривой для $x < 1$ и для $x > 3$ находятся въ области положит. ординатъ, точки же кривой для $1 < x < 3$ находятся въ области отрицат. ординатъ. Такимъ образ. получаемъ кривую, изображенную на черт. 135.

Задача IV.

659. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{2x^2-5x-4}{5x^2-8x-10}$ *при непрерывномъ измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

1. *Maximum* и *minimum*.—Положивъ

$$\frac{2x^2-5x-4}{5x^2-8x-10} = y,\quad \text{или}\quad (2-5y)x^2-(5-8y)x-4+10y=0,$$

находимъ

$$x = \frac{5-8y \pm \sqrt{264y^2-240y+57}}{2(2-5y)}.$$

Убѣдившись, что корни подрадикальнаго выраженія мнимые, заключаемъ, что оно всегда будетъ положительно, а потому дробь не имѣетъ ни max., ни min.

2. Приравнивая числителя нулю, найдемъ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ 0; эти значенія суть:

$$x' = -0{,}638 \text{ и } x'' = 3{,}188.$$

3. Приравнивая знаменателя 0, получимъ значенія x, при которыхъ дробь обращается въ ∞; эти значенія суть:

$$x_3 = -0{,}824 \text{ и } x_4 = 2{,}424.$$

Для опредѣленія знаковъ безконечности, даемъ дроби видъ:

$$y = \frac{2(x+0{,}638..)(x-3{,}138)}{5(x+0{,}824..)(x-2{,}424..)}.$$

Такъ какъ $x = -0{,}824 - h$ лежитъ какъ внѣ корней числителя, такъ и внѣ корней знаменателя, то и числ. и зн. дроби, а потому и самая дробь, положительны. $x = -0{,}824 + h$ находится внѣ корней числителя и внутри корней знаменателя, слѣд. при этомъ значеніи x числитель > 0, а знаменатель < 0, а потому дробь отрицательна. Заключаемъ, что при переходѣ x чрезъ $-0{,}824$ дробь претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, перескакивая изъ $+\infty$ въ $-\infty$. Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что когда x, возрастая, проходитъ чрезъ $+2{,}424$, дробь перескакиваетъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$.

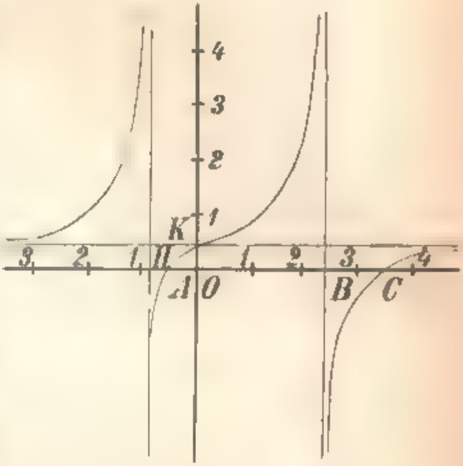
4. При $x = 0$ имѣемъ. $y = \frac{2}{5}$.

5. При $x = \pm\infty$, находимъ: $y = \frac{2}{5}$.

Таблица измѣненій дроби.

Значенія x	Значенія y	Знакъ y
$-\infty$	$+\frac{2}{5}$	
$-0,824-h$	$+\infty$	
$-0,824+h$	$-\infty$	
$-0,638$	0	
0	$+\frac{2}{5}$	$+$
$+2,424-h$	$+\infty$	
$2,424+h$	$-\infty$	$-$
$+8,138$	0	
$+\infty$	$+\frac{2}{5}$	$+$

Кривая измѣненій дроби.



Черт. 136.

Таблица измѣненій дроби показываетъ, что величина дроби постоянно увеличивается, но претерпѣваетъ два раза разрывъ непрерывности: одинъ разъ при переходѣ x чрезъ $-0,824$ другой разъ при переходѣ x чрезъ $2,424$; въ томъ и другомъ случаѣ дробь перескакиваетъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$.

Кривая измѣненій. Отложивъ на оси y линію $OK = +\frac{2}{5}$, проводимъ черезъ точку K параллель оси x; затѣмъ, отложивъ на оси x линіи $OH = -0,824$ и $OB = +2,424$, проводимъ черезъ точки H и B параллели оси y. Такимъ образомъ получаемъ три ассимптоты вѣтвей кривой. Отложивъ на оси x линіи: $OA = -0,638$ и $OC = 3,138$, получимъ точки, въ которыхъ кривая пересѣкаетъ ось xовъ. Ось y она пересѣкаетъ въ точкѣ K.

Задача V.

660. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$ *при непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

1. *Maximum* и *minimum*.—Положивъ

$$\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12} = y, \quad \text{или} \quad (2-y)x^2 - 7(1-y)x + 3(1-4y) = 0,$$

находимъ

$$x = \frac{7(1-y) \pm \sqrt{y^2+10y+25}}{2(2-y)}.$$

Замѣчая, что $y^2+10y+25=(y+5)^2$ и что, слѣд., подрадикальное выраженіе всегда положительно, заключаемъ, что дробь не имѣетъ ни max., ни min.

Если y-ку дадимъ какое-либо значеніе, то для x найдемъ два соотвѣтственныхъ значенія; только при $y=-5$, x принимаетъ одно значеніе $=3$. Итакъ, всякую свою величину дробь принимаетъ при двухъ различныхъ значеніяхъ x, кромѣ величины, равной -5. Значенія x, соотвѣтствующія данному y, суть:

$$x = \frac{7(1-y) \pm (y+5)}{2(2-y)}, \quad \text{или} \quad x=3 \quad \text{и} \quad x=\frac{1-4y}{2-y},$$

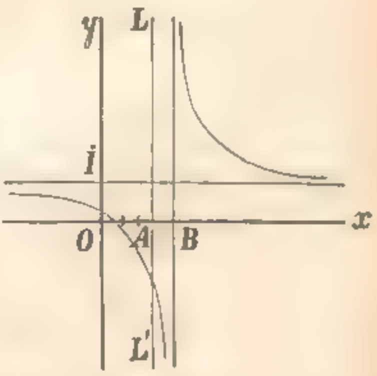
изъ которыхъ первое не зависитъ отъ y. Эта особенность объясняется тѣмъ, что числ. и знам. дроби имѣютъ общій корень $x=3$ и слѣд. при $x=3$ оба члена дроби равны 0, а дробь неопредѣленна.

Если сократить дробь на $x-3$, она приметъ видъ

$$Y=\frac{2x-1}{x-4}, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{1-4Y}{2-Y};$$

всякой величинѣ Y соотвѣтствуетъ *только одно* значеніе x, слѣд. при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ дробь $\frac{2x-1}{x-4}$ проходитъ *только одинъ разъ* чрезъ всякое свое значеніе; обращается въ 0 при $x=\frac{1}{2}$, и въ ∞ при $x=4$; а при $x=\pm\infty$ обращается въ 2. Замѣтимъ при этомъ, что при $x=4-h$, $Y=-\infty$, а при $x=4+h$, $Y=+\infty$, выразимъ ходъ измѣненій сокращенной дроби таблицей:

Значенія x	Сокращ. дробь Y	Знакъ Y
$-\infty$	2	
		+
$^1/_2$	0	
		−
$4-h$	$-\infty$	
$4+h$	$+\infty$	
		−
$+\infty$	2	



Черт. 137.

Что касается дроби $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$, то какъ она принимаетъ какую угодно величину при $x=3$, то чтобъ изобразить вполнѣ ея измѣненія, нужно къ кривой присоединить прямую LL′, параллельную оси Oy и пересѣкающую ось x-овъ въ разстояніи $OA=3$ отъ начала координатъ.

Задача VI.

661. *Изслѣдовать измѣненія дроби* $\frac{x^2-8x+15}{3x^2-24x+45}$ *при непрерывномъ измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Положивъ

$$\frac{x^2-8x+15}{3x^2-24x+45}=y,$$

или

$$(1-3y)x^2-8(1-3y)x+15(1-3y)=0,$$

или

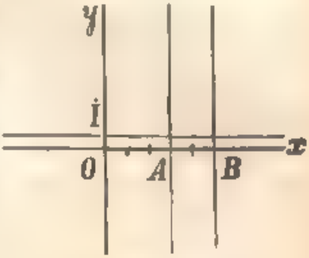
$$(1-3y)(x^2-8x+15)=0,$$

находимъ, что ур—ніе удовлетворяется при всякомъ y, когда $x^2-8x+15$ равно нулю, т.-е. когда $x=3$ и $x=5$, и, кромѣ того, при всякомъ x, если только $y=\frac{1}{3}$. Слѣд. при $x=3$ и $x=5$, y можетъ имѣть какую угодно величину, и кромѣ того $y=\frac{1}{3}$ при какомъ угодно x. Это объясняется тѣмъ, что оба члена дроби имѣютъ одинаковые корни

$$y=\frac{(x-3)(x-5)}{3(x-3)(x-5)};$$

при $x=3$ и $x=5$ величина дроби неопредѣленна; а если сократить дробь на $(x-3)(x-5)$, то y дѣлается $=\frac{1}{3}$, каковъ бы ни былъ x.

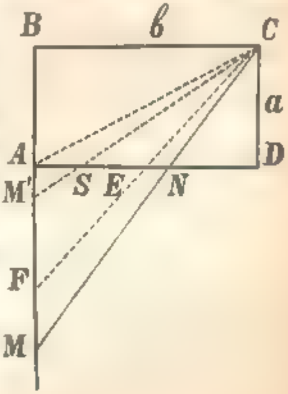
Совокупность рѣшеній ур—нія $x^2-8x+15=y(3x^2-24x+45)$, или $(x^2-8x+15)(3y-1)=0$ геометрически изображается двумя параллелями оси y, отстоящими отъ начала на $OA=3$ и $OB=5$, и параллелью оси x, отстоящею отъ начала на $OI=\frac{1}{3}$.



Черт. 138.

662. Задача. *На продолженіи стороны* AB *даннаго прямоугольника* ABCD *взять такую точку* M, *чтобы сумма площадей треугольниковъ* AMN *и* DCN *была minima.*

Когда точка M движется по прямой BM отъ A внизъ, сумма площадей, вначалѣ равная $\frac{1}{2}$ прямоугольника, начинаетъ уменьшаться: такъ для точки M′ треуг. CAS замѣняется меньшимъ M′AS; но когда точка M займетъ положеніе F, при которомъ $AF=AB$, сумма площадей снова становится равною $\frac{1}{2}$ прямоугольника, сл. при перемѣщеніи точки M отъ A къ F эта перемѣнная сумма прошла черезъ *minimum.*



Черт. 139.

Пусть $AB=a$, $BC=b$, $AM=x$: выраженіе суммы y будетъ:

$$y=\frac{x\times AN}{2}+\frac{a\times DN}{2}.$$

Но $\frac{AN}{x} = \frac{DN}{a} = \frac{b}{a+x}$, отсюда $AN = \frac{bx}{a+x}$, $DN = \frac{ab}{a+x}$, и слѣдоват.

$$y = \frac{bx^2}{2(a+x)} + \frac{ba^2}{2(a+x)}, \quad \text{или} \quad y = \frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)}.$$

Опредѣляемъ x такъ, чтобы сумма площадей имѣла величину m. Для этого беремъ ур—ніе

$$\frac{b(a^2+x^2)}{2(a+x)} = m, \quad \text{или} \quad bx^2 - 2mx + a(ab-2m) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - ab(ab-2m)}}{b} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Чтобы сумма площадей могла имѣть величину m, необходимо и достаточно, чтобы этой величинѣ m отвѣчало дѣйствительное и положительное значеніе x. Но x будетъ дѣйств., если $m^2 - ab(ab - 2m) \geqslant 0$,

или $$m^2 + 2abm - a^2b^2 \geqslant 0 \quad . \; . \; . \; (2).$$

A priori видно, что корни тринома (2) дѣйствительные, неравные и противоположнаго знака; слѣд. неравенство (2) будетъ удовлетворено такимъ положительнымъ m, которое не меньше положительнаго корня тринома; т.-е. необходимо, чтобы $m \geqslant ab(\sqrt{2} - 1)$. Итакъ, сумма площадей не можетъ быть $< ab(\sqrt{2} - 1)$; смотримъ, можетъ ли она равняться $ab(\sqrt{2} - 1)$. Когда m достигнетъ этого предѣла, тогда будетъ

$$x = \frac{m}{b} = a(\sqrt{2} - 1);$$

это значеніе x положительно и сл. можетъ быть взято; поэтому minimum $(y) = ab(\sqrt{2} - 1)$, а соотвѣтствующее значеніе $x = a(\sqrt{2} - 1)$.

Повѣрка. Полагаемъ $x = a(\sqrt{2} - 1) \pm h$, гдѣ h произвольно мало, и подставляемъ это значеніе x въ выраженіе функціи. Найдемъ

$$y = \frac{(2-\sqrt{2})a^2b \pm ab(\sqrt{2}-1)h + \frac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2} \pm h}.$$

Вопросъ приводится къ провѣркѣ неравенства:

$$\frac{(2-\sqrt{2})a^2b \pm ab(\sqrt{2}-1)h + \frac{bh^2}{2}}{a\sqrt{2} \pm h} > ab(\sqrt{2} - 1),$$

которое, по освобожденіи отъ знаменателя и по упрощеніи, приводится къ $\frac{bh^2}{2} > 0$, что вѣрно.

IV. Maxima и minima функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

663 *Произведеніе двухъ перемѣнныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна и равна a, возрастаетъ по мѣрѣ того, какъ абсолютное значеніе разности перемѣнныхъ уменьшается.*

Доказательство. Пусть перемѣнные множители будутъ x и y, а ихъ постоянная сумма пусть будетъ a:

$$x + y = a \; . \; . \; . (1) \; .$$

Взявъ тождества $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ и $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, и вычтя второе изъ перваго, найдемъ $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$.

Замѣнивъ $x + y$, въ силу условія (1), равнымъ количествомъ a, имѣемъ $a^2 - (x-y)^2 = 4xy$, что можно написать такъ:

$$xy = \frac{a^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} \; . \; . \; . (2).$$

Такъ какъ уменьшаемое $\frac{a^2}{4}$ сохраняетъ постоянную величину, то произведеніе будетъ измѣняться съ измѣненіемъ вычитаемаго, и именно, по мѣрѣ уменьшенія $(x-y)^2$, или, что то же, $|x - y|$, произведеніе xy будетъ увеличиваться. Отсюда слѣдуетъ, что xy достигнетъ maximum'a, когда $|x - y|$ достигнетъ minimum'a, и мы находимъ теорему:

Произведеніе двухъ перемѣнныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна (и равна a), *достигаетъ наибольшей величины, когда абсолютное значеніе ихъ разности достигаетъ своей наименьшей величины; въ частности, если эта разность можетъ обратиться въ 0, т.-е. если x можетъ сдѣлаться $= y$, то произведеніе будетъ имѣть maximum, когда множители сдѣлаются равными.*

Если имѣетъ мѣсто послѣдній случай, то maximum будетъ при $x = y = \frac{a}{2}$, а самый maximum будетъ $\frac{a^2}{4}$.

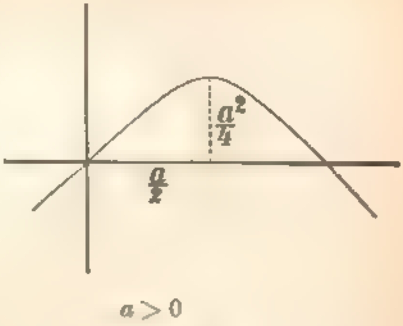
Примѣчаніе. Для этого послѣдняго случая можно доказать теорему еще такъ. Пусть одинъ множитель $= x$; другой будетъ $a - x$; произведеніе ихъ выразится формулою $y = x(a - x)$ или $-x^2 + ax$; это есть квадратный триномъ, свободный членъ котораго $= 0$. Изслѣдуемъ измѣненіе тринома при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Удобную для такого изслѣдованія форму мы найдемъ, придавая и вычитая $\frac{a^2}{4}$, что даетъ:

$$-\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + \frac{a^2}{4}, \text{ или } y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}.$$

При $x = -\infty$ и функція $y = -\infty$. При увеличеніи x отъ $-\infty$ до $\frac{a}{2}$, y возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$; затѣмъ при увеличеніи x отъ $\frac{a}{2}$ до $+\infty$, y

уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до $-\infty$. Получаемъ слѣдующія — таблицу и кривую измѣненій функціи:

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{4}$
$+\infty$	$-\infty$



Черт. 140.

Итакъ, произведеніе сперва возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$, а затѣмъ уменьшается отъ $\frac{a^2}{4}$ до $-\infty$; слѣд. оно не имѣетъ minimum'а, но имѣетъ maximum $= \frac{a^2}{4}$. Соотвѣтствующее значеніе x есть $\frac{a}{2}$, а другого множителя: $a - \frac{a}{2}$ или $\frac{a}{2}$, т.-е произведеніе получаетъ наибольшую величину, когда оба множителя дѣлаются равными, предполагая, что ихъ можно сдѣлать равными.

Косвенное доказательство. Вмѣсто того, чтобы изслѣдовать измѣненія произведенія $x(a-x)$, соотвѣтствующія измѣненію x отъ $-\infty$ до $+\infty$, можно предложить себѣ вопросъ: при какомъ значеніи x это произведеніе получаетъ данную величину m, изслѣдовать рѣшеніе, и такимъ образомъ найти, между какими предѣлами величина m произведенія можетъ измѣняться. Такимъ образомъ для опредѣленія x имѣемъ ур—ніе

$$x(a-x)=m, \quad \text{или} \quad x^2-ax+m=0,$$

откуда

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-m}.$$

Чтобы x было дѣйствительно, необходимо, чтобы подкоренное количество не было отрицательнымъ, т.-е. необходимо, чтобы $m \leqslant \frac{a^2}{4}$. Заключаемъ, что произведеніе m можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $\frac{a^2}{4}$; слѣдов. оно не имѣетъ minimum'а, но имѣетъ maximum $\frac{a^2}{4}$. Но когда $m=\frac{a^2}{4}$, радикалъ обращается въ 0, и $x=\frac{a}{2}$; поэтому и другой множитель, какъ равный $a-x$, обращается въ $\frac{a}{2}$, сл. произведеніе имѣетъ maximum, когда множители равны. Но не всегда x можетъ принимать значеніе $\frac{a}{2}$, соотвѣтствующее алгебраическому maximum'у.

664 Примѣры.—I. Произведеніе двухъ множителей, которыхъ сумма $=12$, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+36$; maximum произведенія равенъ 36, а соотвѣтствующіе множители равны, каждый, 6.

II. Произведеніе двухъ множителей, которыхъ сумма равна $=-12$, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+36$; слѣд. maximum произведенія равенъ $+36$, **каждый производитель $=-6$.**

665. Задача I. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ, какой имѣетъ наибольшую площадь?*

Если основаніе DE прямоугольника передвигать отъ вершины тр—ка до его основанія, то площадь прямоугольника будетъ измѣняться отъ нуля до нуля, и слѣд. проходитъ чрезъ maximum. Пусть b и h будутъ — основаніе и высота даннаго треугольника (черт. 37), x и y основаніе и высота вписаннаго прямоугольника DEFG. Площадь прямоугольника $=xy$. Изъ подобія треугольниковъ ABC и DBE имѣемъ: $\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}$, откуда $y=\frac{h}{b}(b-x)$; слѣдов. площадь xy выразится произведеніемъ:

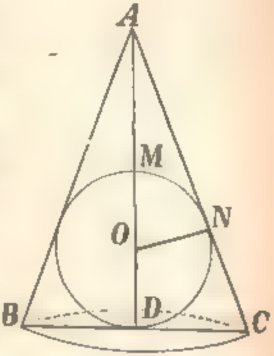
$$\frac{h}{b}x(b-x).$$

Такъ какъ постоянный множитель $\frac{h}{b}$ не вліяетъ на условія maxim., то вопросъ приводится къ опредѣленію max произведенія $x(b-x)$. Сумма множителей x и $b-x$ равна постоянной величинѣ b, слѣд. произведеніе имѣетъ maximum, когда множители равны, т.-е. когда $x=b-x$, откуда $x=\frac{b}{2}$; но въ такомъ случаѣ изъ ур—нія $y=\frac{h}{b}(b-x)$ найдемъ $x=\frac{h}{2}$, самая же максимальная площадь xy равна $\frac{bh}{4}$, т.-е. половинѣ площади треугольника. Итакъ: наибольшій изъ всѣхъ прямоугольниковъ, какой можно вписать въ треугольникъ, имѣетъ основаніе и высоту вдвое меньшія основанія и высоты треугольника.

Задача II. ***Изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, какой имѣетъ наименьшій объемъ?***

Пусть будетъ ABC конусъ, описанный около шара ON. Если его вершина A будетъ перемѣщаться по оси DA отъ M до безконечности, объемъ конуса будетъ измѣняться отъ ∞ до ∞, и слѣд. пройдетъ чрезъ minimum. Чтобы найти этотъ minimum, обозначимъ высоту DA буквою x, объемъ будетъ:

$$V=\frac{1}{3}\pi\,.\,CD^2\,.\,x.$$



Черт. 141.

Подобные тр—ки ACD и AON даютъ; $\frac{DC}{R}=\frac{x}{AN}$; но $AN^2=x(x-2R)$; слѣд.

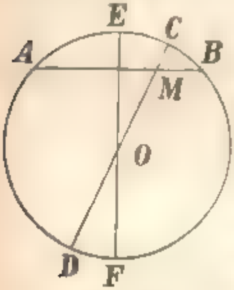
$$V=\frac{1}{3}\pi\,.\,\frac{R^2x^2}{x-2R}.$$

Постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi R^2$ не измѣняетъ условій minimum'а функціи, а потому V имѣетъ наим. вел. при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и $\frac{x^2}{x-2R}$. Но minimum этой функціи соотвѣтствуетъ maximum'у обратной: $\frac{x-2R}{x^2}$, которую можно представить въ видѣ: $\frac{1}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$; наконецъ, мы не измѣнимъ условій maximum'a, введя постоянный множитель 2R. Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ опредѣленію max. функціи

$$\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right).$$

Замѣчая, что сумма перемѣнныхъ факторовъ $\frac{2R}{x}$ и $1-\frac{2R}{x}$ равна постоянной величинѣ 1, заключаемъ, что произведеніе достигнетъ наибольшей величины, когда оба фактора сдѣлаются равными, т.-е. когда $\frac{2R}{x}=1-\frac{2R}{x}$, откуда $x=4R$, что не несовмѣстно съ свойствомъ задачи. Итакъ, описанный конусъ имѣетъ наименьшій объемъ, когда высота конуса вдвое больше діаметра; самый же объемъ $=\frac{8}{3}\pi R^3$, т.-е. вдвое больше шара.

666. Въ предыдущихъ параграфахъ мы не разъ дѣлали оговорку, что перемѣнныя x и y, сумма которыхъ постоянна, не всегда могутъ быть сдѣланы равными, по свойству самой задачи; таковы, напр., нѣкоторые вопросы геометріи. Въ такихъ случаяхъ произведеніе достигаетъ maximum'a, когда абсолютное значеніе разности перемѣнныхъ достигаетъ minimum'a. Вотъ нѣсколько задачъ, иллюстрирующихъ подобные случаи.



Черт. 142.

Задача I. *Данъ кругъ и хорда* AB; *провести діаметръ такъ, чтобы произведеніе отрѣзковъ* CM *и* DM, *образуемыхъ на немъ хордою, имѣло наибольшую величину.*

Сумма отрѣзковъ CM и MD, при всякомъ положеніи діаметра, постоянна; но эти отрѣзки не могутъ быть сдѣланы равными; слѣд. ихъ произведеніе достигнетъ наибольшей величины, когда разность ихъ будетъ наименьшая, а это будетъ тогда, когда отрѣзокъ MD достигнетъ своего наименьшаго, а отрѣзокъ CM своего наибольшаго значенія, т.-е. когда діаметръ станетъ перпендикуляренъ къ хордѣ. Требуемый діаметръ есть EF.

Задача II. *Найти maximum произведенія* $(3-x^2)(7+x^2)$?

Сумма факторовъ постоянна и равна 10; приравнивая ихъ, получаемъ ур—ніе $3-x^2=7+x^2$, или $x^2=-2$, равенство невозможное ни при какомъ дѣйствительномъ x. Итакъ, находимъ minimum абсолютной величины ихъ разности: $2x^2+4$. Minimum этого бинома, очевидно, есть 4, достигаемый при $x=0$; слѣд. maximum произведенія равенъ 21, при $x=0$.

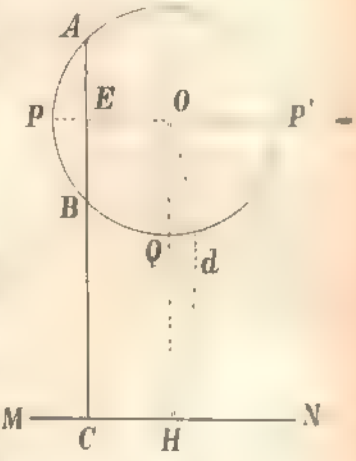
Задача III. *Даны: кругъ* O *и внѣ его прямая* MN. *Пусть* ABC *будетъ другая прямая, перпендикулярная къ* MN *и пересѣкающая кругъ въ точкахъ* A *и* B, *а прямую* MN *въ точкѣ* C. *При какомъ положеніи прямой* AC *произведеніе* $AB \times BC$ *достигаетъ наибольшей величины?*

Произведеніе $AB \times BC$ будетъ имѣть maximum при тѣхъ же обстоятельствахъ, какъ и половина этого произведенія

$$\frac{AB}{2} \times BC.$$

Проведя чрезъ центръ параллель PP′ къ линіи MN, пересѣкающую AB въ E, замѣчаемъ, что $\frac{AB}{2} = EB$. Такимъ образомъ, вопросъ приводится къ изученію измѣненій произведенія $EB \times BC$, котораго множители имѣютъ постоянную сумму, ибо

$$BE + BC = EC = OH = d \text{ (пост.)}.$$



Черт 143

Нужно различать два случая:

I. $OQ < QH$. Перемѣщая точку B по окружности, замѣчаемъ, что BE всегда остается меньше OQ, а BC всегда больше QH; слѣд.

$$BE < OQ < QH < BC,$$

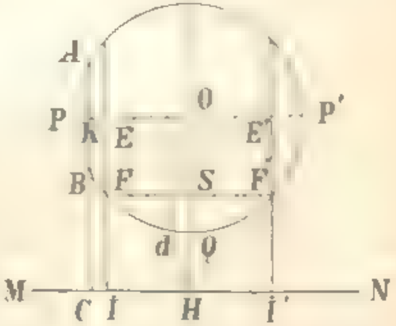
а потому $BE < BC$. Такимъ образомъ, сомножители BE и BC никогда не могутъ сдѣлаться равными; заключаемъ, что ихъ произведеніе достигнетъ maximum'a, когда разность $BC - BE$ достигнетъ minimum'a; а это будетъ тогда, когда уменьшаемое BC достигнетъ своего minimum'a QH, а вычитаемое BE — своего maximum'a OQ, т. е. когда прямая EC приметъ положеніе OH. Итакъ, *maximum произведенія* $= 2OQ \times QH = 2R(d - R)$, если положить $OQ = R$ и $OH = d$.

II. $OQ > QH$.— Въ этомъ случаѣ существуетъ два положенія сѣкущей при которыхъ будетъ $KB = BC$; ибо средина S прямой OH лежитъ въ этомъ случаѣ между O и Q, и потому параллель къ MN чрезъ S пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ F и F′, и сѣкущія EI, E′I′ даютъ

$$EF = FI = E'F' = F'I' = \frac{OH}{2}.$$

Такимъ образомъ, произведеніе получаетъ относительный *maximum* въ двухъ положеніяхъ сѣкущей; *этотъ maximum*

$$= 2EF \times FI = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^2}{2}.$$



Черт. 144.

Кромѣ того, въ этомъ случаѣ сѣкущая OH даетъ *относительный minimum*. Въ самомъ дѣлѣ, измѣненія произведенія, отвѣчающія измѣненіямъ разности $BC - BK$ при перемѣщеніи точки B по дугѣ PQP′, видны изъ слѣдующей таблицы:

Когда точка B находится въ. . . .	P	. . . .	F	. . . .	Q	. . . .	F'	. . . .	P'
Разность BC — BK	d	умен. до	0	увел. до	$2R - d'$	умен. до	0	увел. до	d.
Произв. 2BK . BC . . .	0	увел до	$\frac{d^2}{2}$	умен. до	$2R(d - R)$	увел. до	$\frac{d^2}{2}$	умен. до	0

Итакъ, дѣйствительно имѣетъ мѣсто относительный minimum $= 2R(d - R)$, когда B находится въ Q.

667. Теорема. *Произведенiе нѣсколькихъ положительныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна, и которые никакимъ другимъ условiямъ не подчинены, не можетъ быть больше произведенiя, полученнаго отъ замѣны каждаго изъ этихъ множителей ихъ ариѳметическою срединою.*

Эта теорема была нами доказана для случая *двухъ* перемѣнныхъ множителей, сумма которыхъ сохраняетъ постоянную величину, причемъ не было необходимости налагать условiя, чтобы множители были положительны.

Но распространенiе теоремы на опредѣленное число множителей, большее двухъ, требуетъ, чтобы множители могли принимать только положительныя значенiя.

Обычное доказательство теоремы, которое приведено было въ 1-мъ изданiи нашего курса, не свободно отъ нѣкоторыхъ возраженiй, и потому замѣнено было, почти одновременно (въ 1887 г.), строгими доказательствами: одно изъ нихъ дано академикомъ *Г. Дарбу* (деканомъ парижскаго Факультета Наукъ), другое — профессоромъ Сорбонны *Гурза*. По строгости и изяществу прiемовъ оба доказательства принадлежатъ къ образцовымъ, оба заслуживаютъ одинаковаго вниманiя; приводимъ и то и другое.

Доказательство Дарбу. Пусть дано m независимыхъ перемѣнныхъ положительныхъ и имѣющихъ постоянную сумму

$$x > 0,\quad y > 0, \ldots,\quad z > 0,\quad t > 0,\quad x + y + \cdots + z + t = \text{const}.$$

Покажемъ сначала, что если теорема вѣрна для m множителей, то она будетъ вѣрна и тогда, когда число множителей будетъ *вдвое* больше (доказательство отъ m къ $2m$). Присоединимъ къ m даннымъ множителямъ еще m положительныхъ множителей: $x', y', \ldots z', t'$ и пусть будетъ произведенiе

$$P = xy \ldots zt \,.\, x'y' \ldots z't',$$

состоящее изъ $2m$ положительныхъ множителей. Пусть будетъ a — ариѳметическая средина этихъ $2m$ множителей:

$$2ma = x + y + \cdots + z + t + x' + y' + \cdots + z' + t';$$

пусть, далѣе, будетъ b — ариѳм. средина m первыхъ, b' — ариѳм. средина m прибавленныхъ множителей, т.-е.

$$mb = x + y + \cdots + z + t,\quad mb' = x' + y' + \cdots + z' + t'.$$

Очевидно, имѣемъ

$$m(b + b') = 2ma,\quad \text{или}\quad b + b' = 2a,$$

а этимъ доказано, что a есть ариѳм. средина b и b'.

Помня это, замѣчаемъ, что какъ, по допущенію, теорема справедлива для случая m множителей, то

$$xy\ldots zt \leqq b^m,\quad x'y'\ldots z't' \leqq b'^m.$$

Перемноживъ почленно, имѣемъ

$$P \leqq (bb')^m.$$

Но a есть ариѳм. средина для b и b', и теорема доказана для двухъ множителей, то

$$bb' \leqq a^2,$$

и слѣд., тѣмъ болѣе

$$P \leqq a^{2m}:$$

этимъ доказано, что теорема вѣрна для $2m$ множителей, если она вѣрна для m. Но она доказана для двухъ множителей, слѣдов. доказана и для 4-хъ; а если такъ, то и для 8-ми, 16-ти и т. д., вообще для случая, когда число множителей есть степень 2.

Теперь уже не трудно распространить ее на какое угодно число множителей. Въ с. д., пусть будетъ P—произведеніе m положительныхъ множителей (m—какое угодно), и пусть ихъ ариѳм. средина $= a$. Пусть, затѣмъ, q будетъ такое цѣлое число, чтобы $m+q$ было степенью 2-хъ. Присоединяя къ m множителямъ произведенія P, q множителей равныхъ a, получимъ новое произведеніе, Pa^q, состоящее изъ $m+q$ множителей, которыхъ ариѳм. средина опять $= a$. Такъ какъ число $m+q$ множителей этого новаго произведенія есть степень 2, то по доказанному имѣемъ: $Pa^q \leqq a^{m+q}$, откуда, по сокращеніи на положительное число a^q, что не измѣнитъ смысла неравенства, найдемъ

$$P \leqq a^m,$$

что и требовалось доказать.

Это доказательство показываетъ, кромѣ того, что произведеніе P остается *меньше* a^m, пока есть въ немъ множитель отличный отъ a; въ с. д., это имѣетъ мѣсто для двухъ множителей, слѣд. будетъ имѣть мѣсто и для всѣхъ случаевъ.

Итакъ, произведеніе *равно* a^m только тогда, когда всѣ множители равны. Отсюда теорема:

произведеніе нѣсколькихъ положительныхъ перемѣнныхъ множителей, сумма которыхъ постоянна, имѣетъ maximum, когда всѣ множители равны (если только ихъ можно сдѣлать равными, что бываетъ не всегда).

Доказательство Гурза. Удерживая прежнія обозначенія, замѣчаемъ, что произведеніе $P = xy\ldots zt$ есть функція $m-1$ независимыхъ перемѣнныхъ, ибо количествамъ $y, z\ldots t$ можно дать какія угодно положительныя значенія, лишь бы сумма ихъ была меньше ma, а затѣмъ x-су даемъ значеніе $ma-(y+z+\cdots+t)$. Между различными системами значеній, какія можно давать нашимъ перемѣннымъ съ соблюденіемъ сказаннаго условія, есть одна, и только одна, когда всѣ значенія равны, и слѣд. каждое $= a$. Произведеніе P_1 приметъ тогда значеніе a^m; а соотвѣтствующую систему равныхъ перемѣнныхъ назовемъ

$$x_1 = y_1 = \cdots = z_1 = t_1 = a\ldots(1).$$

Пусть будетъ взята другая система положительныхъ множителей:

$$x_2,\quad y_2, \ldots, \quad z_2,\quad t_2 \ldots (2),$$

сумма которыхъ постоянна, и пусть произведеніе ихъ будетъ P_2:

$$P_2 = x_2 y_2 \ldots z_2 t_2.$$

Теорема состоитъ въ томъ, что P_2 будетъ необходимо меньше a^m.

Между значеніями системы (2) необходимо существуетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ множитель большій a, ибо положивъ, что всѣ они не больше a, т.-е. что

$$x_2 \leqq a,\quad y_2 < a, \ldots, \quad z_2 \leqq a,\quad t_2 \leqq a,$$

то какъ не дано, что всѣ они равны a, т.-е.

$$x_2 = a,\quad y_2 = a, \ldots, \quad z_2 = a,\quad t_2 = a,$$

мы имѣли бы

$$x_2 + y_2 + \ldots + z_2 + t < ma,$$

что противно условію. Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что въ числѣ значеній системы (2) необходимо хотя одно будетъ $< a$. Пусть это будутъ значенія

$$x_2 = a + h,\quad y_2 = a - k,\quad \text{гдѣ}\quad h > 0,\quad 0 < k < a.$$

Не трогая другихъ множителей произведенія P_2, замѣнимъ $a + h$ чрезъ a, и $a - k$ чрезъ $a + h - k$, получимъ систему

$$a,\quad a + h - k, \ldots, \quad z_2,\quad t_2 \ldots (3),$$

въ которой всѣ члены положительны, а сумма не измѣнится, ибо не измѣнилась и сумма измѣненныхъ членовъ системы: какъ прежде, такъ и теперь послѣдняя $= 2a + h - k$. Новое произведеніе

$$P_3 = a(a + h - k) \ldots z_2 t_2,$$

а предшествующее

$$P_2 = (a + h)(a - k) \ldots z_2 t_2.$$

Но

$$(a + h)(a - k) = a^2 + a(h - k) - hk,$$

тогда какъ

$$a(a + h - k) = a^2 + a(h - k);$$

слѣд. мы замѣнили положительное произведеніе двухъ факторовъ большимъ произведеніемъ, не измѣняя положительнаго произведенія прочихъ $m - 2$ факторовъ, а слѣд. произведеніе всѣхъ m факторовъ мы увеличили. Такимъ образомъ $P_3 > P_2$. Кромѣ того, въ системѣ (3), по крайней мѣрѣ, однимъ факторомъ, равнымъ a, стало больше, нежели въ системѣ (2).

Если всѣ значенія, составляющія систему (3), равны a, то теорема доказана, ибо тогда $P_3 = a^m$, между тѣмъ какъ $P_2 < a^m$. Въ противномъ случаѣ оперируемъ надъ системою (3) такъ же, какъ мы оперировали надъ (2): составимъ новую систему (4) значеній, положительныхъ и имѣющихъ данную сумму; этой системѣ будетъ соотвѣтствовать значеніе P_4 произведенія, большее P_3, и въ немъ будетъ, по крайней мѣрѣ, однимъ значеніемъ, равнымъ a, больше, чѣмъ въ системѣ (3). Если всѣ значенія системы (4) равны a, то теорема доказана, ибо тогда P_4 будетъ $= a^m$, между тѣмъ какъ $P_2 < P_3 < a^m$. Если же нѣтъ, то начинаемъ снова ту же операцію, и кончимъ тѣмъ, что получимъ систему (1); а какъ каждый разъ значеніе произведенія увеличивается, то его начальное значеніе P_2 навѣрное меньше окончательнаго значенія a^m, которое, слѣдов., и есть искомый maximum.

668. Задача I. *Какой изъ всѣхъ треугольниковъ одинаковаго периметра имѣетъ наибольшую площадь?*

Пусть перемѣнныя стороны будутъ x, y, z; $2p$—постоянный периметръ; по условію, $x + y + z = 2p$.

Площадь S треугольника по тремъ сторонамъ выражается формулою

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Функція S имѣетъ maximum при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и ея квадратъ; притомъ, откинувъ постоянный множитель, мы опять не измѣнимъ условій maximum'а; так. обр. приводимъ вопросъ къ опредѣленію max. произведенія $(p-x)(p-y)(p-z)$. Каждый множитель этого произведенія положителенъ, сумма ихъ $= (p-x) + (p-y) + (p-z) = 3p - (x + y + z) = p$—величинѣ постоянной; слѣд. произведеніе достигнетъ maximum'а, когда всѣ множители сдѣлаются равными, т.-е. когда $p - x = p - y = p - z$, или $x = y = z$. Слѣд. искомый треугольникъ—*правильный*. Каждая сторона его $= \frac{2}{3}p$, а площадь $= \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$.

669. Задача II. *Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелопипедовъ, имѣющихъ одинаковую полную поверхность, имѣетъ наибольшій объемъ?*

Пусть x, y и z будутъ перемѣнныя измѣренія этихъ параллелопипедовъ, S—данная полная поверхность; имѣемъ:

$$S = 2xy + 2xz + 2yz.$$

Перемѣнный объемъ $U = xyz$. Его maximum будетъ при тѣхъ же условіяхъ, какъ maximum его квадрата: $U^2 = (xy)(xz)(yz)$. Но эти три положительныхъ множителя имѣютъ постоянную сумму $\frac{S}{2}$, слѣдов. maximum имѣетъ мѣсто при $xy = xz = yz$, откуда: $x = y = z$. Это значитъ, что наибольшій объемъ имѣетъ кубъ; величина максимальнаго объема $= x.x.x = x^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

670. Задача III. *Зная, что* $mx^\alpha + ny^\beta + pz^\gamma = q$, *найти maximum произведенія* $x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

Произведеніе $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ имѣетъ maximum при тѣхъ же обстоятельствахъ какъ и $mnp \,.\, x^\alpha y^\beta z^\gamma$ т.-е. какъ и $(mx^\alpha)(ny^\beta)(pz^\gamma)$; но сумма факторовъ этого послѣдняго произведенія постоянна (и равна q), слѣд. это произведеніе, а съ нимъ и предложенное, имѣетъ maximum, когда множители равны, т.-е. когда $mx^\alpha = ny^\beta = pz^\gamma = \frac{q}{3}$. Такимъ образомъ, максимальное значеніе предложеннаго произведенія $= \frac{q^3}{27mnp}$.

Напр., найдемъ, что произведеніе xy, при условіи $3x + 4y = 12$, имѣетъ maximum $= 3$, при $x = 2$ и $y = \frac{3}{2}$. — Произведеніе x^2yz^3, при условіи $3x^2 + 5y + 7z^3 = 315$, имѣетъ maximum $= 35.21.15$, при $x = \sqrt{35}$, $y = 21$, $z = \sqrt[3]{15}$.

671. *Примѣчаніе I.* Въ теоремѣ (§ 667) было дано, что перемѣнныя x, y, z, . . . подчиняются *только одному условію*, чтобы сумма ихъ была постоянна; если же эти перемѣнныя будутъ подчинены еще другимъ условіямъ (выражаемымъ равенствами или неравенствами), то мы уже не имѣемъ права замѣнять два множителя $a + h$, $a - k$, одинъ числомъ a, другой числомъ $a + h - k$, не измѣняя другихъ, ибо новое произведеніе можетъ уже не удовлетворять прочимъ условіямъ, кромѣ относящагося къ суммѣ. Слѣд. приведенное доказательство было бы неприложимо. Вообще, множители не могутъ быть равными, имѣть постоянную сумму и удовлетворять еще другимъ условіямъ; такъ что теорема § 667, вообще, не будетъ имѣть мѣста: maximum произведенія будетъ вообще меньше той величины произведенія, какую оно имѣетъ при равенствѣ множителей.

Разсмотримъ, наприм., произведеніе трехъ положительныхъ чиселъ x, y, z, сумма которыхъ постоянна и $= 12$, слѣд. удовлетворяющихъ условію

$$x + y + z = 12 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Пусть, кромѣ того, числа эти связаны еще условіемъ

$$x + 5y + 2z = a \quad . \; . \; . \; (2),$$

гдѣ a — постоянная величина. Назовемъ перемѣнное произведеніе, удовлетворяющее этимъ двумъ условіямъ, черезъ P. Разсмотримъ также произведеніе Q трехъ положительныхъ чиселъ x, y, z, удовлетворяющихъ только условію (1). Maximum произведенія Q будетъ имѣть при $x = y = z = 4$; самый же max. $= 64$. Что касается перемѣннаго произведенія P, область его значеній будетъ ограниченнѣе области значенія Q: произведеніе P не можетъ принимать всѣхъ значеній, которыя можетъ имѣть Q; въ самомъ дѣлѣ: для составленія Q нужно отыскать всѣ системы положительныхъ рѣшеній, удовлетворяющихъ неопредѣленному ур—нію (1). Для составленія же значеній, которыя можетъ принимать произведеніе P, нужно изъ всѣхъ сказанныхъ системъ выбрать только тѣ, которыя удовлетворяютъ и ур—нію (2). Отсюда очевидно, что, во-первыхъ, maximum (P) не можетъ быть больше maximum'а Q, во-вторыхъ, что только въ исключительномъ случаѣ maximum произведенія P будетъ равенъ max. (Q), вообще же maximum P будетъ меньше maximum'а Q.

Сказанный исключительный случай—тотъ, когда ур—ніе (2) удовлетворится величинами $x = y = z = 4$, что имѣетъ мѣсто при $a = 4 + 5 \times 4 + 2 \times 4 = 32$: въ этомъ случаѣ 64 будетъ находиться въ числѣ значеній, которыя принимаетъ P, а такъ какъ max. (P) не можетъ быть больше max. (Q), и 64 есть max. произведенія Q, то тѣмъ болѣе 64 будетъ служить maximum'омъ и P.

Обобщая это разсужденіе, заключаемъ, что если факторы произведенія положительны, имѣютъ постоянную сумму и подчинены еще другимъ условіямъ, maximum произведенія вообще меньше той величины его, какую оно получаетъ, если всѣ множители сдѣлать равными; этой послѣдней величинѣ maximum произведенія равенъ только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда всѣ условія, которымъ факторы подчинены, удовлетворяются, когда сдѣлать эти факторы равными.

Интересный примѣръ на этотъ исключительный случай представляетъ произведеніе $x^m y^n z^p$, состоящее изъ m множителей равныхъ x, n—равныхъ y, и p множителей равныхъ z, съ условіемъ, что сумма $mx + ny + pz$ всѣхъ множителей равна постоянному a.

На основаніи сказаннаго выше, это произведеніе будетъ имѣть max., когда всѣ множители равны, если только равенство факторовъ будетъ совмѣстно съ остальными условіями, которымъ множители подчинены.

Равенство m множителей x су дастъ $m - 1$ соотношеніе; подобно этому имѣемъ еще $n - 1$ и $p - 1$ условій, что составляетъ $m + n + p - 3$ условія; присоединивъ еще равенство суммы всѣхъ множителей количеству a, получимъ $m + n + p - 2$ соотношенія; присоединяя еще два ур—нія $x = y = z$, всего будемъ имѣть $m + n + p$ ур—ній для опредѣленія столькихъ же количествъ, а это вообще возможно. Слѣд., въ этомъ случаѣ наибол. вел. произведеніемъ достигается при

$$x = y = z = \frac{a}{m + n + p}.$$

672. *Примѣчаніе II.* При доказательствѣ теоремы (667) мы предполагали, что всѣ множители положительны. Но теорема, очевидно, имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда *всѣ* множители отрицательны, если только число ихъ *четное*. Если же всѣ множители отрицательны и число ихъ нечетное, то произведеніе будетъ minimum, когда всѣ множители равны. Въ самомъ дѣлѣ, если, взявъ произведеніе нечетнаго числа положительныхъ множителей, перемѣнимъ у нихъ знаки, то и знакъ произведенія перемѣнится. Но если функція U имѣетъ maximum M, то функція (— U) имѣетъ minimum (— M); потому что, если M есть max. (U), то $U < M$ для всѣхъ значеній этой функціи, близкихъ къ M; а изъ неравенства $U < M$ имѣемъ $- U > - M$, слѣд. — M есть minimum функціи (— U).

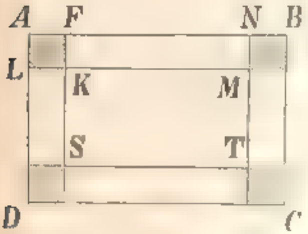
Наконецъ, если не всѣ множители отрицательны, то произведеніе не имѣло бы maximum'а, ибо при постоянной суммѣ множителей ихъ абсолютная величина могла бы увеличиваться неопредѣленно; и если число отрицательныхъ множителей четное, произведеніе было бы положительно и могло бы быть какъ угодно велико.

673. *Примѣчаніе III.* Для двухъ множителей теорема о max. произведенія была доказана еще *Никомахомъ* 100 лѣтъ спустя послѣ Р. Х.

674. Когда множители, имѣя постоянную сумму, не могутъ быть сдѣланы равными, прямое приложеніе теоремы (667) становится невозможно. Однако же, методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ даетъ возможность непрямого примѣненія теоремы. Приводимъ въ поясненіе сказаннаго слѣдующую задачу.

Задача. *Въ прямоугольномъ картонномъ листѣ, стороны котораго равны a и b, требуется вынуть по угламъ такіе равные квадраты*

AFKL,..., *чтобы, загнувъ всѣ четыре прямоугольника* FKMN... *перпендикулярно къ плоскости* KMST, *составить коробку наибольшей вмѣстимости?*



Черт. 145.

Пусть $AF = x$, $AB = b$, $AD = a$; стороны основанія коробки выразятся формулами $a - 2x$ и $b - 2x$, высота — x. Объемъ V коробки (какъ прямоугольнаго параллелопипеда)

$$V = (a - 2x)(b - 2x) \,.\, x.$$

Чтобы сдѣлать сумму множителей постоянною, введемъ множитель 4 (введеніе постояннаго множителя 4 не вліяетъ на условія maximum'a); получимъ:

$$4V = (a - 2x)(b - 2x)\,4x,$$

т.-е. произведеніе положительныхъ перемѣнныхъ множителей, которыхъ сумма $(a - 2x) + (b - 2x) + 4x$ равна постоянной величинѣ $a + b$; но какъ $b > a$, то ни при какомъ x нельзя сдѣлать $a - 2x = b - 2x$, и теорему (667) въ данномъ случаѣ нельзя примѣнить непосредственно. Чтобы найти maximum произведенія $(a - 2x)(b - 2x)x$, замѣтимъ, что, не измѣняя условій max., мы можемъ умножить два изъ этихъ трехъ факторовъ на *произвольныя постоянныя* количества, напр., первый на α, второй на β, и искать maximum произведенія

$$V\alpha\beta = (a\alpha - 2\alpha x)(b\beta - 2\beta x)x.$$

Пользуясь неопредѣленностью постоянныхъ α и β, можно выбрать ихъ такъ, чтобы сумма всѣхъ трехъ множителей была постоянна. Представивъ эту сумму въ видѣ

$$a\alpha + b\beta - (2\alpha + 2\beta - 1)x,$$

находимъ, что она будетъ независима отъ x и слѣдовательно постоянна, когда $2\alpha + 2\beta - 1 = 0$. Такимъ образомъ α и β должны удовлетворять неопредѣленному ур—нію, и слѣд. существуетъ безчисленное множество паръ значеній α и β, дѣлающихъ нашу сумму постоянной. Но изъ этихъ паръ надо выбрать такую пару значеній α и β, при которой множители были бы равны. Итакъ, для опредѣленія α, β и x имѣемъ 3 ур—нія:

$$2\alpha + 2\beta - 1 = 0 \;\ldots\; (1) \quad \alpha(a - 2x) = x \;\ldots\; (2) \quad \beta(b - 2x) = x \;\ldots\; (3).$$

Имѣя 3 ур—нія съ 3 неизвѣстными, мы получимъ опредѣленныя значенія для α, β и x; но намъ нѣтъ надобности опредѣлять α и β, а только x; съ этою цѣлью исключаемъ изъ ур—ній (1), (2) и (3) α и β, чтобы получить ур—ніе съ однимъ неизвѣстнымъ x. Изъ (2) и (3) имѣемъ

$$\alpha = \frac{x}{a - 2x}, \quad \beta = \frac{x}{b - 2x};$$

подставивъ въ (1) эти значенія α и β, имѣемъ ур.

$$\frac{2x}{a - 2x} + \frac{2x}{b - 2x} - 1 = 0,$$

или

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0 \ . \ . \ . (4).$$

Это ур—ніе и даетъ такой x, при которомъ $V\alpha\beta$, а сл. и V имѣетъ maximum. Рѣшая это ур., имѣемъ

$$x = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Оба корня дѣйствительны, ибо $a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab + ab = (a-b)^2 + ab$ — количеству положительному; они положительны, такъ какъ произведеніе и сумма корней положительны. Но чтобы корень ур—нія (4) давалъ рѣшеніе задачи, недостаточно, чтобы онъ былъ дѣйств. и положит.; нужно еще, чтобы онъ былъ меньше половины меньшей стороны прямоугольника ABCD. Пусть $a < b$; тогда можно взять оба или одинъ корень, смотря по тому, будутъ ли оба они или только одинъ заключаться между 0 и $\frac{a}{2}$. Подстановка въ первую часть ур—нія (4) вмѣсто x количествъ 0, $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ даетъ

$$+ab, \quad a(a-b), \quad b(b-a):$$

первый результатъ положителенъ, сл. 0 заключается внѣ корней; второй рез. отрицателенъ (ибо $a < b$), слѣд. $\frac{a}{2}$ лежитъ между корнями; третій результатъ положителенъ, сл. $\frac{b}{2}$ — внѣ корней. Такимъ образомъ, называя x' меньшій корень, x'' большій, имѣемъ

$$0 < x' < \frac{a}{2} < x'' < \frac{b}{2},$$

откуда слѣдуетъ, что большій корень x'', какъ большій $\frac{a}{2}$, не можетъ служить отвѣтомъ; меньшій же корень x', будучи меньше $\frac{a}{2}$, и служитъ отвѣтомъ на задачу. Итакъ высота коробки наибольшаго объема равна

$$x' = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}.$$

Когда $a = b$, т.-е. картонъ имѣетъ форму квадрата, прямо изъ послѣдней формулы находимъ: $x = \frac{a}{6}$.

Примѣчаніе. Если произведеніе содержитъ n перемѣнныхъ множителей, зависящихъ отъ x, то произвольныхъ постоянныхъ надо брать $n-1$; вмѣстѣ съ x они составятъ n неизвѣстныхъ. Требованіе, чтобы сумма факторовъ равнялась постоянной, даетъ 1 ур., а сравненіе n множителей дастъ $n-1$ ур—ній, всего n ур—ній, т.-е. сколько неизвѣстныхъ; поэтому, метода—общая.

Приложеніе способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ вопросамъ о max. и min. принадлежитъ *Грилье*.

675. Теорема. *Если сумма нѣсколькихъ положительныхъ перемѣнныхъ x, y, z постоянна и равна a, то произведеніе $x^p y^q z^r$, гдѣ p, q, r данныя положительныя числа, имѣетъ maximum, когда перемѣнныя* *пропорціональны своимъ показателямъ, т.-е. когда* $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$, *полагая, что* x, y *и* z *могутъ удовлетворить этимъ условіямъ.*

Пусть, во-первыхъ, p, q и r будутъ числа цѣлыя.

Замѣчая, что введеніе постоянныхъ множителей не измѣнитъ условій maximum'a, заключаемъ, что данное выраженіе будетъ имѣть max. при такихъ же x, y, z, какъ и

$$\frac{x^p y^q z^r}{p^p q^q r^r}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q \left(\frac{z}{r}\right)^r,$$

или

$$\underbrace{\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{p}}_{p\ \text{множит}}\times\underbrace{\frac{y}{q}\cdot\frac{y}{q}\cdot\ldots\cdot\frac{y}{q}}_{q\ \text{множит}}\times\underbrace{\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdot\ldots\cdot\frac{z}{r}}_{r\ \text{множит.}}$$

Произведеніе это состоитъ изъ $p+q+r$ множителей, которыхъ сумма постоянна и равна a, такъ какъ $\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots+\frac{x}{p}=\frac{x}{p}\cdot p=x$, $\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\ldots+\frac{y}{q}=\frac{y}{q}\cdot q=y$ и $\frac{z}{r}+\ldots+\frac{z}{r}=r\cdot\frac{z}{r}=z$. Примѣняя сюда теорему § 667, заключаемъ, что произведеніе достигнетъ maximum'a, когда множители сдѣлаются равными, т.-е. когда

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}.$$

Пользуясь извѣстнымъ свойствомъ равныхъ отношеній и помня, что $x+y+z=a$, имѣемъ:

$$x=\frac{pa}{p+q+r}, \qquad y=\frac{qa}{p+q+r}, \qquad z=\frac{ra}{p+q+r};$$

самый же maximum =

$$p^p q^q r^r \left(\frac{a}{p+q+r}\right)^{p+q+r}.$$

Мы предполагали, что показатели p, q, r — числа цѣлыя. Но это предположеніе не необходимо, и теорема остается вѣрна и въ томъ случаѣ, когда показатели будутъ положительныя дроби. Приведя эти дроби къ общему знаменателю, пусть онѣ будутъ

$$p=\frac{\alpha}{\beta}, \quad q=\frac{\alpha'}{\beta}, \quad r=\frac{\alpha''}{\beta};$$

то произведеніе будетъ

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}}\, y^{\frac{\alpha'}{\beta}}\, z^{\frac{\alpha''}{\beta}}.$$

Очевидно, оно достигнетъ maximum'a одновременно со своей β-ой степенью:

$$x^{\alpha}\, y^{\alpha'}\, z^{\alpha''};$$

а это выраженіе, по доказанному, будетъ имѣть maximum при

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\alpha'}=\frac{z}{\alpha''}.$$

Эти равенства можно написать такъ:

$$\frac{x}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{y}{\frac{\alpha'}{\beta}} = \frac{z}{\left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)},$$

или, наконецъ, такъ:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

676. Задача I. *Какой изъ всѣхъ конусовъ, вписанныхъ въ данный шаръ, имѣетъ наибольшій объемъ?*

Убѣдившись a priori, что разсматриваемый объемъ имѣетъ maximum, обозначимъ радіусъ основанія конуса буквою x, разстояніе центра шара отъ этого основанія буквою y, и буквою R радіусъ шара. Имѣемъ

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad V = \frac{1}{3}\pi x^2 (R + y);$$

или, замѣнивъ x^2 его величиною $R^2 - y^2$, найдемъ

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - y^2)(R + y) = \frac{1}{3}\pi(R + y)^2(R - y).$$

Отбросивъ постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi$, и разсматривая произведеніе $(R + y)^2 \cdot (R - y)$, замѣчаемъ, что сумма первыхъ степеней множителей, т.-е. $(R + y) + (R - y)$ равна постоянной 2R, слѣд. произведеніе имѣетъ maximum, когда перемѣнныя $R + y$ и $R - y$ пропорціональны своимъ показателямъ, т.-е. $\frac{R + y}{2} = \frac{R - y}{1}$, откуда $y = \frac{R}{3}$.

677. Задача II. *Описать около даннаго цилиндра конусъ наименьшаго объема.*

Если вообразимъ (черт. 115), что вершина A перемѣщается по оси AI, отъ точки H, то объемъ конуса вначалѣ безконечно-великъ, ибо основаніе его какъ угодно велико, а высота близка къ HI; по мѣрѣ удаленія точки A въ безконечность, объемъ снова приближается къ безконечности, ибо высота стремится къ безконечности, а основаніе — къ конечной величинѣ основанія цилиндра. Измѣняясь отъ ∞ до ∞, объемъ конуса проходитъ чрезъ minimum.

Пусть H и R — высота и радіусъ основанія цилиндра, x и y — высота и радіусъ основанія конуса. Объемъ конуса будетъ $V = \frac{1}{3}\pi x y^2$; но $y : R = x : (x - H)$, что слѣдуетъ изъ подобія тр—ковъ ABI и AEH; слѣд.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{x^3}{(x - H)^2} \ldots (1).$$

Отбрасывая постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi R^2$, ищемъ minimum выраженія $\frac{x^3}{(x - H)^2}$, соотвѣтствующій maximum'у выраженія $\frac{(x - H)^2}{x^3}$, которое можно представить въ видѣ $\frac{1}{x}\left(1-\frac{H}{x}\right)^2$. Условія maximum'а этого выраженія не измѣнятся, если помножимъ его на постоянное количество H, что даетъ

$$\frac{H}{x}\left(1-\frac{H}{x}\right)^2.$$

Сумма первыхъ степеней производителей $\frac{H}{x}$ и $1-\frac{H}{x}$ есть величина постоянная 1, слѣд. по теоремѣ § 675, maximum имѣетъ мѣсто, когда

$$\frac{\frac{H}{x}}{1}=\frac{1-\frac{H}{x}}{2}.$$

когда $x=3H$.

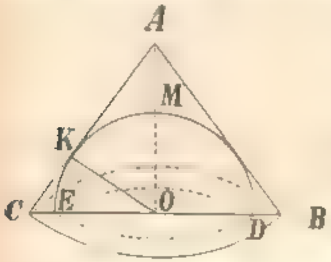
Итакъ, объемъ конуса достигаетъ minimum'а, когда высота конуса дѣлается втрое больше высоты цилиндра. Поставляя 3H вмѣсто x въ (1), находимъ, что минимальный объемъ $=\frac{9}{4}\pi R^2 H$, т.-е. составляетъ $\frac{9}{4}$ объема цилиндра.

678. Задача III. *Какой изъ всѣхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго полушара, имѣетъ наименьшую боковую поверхность?*

Какъ и въ предыдущей задачѣ, сначала a priori убѣждаемся, что разсматриваемая поверхность имѣетъ minimum.

Пусть радіусъ шара будетъ R; x, y и S—высота, радіусъ основанія и боковая поверхность конуса; имѣемъ:

$$S=\pi y\times AC.$$



Черт. 146.

Подобные тр—ки AOC и AOK даютъ:

$$\frac{AC}{x}=\frac{y}{R}=\frac{x}{\sqrt{x^2-R^2}},$$

откуда

$$\frac{AC\times y}{xR}=\frac{x^2}{x^2-R^2};$$

слѣд.

$$S=\pi R\cdot\frac{x^3}{x^2-R^2}.$$

Вопросъ приводится къ отысканію minimum'а $\frac{x^3}{x^2-R^2}$, и слѣд. maximum'а обратной функціи $\frac{x^2-R^2}{x^3}$, которой можно дать видъ $\frac{1}{x}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right)$. Возвысивъ въ квадратъ и умноживъ на R², что не измѣнитъ условій maximum'а, приводимъ вопросъ къ нахожденію maximum'а выраженія

$$\frac{R^2}{x^2}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right)^2,$$

въ которомъ множители $\frac{R^2}{x^2}$ и $1-\frac{R^2}{x^2}$ имѣютъ постоянную сумму, равную 1; и слѣд. произведеніе это будетъ имѣть maximum тогда, когда

$$\frac{\frac{R^2}{x^2}}{1}=\frac{1-\frac{R^2}{x^2}}{2},$$

откуда $x^2 = 3R^2$, и слѣд. $x = R\sqrt{3}$. Заключаемъ, что конусъ минимальной боковой поверхности имѣетъ высоту, равную сторонѣ правильнаго треугольника, вписаннаго въ большомъ кругѣ шара; самая же минимальная поверхность $= \frac{3}{2}\pi R^2\sqrt{3}$.

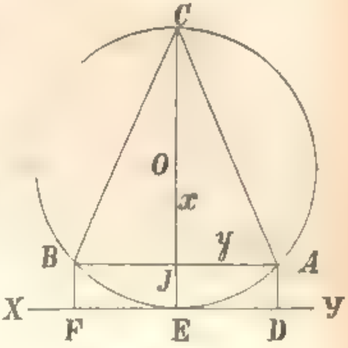
679. Задача IV. *Равнобедренный треугольникъ* ABC, *вписанный въ данный кругъ, вращается около касательной* XY, *параллельной его основанію; каковы должны быть размѣры треугольника, чтобы объемъ, имъ описанный, имѣлъ наибольшую величину?*

Пусть $OI = x$, $IA = y$. Объемъ выразится разностью между двойнымъ объемомъ усѣченнаго конуса, описаннаго трапеціей ADEC, и цилиндромъ, описаннымъ прямоугольникомъ ABFD, т.-е.

$$V = \frac{2\pi y}{3}[4R^2 + (R-x)^2 + 2R(R-x)] - \pi(R-x)^2 . 2y;$$

замѣнивъ y его величиною $\sqrt{R^2 - x^2}$ и упростивъ, приведемъ выраженіе къ виду

$$V = \frac{4}{3}\pi(2R - x)(R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$$



Черт. 147

Можемъ искать maximum квадрата этого выраженія, или, отбрасывая постоянный множитель,—выраженія

$$(R + x)^3 . (R - x) . (2R - x)^2.$$

Помноживъ $R + x$ на 2, мы сдѣлаемъ сумму первыхъ степеней этихъ множителей постоянною; но примѣненіе теоремы § 675 поведетъ къ равенствамъ $\frac{2(R+x)}{3} = \frac{R-x}{1} = \frac{2R-x}{2}$, которымъ нельзя удовлетворить никакимъ значеніемъ x. Поэтому обращаемся къ способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; помноживъ $R + x$ и $R - x$ на произвольныя постоянныя α и β, замѣчаемъ, что сумма $\alpha(R + x) + \beta(R - x) + (2R - x)$ будетъ постоянна при $\alpha - \beta - 1 = 0$; и тогда maximum будетъ имѣть мѣсто при условіи

$$\frac{\alpha(R + x)}{3} = \frac{\beta(R - x)}{1} = \frac{2R - x}{2}.$$

Выражая отсюда α и β черезъ x, находимъ

$$\alpha = \frac{3(2R - x)}{2(R + x)}, \quad \beta = \frac{2R - x}{2(R - x)}.$$

Подстановка этихъ величинъ α и β въ ур—ніе $\alpha - \beta - 1 = 0$ даетъ:

$$\frac{3(2R - x)}{2(R + x)} - \frac{2R - x}{2(R - x)} - 1 = 0, \quad \text{или} \quad 3x^2 - 5Rx + R^2 = 0.$$

Легко видѣть, что корни дѣйствительны и оба положительны; но задачѣ можетъ отвѣчать только тотъ изъ нихъ, который $< \mathrm{R}$. Подстановка R въ первую часть ур—нія даетъ результатъ $(-\mathrm{R}^2)$; заключаемъ, что R находится между корнями, т.-е. большій корень больше, а меньшій — меньше R. Откидывая большій корень, соотвѣтствующій знаку $+$ передъ радикаломъ, находимъ:

$$x = \frac{5\mathrm{R} - \sqrt{25\mathrm{R}^2 - 12\mathrm{R}^2}}{6} = \frac{\mathrm{R}(5 - \sqrt{13})}{6}.$$

680. Теорема. *Сумма двухъ перемѣнныхъ, которыхъ произведеніе равно положительному постоянному, имѣетъ maximum, когда оба слагаемыя отрицательны, и minimum, когда они положительны; причемъ maximum и minimum имѣютъ мѣсто, когда оба количества равны между собою, если только они могутъ быть сдѣланы равными. Сумма же двухъ перемѣнныхъ, которыхъ произведеніе равно постоянной отрицательной величинѣ, не имѣетъ ни maximum'a, ни minimum'a.*

Прямое доказательство. — Пусть произведеніе $= p$, а одинъ изъ множителей его $= x$; другой множитель будетъ $\frac{p}{x}$, а сумма ихъ

$$y = x + \frac{p}{x}.$$

1-й случай: $p < 0$. Назвавъ абсолютную величину произведенія p черезъ p', имѣемъ

$$y = x - \frac{p'}{x}.$$

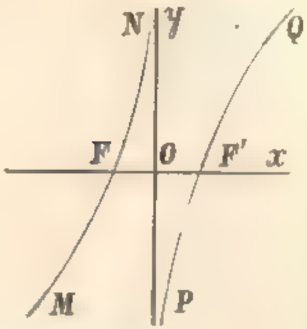
Будемъ измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$. При $x = -\infty$, $y = -\infty + \frac{p'}{\infty} = -\infty$; по мѣрѣ приближенія x къ 0, первый членъ, оставаясь отрицательнымъ, увеличивается до 0, второй членъ $\left(-\frac{p'}{x}\right)$, оставаясь положительнымъ, увеличивается до $+\infty$; слѣд. и сумма y увеличивается отъ $-\infty$ до $+\infty$. Продолжаемъ увеличивать x отъ 0 до $+\infty$. При x немного большемъ нуля, первый членъ суммы весьма малъ; второй членъ, будучи равенъ $-p'$, дѣленному на весьма малую положительную величину, будетъ равенъ отрицательному числу съ весьма большою абсолютною величиною; слѣд. при переходѣ x чрезъ 0, функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, дѣлая скачекъ изъ $+\infty$ въ $-\infty$. При дальнѣйшемъ увеличеніи x до $+\infty$, первый членъ возрастаетъ до $+\infty$, второй, оставаясь отрицательнымъ, приближается къ 0; оба члена опять увеличиваются, потому и сумма ихъ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Такимъ образомъ при увеличеніи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, y получаетъ дважды всякое данное значеніе при двухъ значеніяхъ x, дающихъ въ произведеніи p; при двухъ равныхъ и противоположныхъ значеніяхъ x функція принимаетъ два равныя и противоположныя значенія, образуя 2 вѣтви: въ той и другой y идетъ, непрерывно увеличиваясь отъ $-\infty$ до ∞; обѣ вѣтви раздѣлены разрывомъ непрерывности, имѣющимъ мѣсто при $x = 0$. Функція не имѣетъ, слѣд., ни maximum'a, ни minimum'a.

Таблица измѣненій y.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$0-h$	$+\infty$
$0+h$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$

Кривая измѣненій.



Черт. 148.

Обѣ вѣтви изображаются ординатами кривыхъ MN и PQ, имѣющихъ ассимптотою ось y; ось x они перескаютъ въ разстояніяхъ отъ начала, равныхъ $+\sqrt{p'}$ и $-\sqrt{p'}$: ибо изъ $y=0$ слѣдуетъ $x-\frac{p'}{x}=0$, откуда $x^2=p'$ и $x=\pm\sqrt{p'}$. Кривая симметрична относительно точки O.

2-й случай: $p>0$. **Въ этомъ случаѣ**

$$y=x+\frac{p}{x}\cdot\cdot\cdot(1)$$

Этому равенству послѣдовательно даемъ видъ:

$$y=\sqrt{\left(x+\frac{p}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{p}{x}\right)^2-2p+4p}=\sqrt{4p+\left(x-\frac{p}{x}\right)^2}.$$

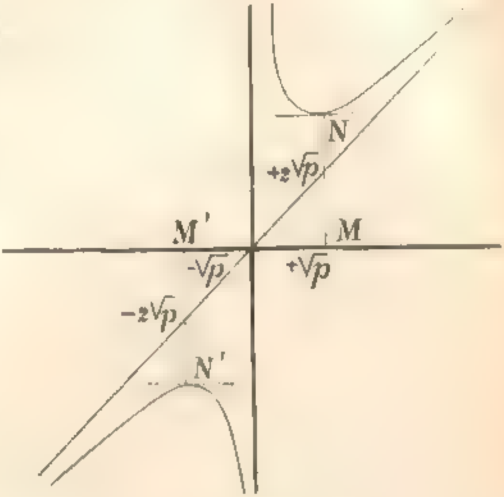
Будемъ увеличивать x отъ 0 до $+\infty$. При увеличеніи x отъ 0 до $+\sqrt{p}$, функція $x-\frac{p}{x}$, по предыдущему, увеличивается отъ $-\infty$ до 0, а слѣдоват. $\left(x-\frac{p}{x}\right)^2$ уменьшается отъ $+\infty$ до 0. При возрастаніи x отъ $+\sqrt{p}$ до $+\infty$, $x-\frac{p}{x}$ возрастаетъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и квадратъ этой функціи, отъ 0 до $+\infty$. Функція y, оставаясь положительною, уменьшается сначала отъ $+\infty$ до $+2\sqrt{p}$, а затѣмъ увеличивается отъ $+2\sqrt{p}$ до $+\infty$. Слѣд. y проходитъ чрезъ minimum $+2\sqrt{p}$, при $x=+\sqrt{p}$.

Изъ (1) непосредственно ясно, что при двухъ значеніяхъ x, равныхъ по величинѣ, но противоположныхъ по знаку, y имѣетъ величины равныя, отличающіяся только знаками. Слѣд. въ интервалѣ измѣненій x отъ $-\infty$ до 0, функція возрастаетъ до maximum'a $-2\sqrt{p}$, при $x=-\sqrt{p}$, а затѣмъ при увеличеніи x отъ $-\sqrt{p}$ до 0, y уменьшается отъ $-2\sqrt{p}$ до $-\infty$. При переходѣ x чрезъ 0, имѣетъ мѣсто разрывъ непрерывности изъ $-\infty$ въ $+\infty$.

Таблица измѣненій y.

x	y
$-\infty$	$-\infty$
$-\sqrt{p}$	$-2\sqrt{p}$ maxim.
$0-h$	$-\infty$
$0+h$	$+\infty$
$+\sqrt{p}$	$+2\sqrt{p}$ minim.
$+\infty$	$+\infty$

Кривая измѣненій.



Черт. 149.

$$OM = OM' = \sqrt{p};$$
$$MN = M'N' = 2\sqrt{p}.$$

Непрямое доказательство.—Обозначивъ данное произведеніе перемѣнныхъ x и $\frac{p}{x}$ буквою p, а сумму ихъ S, имѣемъ ур—ніе

$$x+\frac{p}{x}=S\ldots(1).$$

Рѣшая ур—ніе (1) относительно x, имѣемъ:

$$x=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-p}.$$

Чтобы перемѣнное x было дѣйствительно, необходимо, чтобы было $\frac{S^2}{4}\geqslant p$, или $S^2\geqslant 4p$. Различаемъ два случая:

I. $p<0$. Условіе $S^2>4p$ всегда будетъ удовлетворено, каково бы ни было S; слѣд. сумма двухъ факторовъ, произведеніе которыхъ равно постоянной отрицательной величинѣ, можетъ имѣть всѣ величины отъ $-\infty$ до $+\infty$; сумма S не имѣетъ ни max., ни min.

II. $p>0$. Неравенству $S^2\geqslant 4p$ можно дать видъ

$$(S+2\sqrt{p})(S-2\sqrt{p})\geqslant 0;$$

оно будетъ удовлетворено, если оба множителя будутъ имѣть одинаковые знаки; слѣд. должно быть:

1) Или: $S \geq 2\sqrt{p}$, откуда: min. $(S) = 2\sqrt{p}$; причемъ $x = \frac{S}{2} = \sqrt{p}$; другой множитель также $= \frac{p}{x} = \sqrt{p}$.

2) Или $S \leq -2\sqrt{p}$, откуда: max. $(S) = -2\sqrt{p}$; причемъ $x = \frac{S}{2} = -\sqrt{p}$; другой множитель $= \frac{p}{x} = -\sqrt{p}$.

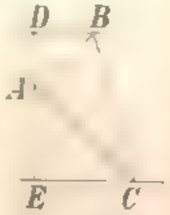
Итакъ: minimum и maximum суммы имѣютъ мѣсто при равенствѣ слагаемыхъ.

681. Задача I. *Изъ всѣхъ прямоугольниковъ одинаковой площади какой имѣетъ наименьшій периметръ?*

Обозначая перемѣнныя измѣренія прямоугольника черезъ x и y, имѣемъ, по условію, $xy = a^2$, гдѣ a^2 постоянно; найти minimum периметра $2x + 2y$, или minimum $(x + y)$. Такъ какъ x можетъ быть сдѣлано равнымъ y, то площадь тогда имѣетъ наименьшій периметръ, когда будетъ $x = y = a$, т.-е. когда прямоугольникъ обратится въ квадратъ. Самый minimum периметра равенъ $4a$.

682. Задача II. *Даны двѣ параллели и точка A между ними, служащая вершиною прямого угла прямоугольнаго треугольника, котораго другія двѣ вершины лежатъ на каждой изъ параллелей. Какое положеніе нужно дать треугольнику, чтобы площадь была minima?*

Проведемъ общій перпендикуляръ DE къ параллелямъ, и пусть: $AD = a$, $AE = b$, $EC = x$. Углы EAC и ABD равны по перпендикулярности сторонъ, слѣд. треугольники EAC, DAB подобны, и потому



Черт. 150.

$$AC : EC = AB : AD, \quad \text{или} \quad AC : x = AB : a \ldots (1)$$

Умножая оба предыдущіе члена на AC, имѣемъ $\overline{AC}^2 : x = AB \cdot AC : a$; слѣд. удвоенная площадь треугольника ABC, или $AB \cdot AC = \frac{\overline{AC}^2 a}{x}$; но $\overline{AC}^2 = b^2 + x^2$, откуда:

$$2 \text{ пл. } ABC = \frac{a}{x}(b^2 + x^2) = a\left(\frac{b^2}{x} + x\right).$$

Произведеніе положительныхъ членовъ $\frac{b^2}{x}$ и x равно постоянному b^2, слѣд. сумма $\frac{b^2}{x} + x$ имѣетъ minimum, когда $\frac{b^2}{x} = x$, или $x^2 = b^2$, откуда $x = b$. Но въ такомъ случаѣ $BD = a$, и задача рѣшается весьма простымъ построеніемъ.

683. Задача III. — *Опредѣлить наивыгоднѣйшее соединеніе элементовъ гальванической баттареи при данномъ внѣшнемъ сопротивленіи.*

Пусть всѣхъ элементовъ M; электровозбудительная сила каждаго E, внутреннее сопротивленіе каждаго элемента ρ, данное внѣшнее сопротивленіе r. Раздѣлимъ элементы на m группъ по n элементовъ въ каждой: $M = m \cdot n$; въ каждой группѣ соединимъ полюсы параллельно (цинкъ съ цинкомъ, уголь съ углемъ), и полученныя группы соединимъ послѣдовательно; составится баттарея какъ бы изъ m большихъ элементовъ. Электровозбудительная сила каждаго изъ нихъ $= \mathrm{E}$, всей баттареи — $m\mathrm{E}$; сопротивленіе каждаго изъ такихъ элементовъ $= \frac{\rho}{n}$; внутр. сопр. всей баттареи $= m \cdot \frac{\rho}{n}$. Сила тока

$$\mathrm{I} = \frac{m\mathrm{E}}{m \cdot \frac{\rho}{n} + r} = \frac{\mathrm{ME}}{\frac{\mathrm{M}\rho}{n} + rn}.$$

Числитель ME этой дроби есть величина постоянная, знаменатель — содержитъ перемѣнное n; дробь будетъ имѣть maximum, когда знаменатель достигнетъ minimum'a. Но произведеніе положительныхъ перемѣнныхъ $\frac{\mathrm{M}\rho}{n}$ и rn есть величина постоянная ($\mathrm{M}\rho r$), слѣд. сумма будетъ имѣть minimum, когда

$$\frac{\mathrm{M}\rho}{n} = rn, \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}\rho = r,$$

т.-е. *сила тока достигаетъ maximum'a, когда внутреннее сопротивленіе баттареи равно внѣшнему.*

684. Тотъ же вопросъ о минимальномъ значеніи суммы можно рѣшить еще такъ. Можно доказать слѣдующее

Предложеніе. *Сумма двухъ положительныхъ перемѣнныхъ, произведеніе которыхъ сохраняетъ постоянную величину, измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и абсолютное значеніе ихъ разности.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть даны два перемѣнныхъ положительныхъ числа x и y, произведеніе которыхъ равно постоянной a^2.

$$xy = a^2.$$

Тождество

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

даетъ

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4a^2.$$

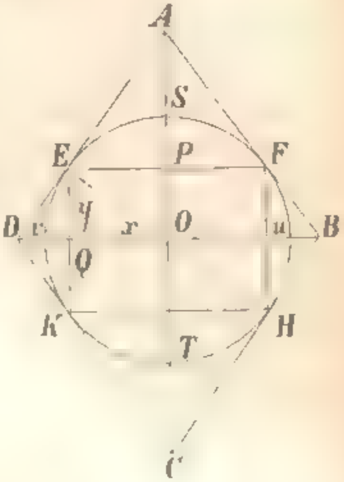
Отсюда прямо видно, что $(x + y)^2$, а слѣд. и $x + y$ измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ $(x - y)^2$ или $| x - y |$ — при увеличеніи $x - y$ увеличивается и $x + y$, и наоборотъ; значитъ, когда $| x - y |$ принимаетъ наим. значеніе, тогда и $x + y$ достигаетъ minimum'a. Такимъ образомъ имѣемъ заключеніе:

Если перемѣнныя положительныя слагаемыя, коихъ произведеніе постоянно, не могутъ быть сдѣланы равными, minimum ихъ суммы будетъ имѣть мѣсто тогда, когда абсолютное значеніе ихъ разности достигнетъ minimum'a. Если же они могутъ быть сдѣланы равными, то ихъ сумма будетъ minima, когда они сдѣлаются равными (и равными ихъ геометрической срединѣ).

Такъ, въ задачѣ предыдущаго §, если внутреннее сопротивленіе баттареи не можетъ быть сдѣлано равнымъ внѣшнему, токъ получитъ наибольшую силу, когда внутреннее сопротивленіе будетъ *возможно меньше разниться* отъ внѣшняго. Вотъ еще примѣръ, иллюстрирующій случаи подобнаго рода.

685. Задача IV. — *Имѣемъ перемѣнный ромбъ, описанный около даннаго круга, и вписанный прямоугольникъ, вершины котораго находятся въ точкахъ касанія сторонъ ромба. При какомъ положеніи прямоугольника сумма площадей обоихъ четыреугольниковъ будетъ minima?*

Когда точка A будетъ удаляться по линіи SA отъ точки S въ безконечность, площадь ромба будетъ измѣняться отъ безконечности до безконечности; слѣд. сумма обѣихъ площадей сначала уменьшается, затѣмъ начинаетъ увеличиваться, слѣд. проходитъ чрезъ minimum. Затѣмъ легко доказать, что произведеніе площадей остается *постояннымъ*, въ самомъ дѣлѣ, обозначая площадь ромба буквою Z, площадь прямоугольника Z', и замѣчая, что Z = 4△AOD, Z' = 8△OPE, имѣемъ, Z' : 2Z = OPE : AOD = $R^2 : \overline{AD}^2$; но Z = AD . 2R, слѣд. Z' : 2Z = $4R^4 : Z^2$, откуда Z . Z' = $8R^4$ — величинѣ постоянной. Хотя произведеніе разсматриваемыхъ перемѣнныхъ и постоянно, но какъ мы не можемъ площади сдѣлать равными (ибо онѣ всегда раздѣлены площадью круга), то для опредѣленія minimum'а Z + Z' должны искать minimum разности Z — Z' = 4 (DEQ — AEP). Но DEQ = $\frac{1}{2}y \cdot DQ = \frac{1}{2}y \times \frac{y^2}{x} = \frac{y^3}{2x}$, а AEP = $\frac{x^3}{2y}$; слѣд.



Черт. 151.

$$Z - Z' = 2\left(\frac{y^3}{x} + \frac{x^3}{y}\right) = 2\frac{x^4 + y^4}{xy}.$$

Замѣчая, что $x^2 + y^2 = R^2$, имѣемъ отсюда: $x^4 + y^4 = R^4 - 2x^2y^2$, слѣд.

$$Z - Z' = 2 \cdot \frac{R^4 - 2x^2y^2}{xy}.$$

Очевидно, это выраженіе имѣетъ minimum, когда x^2y^2 имѣетъ maximum; но сумма $x^2 + y^2$ равна постоянной R^2, слѣд. x^2y^2 имѣетъ maximum при $x = y$. Итакъ, искомый minimum суммы Z + Z' имѣетъ мѣсто тогда, когда прямоугольникъ обращается въ квадратъ: тогда и ромбъ обращается въ квадратъ, и величина min. (Z + Z') = $6R^2$.

686. Теорема. — *Сумма n положительныхъ перемѣнныхъ, которыхъ произведеніе постоянно, имѣетъ minimum, когда эти n количествъ равны между собою* (полагая, что они могутъ быть сдѣланы равными).

Пусть будутъ $x, y, z, \ldots t, u$ — n положительныхъ перемѣнныхъ, подчиненныхъ единственнымъ условіямъ:

$$(1) \qquad x > 0,\ y > 0, \ldots t > 0,\ u > 0;\ xyz \ldots t \, . \, u = a^n,$$

гдѣ a — данное положительное число. Ихъ сумма

$$S = x + y + z + \ldots + t + u$$

есть функція $n - 1$ независимыхъ перемѣнныхъ.

Между системами значеній $x, y, \ldots u$, удовлетворяющихъ условіямъ (1),

существуетъ одна, и только одна, составленная изъ равныхъ значеній.
система

$$x = y = z = \dots = u = a; \tag{2}$$

соотвѣтственное значеніе S есть na.

Пусть будетъ

$$x',\ y',\ z',\ \dots,\ u',$$

система значеній, удовлетворяющихъ условіямъ (1), но отличная отъ системы
и пусть

$$S' = x' + y' + z' + \dots u'.$$

Докажемъ, что $S' > na$. Въ самомъ дѣлѣ, числа $x', y', z', \dots u'$, не
равны между собою, слѣдовательно ихъ ариѳметическая средина больше геометрической средины (§ 339); слѣдовательно

$$\frac{S'}{n} > \sqrt[n]{x'y' \dots u'}$$

или

$$\frac{S'}{n} > a, \quad \text{или} \quad S' > na$$

что и требовалось доказать.

Примѣчаніе.—Эта теорема, вообще, перестанетъ быть вѣрною, если перемѣнныя подчинены инымъ условіямъ, кромѣ неизмѣнности ихъ произведенія. Но если новыя условія дозволяютъ перемѣннымъ $x, y, \dots$ сдѣлаться равными, теорема имѣетъ мѣсто.

687. Задача I.—*Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую площадь, какой имѣетъ наименьшій периметръ?*

Обозначивъ стороны черезъ x, y, z, а постоянную площадь буквою Q, имѣемъ

$$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = 16Q^2.$$

Сумму $x + y + z$ можно представить въ видѣ:

$$\frac{3}{4}\left\{\frac{x+y+z}{3} + \frac{x+y-z}{1} + \frac{x-y+z}{1} + \frac{-x+y+z}{1}\right\}.$$

Произведеніе четырехъ членовъ, заключенныхъ въ скобки, равно постоянной $\frac{16}{3}Q^2$, слѣд. сумма имѣетъ minimum, когда ея члены равны. Найдемъ, что они равны при $x = y = z$. Слѣд. минимальный периметръ принадлежитъ правильному треугольнику, а самый min. $= 2\sqrt[4]{27}\,.\sqrt{Q}$.

688. Задача II.—*Изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ одинаковаго объема какой имѣетъ наименьшую полную поверхность?*

Пусть перемѣнныя измѣренія параллелепипедовъ, сохраняющихъ одинаковый объемъ a^3, будутъ x, y, z; имѣемъ:

$$xyz = a^3.$$

Ищемъ minim. полной поверхности $S = 2(xy + xz + yz)$; замѣчая, что $xy\,.\,xz\,.\,yz = x^2\,.\,y^2\,.\,z^2 = a^6$, находимъ, что сумма достигнетъ minimum'a при $xy = xz = yz$, или при $x = y = z = a$, т.-е. когда параллелопипедъ будетъ *кубъ*, самая минимальная поверхность равна $6a^2$.

Повѣрка. Взявъ $x = a + h$, $y = a - h$, и слѣд. $z = \frac{a^3}{a^2 - h^2}$, найдемъ:

$$S' = 6a^2 + 2h^2 + \frac{4h^4}{a^2 - h^2}, \text{ что больше } 6a^2.$$

689. Задача III. — *Зная, что* $x^\alpha y^\beta z^\gamma =$ *пост.* q, *найти minimum суммы* $mx^\alpha + ny^\beta + pz^\gamma$.

Изъ условія $x^\alpha y^\beta z^\gamma = q$ имѣемъ $(mx^\alpha)(ny^\beta)(pz^\gamma) = mnpq$; слѣдов. мы должны найти minimum суммы, зная, что произведеніе ея членовъ постоянно. Искомый minimum имѣетъ мѣсто при $mx^\alpha = ny^\beta = pz^\gamma = \sqrt[3]{mnpq}$, а самый minimum $= 3\sqrt[3]{mnpq}$.

Напр. зная, что $xy = 16$, найдемъ minimum $3x + 12y$, разсуждая такъ: изъ условія $xy = 16$ имѣемъ: $(3x)(12y) = 16 \,.\, 3 \,.\, 12 = (24)^2$; слѣд. данная сумма имѣетъ minimum при $3x = 12y = 24$, т.-е. при $x = 8$ и $y = 2$; самый minimum $= 2 \,.\, 24$, т.-е. 48.

Еще примѣръ. Зная, что $xy = a^2$, найти min. $x^2 + xy + y^2$? Изъ $xy = a^2$ заключаемъ $x^3y^3 = a^6$, или $x^2 \,.\, xy \,.\, y^2 = a^6$; произведеніе слагаемыхъ постоянно, слѣд. minimum суммы имѣетъ мѣсто при $x^2 = xy = y^2$, т.-е. при $x = y = a$, ибо $xy = a^2$; самый minimum $= 3a^2$.

690. Теорема. — *Если произведеніе данныхъ степеней нѣсколькихъ перемѣнныхъ* x, y, z *имѣетъ постоянную величину:* $x^p y^q z^r = P$, *то сумма первыхъ степеней этихъ перемѣнныхъ,* $x + y + z$, *имѣетъ minimum, когда числа* x, y, z *пропорціональны своимъ показателямъ, т.-е. когда* $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$, *если только числа эти могутъ имѣть такія значенія.*

Раздѣливъ обѣ части равенства $x^p y^q z^r = P$ на постоянное количество $p^p \,.\, q^q \,.\, r^r$, найдемъ

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^r = \frac{P}{p^p \,.\, q^q \,.\, r^r} \;\ldots\; (1)$$

что можно представить въ видѣ

$$\underbrace{\frac{x}{p} \,.\, \frac{x}{p} \,.\, \ldots \,.\, \frac{x}{p}}_{p \text{ разъ}} \,.\, \underbrace{\frac{y}{q} \,.\, \frac{y}{q} \,.\, \ldots \,.\, \frac{y}{q}}_{q \text{ разъ}} \,.\, \underbrace{\frac{z}{r} \,.\, \frac{z}{r} \,.\, \ldots \,.\, \frac{z}{r}}_{r \text{ разъ}} = \frac{P}{p^p \,.\, q^q \,.\, r^r}.$$

Сумма производителей первой части равна $\frac{x}{p} \cdot p + \frac{y}{q} \cdot q + \frac{z}{r} \cdot r$ или $x + y + z$, т.-е. искомая, произведеніе же ихъ — постоянно, $\left(\frac{P}{p^p \,.\, q^q \,.\, r^r}\right)$, слѣд., по теоремѣ § 686, эта сумма будетъ minima при равенствѣ ея частей, т.-е. при

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \;\ldots\; (2).$$

Соотвѣтствующія минимальной суммѣ значенія перемѣнныхъ имѣемъ изъ ур—ній (1) и (2), именно

$$x = p \,.\, \sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p \,.\, q^q \,.\, r^r}}, \quad y = q \,.\, \sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p \,.\, q^q \,.\, r^r}}, \quad z = r \,.\, \sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p \,.\, q^q \,.\, r^r}}.$$

Самый minimum суммы

$$=(p+q+r)\cdot\sqrt[p+q+r]{\frac{P}{p^p\cdot q^q\cdot r^r}}.$$

691. Задача I. — *Зная, что* $x^\alpha y^\beta z^\gamma = q$, *найти minimum* $mx^a + ny^b + pz^c$.

Изъ $x^\alpha y^\beta z^\gamma = q$ имѣемъ:

$$(x^\alpha y^\beta z^\gamma)^{abc} = q^{abc},\quad \text{т.-е.}\quad (x^a)^{bc\alpha}(y^b)^{ac\beta}(z^c)^{ab\gamma} = q^{abc},$$

слѣдовательно

$$(mx^a)^{bc\alpha}(ny^b)^{ac\beta}(pz^c)^{ab\gamma} = m^{bc\alpha}n^{ac\beta}p^{ab\gamma}q^{abc}\ .\ .\ .\ (1).$$

Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ нахожденію minimum'а суммы $mx^a + ny^b + pz^c$, зная, что произведеніе различныхъ степеней ея членовъ постоянно; по теоремѣ § 690 искомый minimum имѣетъ мѣсто при

$$\frac{mx^a}{bc\alpha} = \frac{ny^b}{ac\beta} = \frac{pz^c}{ab\gamma};$$

соединяя эти два ур-нія съ (1), найдемъ, при какихъ x, y, z имѣетъ мѣсто minimum данной суммы, и самый minimum.

Примѣръ. — *Зная, что* $x^2y^3 = a^5$, *найти minimum* $3x + 2y$.

Изъ $x^2y^3 = a^5$ имѣемъ: $(3x)^2(2y)^3 = 9\cdot 8\cdot a^5$; слѣд. по теоремѣ § 690 заключаемъ, что искомый minimum имѣетъ мѣсто при $\frac{3x}{2} = \frac{2y}{3}$; выражая отсюда x и вставляя въ условіе, имѣемъ: $\left(\frac{4y}{9}\right)^2\cdot y^3 = a^5$, откуда $y = a\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$; самый minimum есть $\frac{4y}{3} + 2y$, т.-е. $\frac{10a}{3}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}$.

692. Задача II. — *Найти minimum полной поверхности ниши даннаго объема* $\pi\frac{a^3}{6}$.

Черт. 152.

Ниша есть тѣло, образуемое вращеніемъ на 180° около оси AC фигуры, состоящей изъ прямоугольника BDCO, завершающагося квадрантомъ ABO. Пусть радіусъ OA $= x$, высота OC прямоугольника равна y; поверхность ниши

$$=\pi\cdot\frac{x^2}{2}+\pi xy+\pi x^2 \text{ или } \frac{\pi}{2}(3x^2+2xy).$$

Но $$\frac{\pi a^3}{6}=\frac{\pi}{2}x^2y+\frac{\pi x^3}{3},\ \text{откуда}\ y=\frac{a^3-2x^3}{3x^2};$$

слѣд. поверхность ниши

$$=\frac{\pi}{2}\left(3x^2+\frac{2a^3-4x^3}{3x}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{3}x^2+\frac{2a^3}{3x}\right)=\frac{\pi}{6}\left(5x^2+\frac{2a^3}{x}\right).$$

Произведеніе $(5x^2)\cdot\left(\frac{2a^3}{x}\right)^2$ = пост. $20a^6$, слѣдоват. сумма

$5x^2 + \frac{2a^3}{x}$, то теор. § 690, будетъ minima, когда $\frac{5x^2}{1} = \frac{\frac{2a^3}{x}}{2}$; откуда $x = \frac{a}{\sqrt[3]{5}}$. Отсюда слѣдуетъ: $y = \frac{a}{\sqrt[3]{5}} = x$.

693. Задача III.—*Найти minimum суммы* $mx^a + \frac{n}{x^b}$.

Всегда можно найти такія два числа α и β, чтобы $a\alpha = b\beta$; найдя ихъ, имѣемъ тождество $(x^a)^\alpha = (x^b)^\beta$, откуда $(mx^a)^\alpha \cdot \left(\frac{n}{x^b}\right)^\beta = m^\alpha \cdot n^\beta$. Такимъ образомъ, вопросъ приведенъ къ нахожденію minimum'a суммы, зная, что произведеніе двухъ степеней ея членовъ постоянно; по теор. § 690 minimum имѣетъ мѣсто при

$$\frac{mx^a}{\alpha} = \frac{\frac{n}{x^b}}{\beta}, \text{ т.-е. при } x^{a+b} = \frac{\alpha n}{\beta m} = \frac{bn}{am},$$

откуда

$$x = \sqrt[a+b]{\frac{bn}{am}}; \text{ самый minimum } = (a+b) \cdot \sqrt[a+b]{\left(\frac{n}{a}\right)^a \left(\frac{m}{b}\right)^b}.$$

694. Теоремы § 686 и 690 обратны теоремамъ § 667 и 675. Этотъ результатъ встрѣчается часто, и его можно формулировать такъ:

Теорема. — *Если* U *и* V *суть функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ* $x, y, z, \ldots$; *если, затѣмъ, при постоянномъ значеніи* A *функціи* U *другая функція* V *имѣетъ maximum* B; *если, сверхъ того,* B *измѣняется въ томъ же смыслѣ какъ и* A, *то обратно:* U *будетъ имѣть minimum равный* A, *когда* V *будетъ сохранять постоянное значеніе* B.

Въ самомъ дѣлѣ, когда U получаетъ значеніе A, то этимъ перемѣнныя $x, y, z, \ldots$ не опредѣляются, такъ какъ они должны удовлетворять только одному ур—нію

$$U = A;$$

слѣд. функція V можетъ принимать безчисленное множество различныхъ значеній, въ числѣ которыхъ наибольшее, по условію, есть B; отсюда ясно, что если, наоборотъ, мы дадимъ функціи V постоянное значеніе B, то въ числѣ безчисленнаго множества значеній, которыя можетъ принимать U, будетъ находиться и A. И легко показать, что U не можетъ получить никакого значенія меньшаго A: въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что U можетъ принять значеніе $A' < A$, мы найдемъ, что наибольшее изъ значеній V, совмѣстное съ $U = A'$, будетъ меньше B, въ силу того условія, что B и A измѣняются въ одномъ смыслѣ; слѣд. A есть дѣйствительно minimum функціи U, когда V сохраняетъ постоянное значеніе B.

Примѣръ. — Пусть

$$U = x + y + z + t, \quad V = xyzt$$

по теоремѣ (667), если U сохраняетъ постоянную величину A, то V получаетъ наибольшее значеніе при

$$x = y = z = t.$$

а самый этотъ maximum $B = \left(\frac{A}{4}\right)^4$. Но A и B измѣняются въ одномъ смыслѣ (ибо x, y, z, t—положительны), слѣд. когда U сохраняетъ значеніе $\left(\frac{A}{4}\right)^4$, то наим. изъ значеній, принимаемыхъ U, будетъ A; этого значенія U достигаетъ, слѣд., при

$$x = y = z = t.$$

695. Въ заключеніе приведемъ еще нѣсколько примѣровъ тѣхъ аналитическихъ уловокъ, при помощи которыхъ можно элементарно находить max. и min. функцій высшихъ степеней отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

I. *Найти minimum* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, *зная, что* $x + y = 2a$.

Имѣемъ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{2a}{xy}$. Очевидно, эта дробь будетъ имѣть minimum тогда, когда знаменатель ея достигаетъ maximum'a; но $x + y = 2a$, слѣд. xy имѣетъ max. при $x = y = a$; при этихъ значеніяхъ x и y данное выраженіе и имѣемъ minimum $= \frac{2}{a}$.

II. *Найти minimum* $x + y$, *зная, что* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

$x + y$ будетъ имѣть min., когда $(x + y)^2$ имѣетъ minimum. Но, по условію, $\frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = \frac{1}{a^2}$, откуда

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = \frac{x^2y^2}{a^2} + 2xy = xy\left(\frac{xy}{a^2} + 2\right).$$

Очевидно, это выраженіе имѣетъ minimum, когда xy имѣетъ minimum, т.-е. когда $\frac{1}{xy}$, а потому и $\frac{1}{x^2y^2}$, имѣетъ max. Но $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2}$ (въ виду того, что сумма этихъ производителей постоянна) имѣетъ max. при $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2a^2}$, т.-е. при $x = y = a\sqrt{2}$. При этихъ значеніяхъ $x + y$ и имѣетъ minimum, равный $2a\sqrt{2}$.

III. *Найти minimum* $x^2 + y^2 + z^2$, *зная, что* $x + y + z = 3a$.

Тождественно имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2}{3} = \frac{9a^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2}{3}.$$

Отсюда видно, что данное выраженіе имѣетъ minimum тогда, когда имѣетъ minimum $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2$; но эта сумма существенно положительна, слѣд. ея minimum есть нуль, и имѣетъ мѣсто при $x = y = z$. Потому и данное выраженіе имѣетъ min при $x = y = z = a$; самый minimum $= 3a^2$.

IV. *Доказать, что если* $x + y = 2a$, *сумма* $x^m + y^m$ *имѣетъ minimum при* $x = y = a$.

Во-первыхъ, замѣчаемъ, что теорема справедлива для $m = 2$, ибо

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4a^2 - 2xy,$$

откуда ясно, что какъ уменьшаемое постоянно, то разность имѣетъ min., когда вычитаемое имѣетъ maximum, т.-е. при $x = y$.

Затѣмъ, допустивъ, что теорема справедлива для показателя $m-1$ и для всѣхъ предыдущихъ, докажемъ, что она справедлива и для показателя m.

Различаемъ два случая: $m=2m'$ и $m=2m''+1$.

Положивъ $m=2m'$, имѣемъ:

$$x^{2m'}+y^{2m'}=(x^{m'}+y^{m'})^2-2x^{m'}y^{m'};$$

по положенію, $x^{m'}+y^{m'}$ имѣемъ minimum при $x=y$; съ другой стороны $x^{m'}y^{m'}$ или $(xy)^{m'}$ имѣемъ maximum при $x=y$. Слѣд. $x^{2m'}+y^{2m'}$ имѣемъ minimum при $x=y$.

Положивъ $m=2m''+1$, имѣемъ:

$$x^{2m''+1}+y^{2m''+1}=(x^{m''+1}+y^{m''+1})(x^{m''}+y^{m''})-x^{m''}y^{m''}(x+y)=$$
$$(x^{m''+1}+y^{m''+1})(x^{m''}+y^{m''})-2a(xy)^{m''}.$$

Первая часть этой разности имѣетъ minimum при $x=y$, ибо, по положенію, оба ея множителя — minima при $x=y$; вторая часть имѣетъ при $x=y$ maximum. Слѣд. $x^{2m''+1}+y^{2m''+1}$ имѣемъ minimum при $x=y$.

На этомъ основаніи заключаемъ такъ: теорема вѣрна для $m=2$, слѣд., по доказанному, вѣрна и для $m=3$; будучи вѣрна для $m=2$ и $m=3$, вѣрна и для $m=4$ и т. д. Слѣд. она вѣрна для всякаго m.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

АНАЛИЗЪ СОЕДИНЕНІЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНІЯ.

ГЛАВА XLIII.

Размѣщенія, перестановки и сочетанія безъ повтореній и съ повтореніями.

696. Опредѣленія.—Если изъ m данныхъ предметовъ, напр., изъ m буквъ $a, b, c, d, \ldots, i, l$ взять k буквъ, гдѣ $k < m$, и написать ихъ другъ за другомъ въ какомъ-нибудь порядкѣ, то получится соединеніе, называемое *размѣщеніемъ изъ m буквъ по k*, или *размѣщеніемъ изъ m буквъ k-го порядка.* Такимъ образомъ одно размѣщеніе отличается отъ другого или самыми буквами, или только порядкомъ ихъ. Изъ данныхъ m буквъ можно составить нѣсколько размѣщеній k-го порядка: число ихъ обозначаютъ символомъ A_m^k, гдѣ нижній указатель m означаетъ число всѣхъ предметовъ (элементовъ), верхній k—число элементовъ, входящихъ въ каждое размѣщеніе.

Если въ составъ каждаго соединенія мы возьмемъ всѣ данныя буквы, то одно соединеніе будетъ отличаться отъ другого уже не буквами, а только порядкомъ, въ которомъ онѣ написаны. Такія соединенія называются *перестановками.* Число перестановокъ изъ m элементовъ обозначаютъ символомъ P_m. Изъ опредѣленія слѣдуетъ, что $P_m = A_m^m$

Если, взявъ m различныхъ буквъ, мы составимъ изъ нихъ соединенія по k буквъ въ каждомъ, такъ, чтобы одно соединеніе отличалось отъ другого *по крайней мѣрѣ одною буквою,* то получимъ такъ-называемыя *сочетанія* изъ m буквъ k-го порядка. Число ихъ обозначаютъ символомъ C_m^k.

Займемся указаніемъ способа составленія и опредѣленія числа соединеній каждаго рода.

Размѣщенія (arrangements).

697. Способъ составленія и опредѣленіе числа размѣщеній.—Пусть будутъ $a, b, c, d, \ldots k, i, l$ данные m элементовъ. Число размѣщеній изъ этихъ m буквъ, по одному элементу въ каждомъ, очевидно, равно числу элементовъ. Слѣд. $A_m^1 = m$.

Составимъ размѣщенія второго порядка, т.-е. содержащія по два элемента: для этого нужно взять поочередно каждую изъ m буквъ и приписать къ ней справа каждую изъ остальныхъ $m-1$ буквъ; такимъ образомъ получимъ таблицу:

ab	ba	ca .	ia .	la
ac	bc	cb .	ib .	lb
ad	bd	cd .	ic .	lc
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
ai	bi	ci .	. .	lh
al	bl	cl .	. .	li

Чтобы доказать, что такимъ образомъ получатся всѣ размѣщенія 2-го порядка, надо доказать, что ни одно размѣщеніе не было опущено, ни одно не повторено два раза. И въ самомъ дѣлѣ: 1) возьмемъ какое-ниб. размѣщеніе, напр., cd; для составленія вертикальныхъ колоннъ мы ставили по-очереди каждую букву на первомъ мѣстѣ; слѣд., въ частности, была взята и буква c; справа отъ этой буквы ставили каждую изъ остальныхъ буквъ, слѣд., въ частности, и букву d; что и дало размѣщеніе cd. Слѣд. ни одно размѣщеніе не было пропущено. 2) Сравнимъ два какія-нибудь размѣщенія таблицы: они будутъ находиться или въ одной и той же вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ будутъ различаться послѣдними буквами, или же будутъ содержаться въ двухъ различныхъ вертикальныхъ колоннахъ, — и въ такомъ случаѣ будутъ различаться первыми буквами. Убѣждаемся, что всѣ размѣщенія различны, т.-е. что таблица не содержитъ повтореній. Итакъ, послѣдняя содержитъ всѣ размѣщенія 2-го порядка.

Опредѣлимъ ихъ число. Очевидно, всѣхъ вертикальныхъ колоннъ столько, сколько всѣхъ размѣщеній 1-го порядка, т.-е. сколько всѣхъ буквъ, слѣд. m; въ каждой колоннѣ $m-1$ размѣщеній; слѣд. всѣхъ двойныхъ размѣщеній $m(m-1)$. **Итакъ, $A_m^2 = m(m-1)$.**

Составимъ тройныя размѣщенія изъ m буквъ. Для этого нужно взять поочередно каждое двойное размѣщеніе и приписать къ нему послѣдовательно каждую изъ $m-2$ остальныхъ буквъ; такимъ образомъ составимъ таблицу:

abc	acb	. .	bca	. .	lia
abd	acd	. .	bcd	. .	lib
abe	ace	. .	bce	. .	lic
.	.	. .	. .	.	.
.	.	. .	. .	.	.
.	.	. .	. .	. . .	.
abi	aci	. .	bci	. .	.
abl	acl	. .	bcl	. .	lih

Докажемъ, что ни одно тройное размѣщеніе не было пропущено и ни одно не повторено лишній разъ. И въ самомъ дѣлѣ: 1) возьмемъ какое-нибудь размѣщеніе lif. Для составленія вертикальныхъ колоннъ мы брали поочередно каждое двойное размѣщеніе; сл. между прочимъ было взято и li. Къ нему приписывали послѣдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, сл. въ частности была приписана и буква f, что и даетъ lif. Слѣд. таблица не содержитъ пропусковъ. 2) Сравнимъ два какія-нибудь размѣщенія таблицы. Или они находятся въ одной вертикальной колоннѣ, и тогда различаются послѣдними буквами; или — въ двухъ различныхъ колоннахъ, и въ такомъ случаѣ различаются, по крайней мѣрѣ, порядкомъ двухъ первыхъ буквъ, какъ acg и cag. Заключаемъ, что всѣ размѣщенія таблицы различны. Итакъ, она содержитъ всѣ размѣщенія 3-го порядка.

Опредѣлимъ ихъ число. Всѣхъ вертикальныхъ колоннъ столько, сколько двойныхъ размѣщеній изъ m буквъ, т.-е. A_m^2 или $m(m-1)$; въ каждой колоннѣ содержится $m-2$ размѣщенія; слѣд. всѣхъ тройныхъ размѣщеній $m(m-1)(m-2)$. Итакъ $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Разсматривая формулы A_m^1, A_m^2, A_m^3, замѣчаемъ, что всѣ онѣ составлены по одному и тому же закону: каждая представляетъ произведеніе чиселъ, послѣдовательно уменьшающихся на 1, начиная съ m и кончая множителемъ, равнымъ числу элементовъ, минусъ порядокъ размѣщеній, плюсъ 1; число же множителей равно порядку размѣщеній. Докажемъ общность этого закона, и для этого выведемъ формулу, выражающую зависимость между числами размѣщеній двухъ смежныхъ порядковъ, напр., связь между A_m^{k-1} и A_m^k. Вообразимъ, что мы составили всѣ размѣщенія $k-1$-го порядка, число которыхъ выражается символомъ A_m^{k-1}, и желаемъ составить размѣщенія k-го порядка. Для этого беремъ поочередно каждое размѣщеніе $k-1$-го порядка и приписываемъ къ нему поочередно каждую изъ остальныхъ буквъ, число которыхъ $=m-(k-1)$, или $m-k+1$. Такимъ образомъ составимъ столько вертикальныхъ колоннъ, сколько размѣщеній $k-1$-го порядка, а въ каждой колоннѣ $m-k+1$ размѣщеній. Докажемъ, что ни одно размѣщеніе k-го порядка не повторено два раза и что ни одно не пропущено. Въ самомъ дѣлѣ: 1) сравнивая два какія-нибудь размѣщенія, найдемъ, что они или находятся въ одной и той же вертикальной колоннѣ, и въ такомъ случаѣ разнятся послѣдними буквами, или же принадлежатъ двумъ различнымъ колоннамъ, и въ такомъ случаѣ разнятся, по крайней мѣрѣ, порядкомъ $k-1$ первыхъ буквъ, какъ $abc\ldots gh$ и $cg\ldots bah$. 2) Ни одно размѣщеніе k-го порядка не будетъ пропущено; въ самомъ дѣлѣ, пусть взято размѣщеніе k-го порядка $abc\ldots gh$. Для составленія этихъ размѣщеній мы брали поочередно каждое размѣщеніе $k-1$-го порядка, слѣд. въ частности было взято и размѣщеніе $abc\ldots g$; къ нему приписывали послѣдовательно каждую изъ остальныхъ буквъ, слѣд. приписали, между прочимъ, и букву h, что и дастъ $abc\ldots gh$. Итакъ, указаннымъ способомъ составлены всѣ размѣщенія k-го пор. изъ m буквъ.

Для опредѣленія ихъ числа, очевидно, нужно помножить число колоннъ, т.-е. число размѣщеній $k-1$-го пор. или A_m^{k-1} на число размѣщеній въ каждой колоннѣ, т.-е. на $m-k+1$. Имѣемъ:

$$A_m^k = A_m^{k-1}\,.\,(m-k+1).$$

Это и есть формула, связывающая числа A_m^k и A_m^{k-1}. Такъ какъ формула эта общая, то можемъ давать въ ней k всѣ цѣлыя значенія отъ 2 до k. Получимъ:

$$\begin{aligned} A_m^2 &= A_m^1(m-1) \\ A_m^3 &= A_m^2(m-2) \\ A_m^4 &= A_m^3(m-3) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_m^k &= A_m^{k-1}(m-k+1). \end{aligned}$$

Перемноживъ почленно эти равенства, сократимъ въ обѣихъ частяхъ общаго множителя $A_m^2\,.\,A_m^3\,.\,.\,.\,A_m^{k-1}$ и замѣнивъ A_m^1 его значеніемъ m, найдемъ:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)(m-3)\,.\,.\,.\,(m-k+1)\,.\,.\,.\,(I)$$

Отсюда

Теорема. *Число размѣщеній изъ m буквъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, уменьшающихся послѣдовательно на 1, изъ которыхъ первое равно m.*

698 Примѣръ I. *Сколько можно составить трехзначныхъ чиселъ изъ нечетныхъ цифръ 1, 3, 5, 7, 9?*

Искомое число, очевидно, есть число размѣщеній изъ 5 элементовъ по 3; слѣд. оно равно $A_5^3 = 5 \times 4 \cdot 3 = 60$.

Примѣръ II. *Сколько можно бы было составить словъ изъ 20 согласныхъ и 6 гласныхъ, если каждое слово должно заключать 3 согласныхъ и 2 гласныхъ, причемъ послѣднія могутъ занимать только второе и четвертое мѣста?*

20 согласныхъ дадутъ размѣщеній по 3 буквы въ каждомъ: A_{20}^3; въ каждомъ изъ этихъ размѣщеній 6 гласныхъ, помѣщаемыя по-парно на второмъ и четвертомъ мѣстѣ, могутъ быть размѣщены A_6^2 способами; слѣд. число искомыхъ словъ $= A_{20}^3 \times A_6^2 = 20 \,.\, 19 \,.\, 18 \times 6 \,.\, 5 = 205200$.

Перестановки (permutations).

699. Способъ составленія и опредѣленіе числа перестановокъ. — Перестановки различаются отъ размѣщеній только тѣмъ, что берутся всѣ буквы. Изъ этого прямо слѣдуетъ, что для составленія перестановокъ изъ m буквъ надо изъ этихъ буквъ составить всѣ размѣщенія по 2, изъ нихъ размѣщенія по 3 и т. д., пока не дойдемъ до размѣщеній по m. Отсюда также слѣдуетъ, что для опредѣленія числа перестановокъ изъ m буквъ нужно только въ формулѣ $A_m^k = m(m-1)(m-2) \ldots (m-k+2)(m-k+1)$ положить $k = m$. Такимъ образомъ найдемъ

$$P_m = A_m^m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (m-2)(m-1)m.$$

Отсюда

Теорема. *Число перестановокъ изъ m элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m.*

Можно доказать эту теорему независимо отъ формулы числа размѣщеній. Въ самомъ дѣлѣ, пусть составлены перестановки изъ $m-1$ буквъ $a, b, c, d, \ldots, h, i, k$, и пусть число перестановокъ будетъ P_{m-1}. Чтобы составить перестановки изъ m буквъ, беремъ каждую перестановку изъ $m-1$ буквъ и вводимъ въ нее m-ую букву l, помѣщая послѣдовательно слѣва и справа этой перестановки и во всѣ промежутки между ея буквами. Такимъ образомъ мы составимъ всѣ перестановки изъ m буквъ, безъ повтореній и безъ пропусковъ. Безъ повтореній — потому, что одна перестановка будетъ отличаться отъ другой или порядкомъ $m-1$ первоначально взятыхъ буквъ, или мѣстомъ, которое занимаетъ новая буква l. Безъ пропусковъ, ибо, взявъ перестановку $ablc \ldots k$, напр., замѣчаемъ, что она произошла изъ перестановки $abc \ldots k$, составленной изъ $m-1$ первоначальныхъ элементовъ, въ которую буква l введена на 3-е мѣсто; слѣд. такая перестановка была получена.

Итакъ: указаннымъ способомъ получимъ всѣ перестановки изъ m буквъ. Опредѣлимъ ихъ число. Каждая перестановка изъ $m-1$ буквъ даетъ m перестановокъ изъ m буквъ, ибо буква l можетъ занять въ первой m различныхъ мѣстъ; слѣд.

$$P_m = mP_{m-1};$$

такова связь между P_{m-1} и P_m. Формула эта справедлива для всякаго m, будучи совершенно общею; давая въ ней m послѣдовательно всѣ значенія отъ 2 до m, находимъ:

$$P_2 = P_1 \,.\, 2;\quad P_3 = P_2 \,.\, 3;\quad P_4 = P_3 \,.\, 4;\; .\;.\;.\;;\quad P_m = P_{m-1} \,.\, m.$$

Перемноживъ эти равенства, уничтоживъ общіе множители въ обѣихъ частяхъ, и замѣчая, что $P_1 = 1$, находимъ:

$$P_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \;.\;.\;.\; (m-1) \,.\, m \;.\;.\;.\; (\mathrm{II}).$$

Такое произведеніе m первыхъ натуральныхъ чиселъ часто встрѣчается въ формулахъ анализа. ему дано особое названіе — *факторіала m*.

700. Примѣръ. *Сколькими способами 5 лошадей могутъ быть запряжены въ дилижансъ?*

Очевидно, искомое число есть число перестановокъ изъ 5 предметовъ; слѣд. оно равно 1 . 2 . 3 . 4 . 5, или 120.

Примѣчаніе. Помощію перестановокъ въ прежнее время отыскивались *анаграммы* фразъ и словъ. Такъ, изъ имени Генриха III Валуа, Henri de Valois, выходитъ: Vilain Herode, s.; изъ имени убійцы Генриха III, Frere Jacques Clement выходитъ: c'est l'enfer qui m'a cree; изъ словъ Domus Lescinia (домъ Лещинскихъ) Яблонскій составилъ слѣдующія фразы: Ades incolumis, omnis es lucida, mane sidus loci, sis columna Dei, I scande solium; въ послѣдней анаграммѣ было предсказаніе: Станиславъ сдѣлался королемъ польскимъ. Нахожденіе подобныхъ анаграммъ весьма затруднительно, такъ какъ число перестановокъ изъ довольно значительнаго числа буквъ бываетъ чрезвычайно велико; напр. число перестановокъ изъ 12 предметовъ будетъ 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12; это число представляетъ, напр., сколькими способами могутъ 12 лицъ размѣститься на 12 мѣстахъ; положивъ, что 1 пересадку они успѣваютъ сдѣлать въ 1 минуту, что въ сутки они употребляютъ на это 12 часовъ и въ годъ 360 дней, найдемъ, что всѣ пересадки могутъ быть окончены чрезъ 1848 лѣтъ.

Сочетанія (combinaisons).

701. Способъ составленія и опредѣленіе числа сочетаній.—Пусть дано m буквъ: $a, b, c, d, \;.\;.\;.\;, h, i, l$: это будутъ сочетанія изъ m буквъ по одной. Для составленія двойныхъ сочетаній беремъ каждую букву, кромѣ послѣдней, и приписываемъ къ ней послѣдовательно каждую изъ слѣдующихъ за нею. Получимъ таблицу двойныхъ сочетаній

$$\begin{array}{rrrrrrr}
ab, & ac, & ad, & .\;.\;.\;.\;, & ah, & ai, & al \\
 & bc, & bd, & .\;.\;.\;.\;, & bh, & bi, & bl \\
 & & cd, & .\;.\;.\;.\;, & ch, & ci, & cl \\
 & & . & .\;.\;.\;. & . & . & . \\
 & & . & .\;.\;.\;. & . & . & . \\
 & & & & & & il.
\end{array}$$

Чтобы составить тройныя сочетанія, беремъ каждое изъ двойныхъ, кромѣ тѣхъ, которыя содержатъ послѣднюю букву (al, bl, . . . , il), и приписываемъ послѣдовательно каждую слѣдующую букву; получимъ

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ abe,\ \ldots\ldots,\ abh,\ abi,\ abl \\ \qquad acd,\ ace,\ \ldots\ldots,\ ach,\ aci,\ acl \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \text{и т. д.} \end{array}$$

Этимъ мы изъ размѣщеній выбрасываемъ такія, которыя отъ имѣющихся уже отличаются только мѣстами буквъ, и сл. получаемъ сочетанія. Но изъ способа составленія сочетаній трудно опредѣлить ихъ число; легче это сдѣлать при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. *Число размѣщеній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ m буквъ по k, помноженному на число перестановокъ изъ k буквъ, т.-е.* $A_m^k = C_m^k \,.\, P_k$.

Вообразимъ, что мы составили таблицу сочетаній изъ m буквъ k-го порядка; число ихъ выражается символомъ C_m^k. Взявъ каждое изъ этихъ сочетаній (содержащее k буквъ), сдѣлаемъ въ немъ всевозможныя перестановки, число которыхъ (изъ одного сочетанія) будетъ P_k. Докажемъ, что такимъ образомъ мы составимъ всѣ размѣщенія изъ m по k, безъ пропусковъ и безъ повтореній. Въ самомъ дѣлѣ, если взять изъ составленной таблицы два члена, то: или они происходятъ отъ двухъ разныхъ сочетаній, и въ такомъ случаѣ различаются буквами; или же происходятъ изъ одного и того же сочетанія, — и въ такомъ случаѣ разнятся порядкомъ буквъ. Слѣд. таблица не содержитъ повтореній. Въ ней нѣтъ и пропусковъ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторый членъ z группы A_m^k, не обращая вниманія на порядокъ буквъ въ немъ; этотъ членъ представляетъ нѣкоторое сочетаніе изъ m буквъ по k, и слѣд., если не обращать вниманія на порядокъ его буквъ, онъ находится въ группѣ C_m^k; такъ какъ буквы этого сочетанія были перемѣщены всѣми возможными способами, то z необходимо содержится въ числѣ полученныхъ размѣщеній. Зная это, замѣтимъ, что одно сочетаніе порядка k даетъ P_k перестановокъ, слѣд.

$$A_m^k = C_m^k \,.\, P_k,$$

откуда

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} \quad \ldots \text{(III)}$$

Итакъ, имѣемъ теорему: *число сочетаній изъ m буквъ по k равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательно убывающихъ на 1, первое изъ которыхъ m, дѣленному на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до k.*

Можно доказать эту теорему независимо отъ формулъ числа размѣщеній и числа перестановокъ.

Пусть дано m буквъ a, b, c, d,... Обозначивъ число сочетаній порядка k символомъ C_m^k и, выразивъ двумя способами число буквъ, содержащихся во всей совокупности этихъ сочетаній, приравняемъ другъ другу результаты счета. Каждое сочетаніе содержитъ k буквъ, а всѣхъ сочетаній C_m^k: сл. всѣхъ буквъ въ нихъ будетъ $k \times C_m^k$...(1).

Выразимъ это число иначе. Если отбросить букву a, то изъ остальныхъ буквъ можно составить C_{m-1}^{k-1} сочетаній $k-1$-го порядка. Если къ каждому приписать букву a, то составятся сочетанія k-го порядка съ буквою a, и число ихъ будетъ, слѣдовательно, C_{m-1}^{k-1}. Итакъ, во всей совокупности сочетаній k-го порядка число такихъ, въ которыя входитъ буква a, будетъ C_{m-1}^{k-1}. Подобнымъ же образомъ число сочетаній, въ которыя входитъ буква b, будетъ C_{m-1}^{k-1}, и т. д. для каждой изъ m буквъ. Слѣдовательно, число всѣхъ буквъ во всѣхъ сочетаніяхъ k-го порядка, будетъ $m \times C_{m-1}^{k-1}$.. (2).

Приравнивая числа (1) и (2), имѣемъ

$$k \,.\, C_m^k = m \,.\, C_{m-1}^{k-1}, \quad \text{откуда} \quad C_m^k = \frac{m}{k} C_{m-1}^{k-1},$$

т. к. эта формула общая, то можно написать

$$C_{m-\alpha}^{k-\alpha} = \frac{m-\alpha}{k-\alpha} C_{m-\alpha-1}^{k-\alpha-1}.$$

Подставляя вмѣсто α числа 0, 1, 2, ... $k-2$, получимъ

$$C_m^k = \frac{m}{k} C_{m-1}^{k-1}$$

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{m-1}{k-1} C_{m-2}^{k-2}$$

$$C_{m-2}^{k-2} = \frac{m-2}{k-2} C_{m-3}^{k-3}$$

$$C_{m-k+2}^{2} = \frac{m-k+2}{2} C_{m-k+1}^{1}.$$

Перемножая эти тождества и сокращая въ обѣихъ частяхъ общіе множители, найдемъ

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\,.\,.\,.\,(m-k+2)}{k(k-1)(k-2)\,.\,.\,.\,2} C_{m-k+1}^1,$$

а какъ $C_{m-k+1}^1 = m-k+1$, такъ какъ оно означаетъ число сочетаній изъ $m-k+1$ буквъ по одной въ каждомъ и, слѣд., равно числу этихъ буквъ, то легко видѣть, что

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k}.$$

702. Примѣры—I. *Въ обществѣ изъ 12 лицъ выбираютъ коммиссію изъ 5 членовъ, для разработки нѣкотораго вопроса; сколькими способами эта коммиссія можетъ быть составлена?*

Такъ какъ одинъ составъ комиссіи долженъ отличаться отъ другого и не содержать всѣхъ тѣхъ же лицъ, то, очевидно, искомое число есть число сочетаній изъ 12 элементовъ по 5; слѣд. оно $= C_{12}^5 = \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = 11.9.8 = 792$.

II. *Сколько различныхъ діагоналей можно провести въ десятиугольникѣ?*

Искомое число есть число сочетаній изъ 10 элементовъ по 2, уменьшенное 10-ью (10 стор. мног.), и сл. $= C_{10}^2 - 10 \quad \frac{10 . 9}{1 . 2} \quad 10 - 35$.

703. Число C_m^k есть необходимо число цѣлое; поэтому изъ формулы (III) прямо получается

Теорема. *Произведеніе k послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на произведеніе первыхъ k цѣлыхъ чиселъ.*

704. Формула (III) можетъ быть представлена въ другомъ видѣ. Помноживъ ея числителя и знаменателя на $(m - k)(m - k \quad 1)(m - k - 2) \ldots 3.2.1$ или, что то же, на $1.2.3 \ldots (m - k)$, найдемъ

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-k+1)(m-k)(m-k-1) \ldots 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 \ldots k \times 1 . 2 . 3 \ldots (m-k)}.$$

Прочитавъ числителя въ обратномъ порядкѣ, находимъ, что онъ представляетъ произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m; слѣд. можно написать:

$$C_m^k = \frac{1 . 2 . 3 \ldots m}{1 . 2 . 3 \ldots k \times 1 . 2 . 3 \ldots (m-k)}, \text{ или еще } C_m^k = \frac{P_m}{P_k \times P_{m-k}} \cdots (IV).$$

Замѣчая, что C_m^k есть число цѣлое, изъ послѣднихъ формулъ прямо находимъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Произведеніе ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m всегда дѣлится на произведеніе $1.2.3 \ldots k$, на произведеніе $1.2.3 \ldots (m-k)$ и на произведеніе этихъ двухъ произведеній*, полагая $k < m$.

705. Свойства сочетаній.—I. *Число сочетаній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ m буквъ по $m - k$, т.-е.* $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ IV имѣемъ:

$$C_m^k = \frac{P_m}{P_k . P_{m-k}} \quad \text{и} \quad C_m^{m-k} = \frac{P_m}{P_{m-k} . P_{m-(m-k)}} = \frac{P_m}{P_{m-k} . P_k},$$

откуда прямо слѣдуетъ равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Можно доказать эту теорему еще такъ. Пусть въ урну положено m буквъ. Выньемъ изъ урны какія-нибудь k буквъ. Эти k буквъ образуютъ *одно, и только одно*, сочетаніе изъ m буквъ по k. Оставшіяся въ урнѣ $m - k$ буквъ образуютъ своей совокупностью *одно, и только одно*, сочетаніе изъ этихъ m буквъ по $m - k$. Такимъ образомъ всякому члену группы C_m^k соотвѣтствуетъ одинъ, и только одинъ, членъ группы C_m^{m-k}, и обратно: слѣд. число членовъ обѣихъ группъ одинаково.

II. *Число сочетаній изъ m буквъ по k равно числу сочетаній изъ $m - 1$ буквъ по k, сложенному съ числомъ сочетаній изъ $m - 1$ буквъ по $k - 1$; т.-е.* $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ IV можемъ написать:

$$C_{m-1}^k = \frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{1.2 \ldots k.1\ 2 \ldots (m-k-1)} \text{ и } C_{m-1}^{k-1} = \frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{1\ 2 \ldots (k-1)\ 1.2 \ldots (m-k)}.$$

Складывая, находимъ:

$$C_{m-1}^{k}+C_{m-1}^{k-1}=\frac{1.2.3\,.\,.\,.\,(m-1)}{1.2\,.\,.\,.\,(k-1).1.2\,.\,.\,.\,(m-k-1)}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m-k}\right);$$

но

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m-k}=\frac{m}{k\,.\,(m-k)},$$

слѣд.

$$C_{m-1}^{k}+C_{m-1}^{k-1}=\frac{1.2.3\,.\,.\,.\,(m-1).m}{1.2\,.\,.\,.\,(k-1)\,.\,k\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,(m-k-1)\,(m-k)}=C_{m}^{k}.$$

Теорема эта можетъ быть доказана иначе. Члены группы C_m^k могутъ быть разбиты на двѣ части: пусть первая содержитъ всѣ тѣ сочетанія, въ которыя не входитъ буква a: ихъ число будетъ C_{m-1}^k. Другая группа будетъ содержать сочетанія съ буквою a. Вынеся въ нихъ за скобки букву a, получимъ въ скобкахъ, безъ пропусковъ и безъ повтореній, всѣ члены группы C_{m-1}^{k-1}, составленные изъ буквъ b, c, d,... h, i, l. Итакъ, дѣйствительно, число C_m^k есть сумма чиселъ C_{m-1}^k и C_{m-1}^{k-1}.

706. Задача I. *Въ числѣ сочетаній изъ 12 буквъ a, b, c, d... по 5 сколько такихъ сочетаній, каждое изъ которыхъ содержило бы 3 опредѣленныя буквы, напр. a, b, c?*

Для рѣшенія вопроса напишемъ подрядъ буквы a, b, c; къ этимъ буквамъ нужно послѣдовательно приписывать парныя сочетанія изъ остальныхъ 9 буквъ. Искомое число и будетъ число парныхъ сочетаній изъ 9 буквъ, т.-е. $\frac{9\,.\,8}{1\,.\,2}$ или 36.

Задача II. *Въ числѣ сочетаній изъ m буквъ a, b, c,... по k, сколько такихъ, которыя не содержатъ ни одной изъ p опредѣленныхъ буквъ a, b, c,...?*

Отдѣливъ эти p буквъ, которыя не должны входить въ составъ требуемыхъ сочетаній, изъ остальныхъ $m-p$ буквъ составимъ сочетанія k-го порядка: ихъ число и будетъ искомое, т.-е.

$$\frac{(m-p)(m-p-1)\,.\,.\,.\,(m-p-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k}.$$

Задача III. *Въ числѣ сочетаній изъ m буквъ a, b, c,... по k, сколько такихъ, которыя содержатъ, по крайней мѣрѣ, одну изъ опредѣленныхъ p буквъ a, b, c,...?*

Очевидно, искомое число есть разность между полнымъ числомъ сочетаній изъ m буквъ по k и числомъ сочетаній, не содержащихъ ни одной изъ p опредѣленныхъ буквъ, т.-е.

$$\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k}-\frac{(m-p)(m-p-1)\,.\,.\,.\,(m-p-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k}.$$

Соединенія съ повтореніями.

707. Размѣщенія съ повтореніями — Размѣщенія называютъ *полными* или *съ повтореніями*, когда буквы въ размѣщеніяхъ могутъ *повторяться* нѣсколько разъ.

Пусть дано m буквъ: $a,b,c,d,\ldots,h,i,l$. Чтобы составить изъ нихъ двойныя размѣщенія съ повтореніями, нужно къ каждой изъ буквъ приписать послѣдовательно каждую изъ данныхъ буквъ безъ исключенія; такимъ образомъ получимъ двойныя размѣщенія:

съ буквою a въ началѣ: $aa,ab,ac \ldots\ldots, ah,ai,al$;
съ буквою b въ началѣ: $ba,bb,bc \ldots\ldots, bh,bi,bl$;
съ буквою c въ началѣ: $ca,cb,cc \ldots\ldots, ch,ci,cl$; и т. д.

Способомъ, которымъ пользовались выше, докажемъ и здѣсь, что полученныя размѣщенія всѣ различны и не содержатъ пропусковъ. Легко найти число ихъ. Съ каждою буквою въ началѣ имѣемъ m размѣщеній, и какъ каждая изъ m буквъ поочередно ставится въ началѣ, то всѣхъ размѣщеній будетъ $m \cdot m$ или m^2

Для составленія тройныхъ размѣщеній беремъ одно двойное, напр., aa и приписываемъ къ нему каждый изъ данныхъ элементовъ *безъ исключенія*, двойное размѣщеніе aa дастъ тройныя:

$$aaa,aab,aac,\ldots\ldots,aah,aai,aal;$$

двойное размѣщеніе ab дастъ тройныя:

$$aba,abb,abc,\ldots\ldots,abh,abi,abl; \text{ и т. д.}$$

Извѣстнымъ образомъ докажемъ, что, поступая такъ, ни одного тройнаго разм. мы не пропустимъ, и ни одного не повторимъ лишній разъ. Число ихъ опредѣлить легко. Одно двойное размѣщеніе дастъ m тройныхъ, слѣд. m^2 двойныхъ размѣщеній дадутъ $m \times m^2$ тройныхъ.

Вообще, число размѣщеній r-го порядка, обозначаемое символомъ $\mathfrak{A}^r_m$, будетъ m^r. Доказать это значитъ доказать, что если число размѣщеній $r-1$-го пор. есть m^{r-1}, то число размѣщеній порядка r есть m^r. Въ самомъ дѣлѣ, послѣднія мы получаемъ, приписывая къ каждому размѣщенію $r-1$-го пор. каждую изъ m буквъ; такимъ обр. одно размѣщеніе $r-1$-го пор. дастъ m размѣщеній порядка r, слѣд. m^{r-1} размѣщеній $r-1$-го пор. дадутъ $m \cdot m^{r-1}$ или m^r размѣщеній порядка r.

Примѣры.—I. *Сколько можно написать трехзначныхъ чиселъ изъ девяти цифръ 1,2, . . . , 9?*

Очевидно, столько, сколько можно сдѣлать тройныхъ размѣщеній съ повтореніями изъ 9 элементовъ, т.-е. 9^3 или 729.

II. *Сколькими способами могутъ вскрыться 3 игральныя кости* (костяные кубики съ нумерованными гранями)?

Очевидно, 6^3 или 216 способами.

708. Перестановки съ повтореніями. Вообразимъ m буквъ, въ числѣ которыхъ буква a повторяется α разъ, b — β разъ, c — γ разъ и т. д., причемъ $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ равно или меньше m, т.-е. что каждая буква повторяется, или что есть и неповторяющіяся буквы. Группы, получаемыя отъ всевозможныхъ перестановокъ этихъ m буквъ, называются *перестановками съ повтореніями*; число ихъ будемъ обозначать символомъ: N_m.

Обозначимъ на время число ихъ буквою x и опредѣлимъ его. Въ каждой группѣ поставимъ у α буквъ, равныхъ a, значки 1, 2, 3, . . . , α. Переставимъ эти значки всевозможными способами; такъ какъ изъ α элементовъ можно сдѣлать P_α перестановокъ, то получится новая таблица, въ которой будетъ $x \cdot P_\alpha$ группъ. Эта таблица содержитъ всѣ перестановки изъ m буквъ, въ числѣ которыхъ β буквъ равны b, γ буквъ равны c, . . . , а другія различны. Въ самомъ дѣлѣ. 1) каждыя двѣ группы этой таблицы различны, ибо если они получаются изъ одной и той же группы первоначальной таблицы, то разнятся порядкомъ значковъ 1, 2, . . . , α; а если происходятъ отъ двухъ различныхъ группъ, то отличаются порядкомъ буквъ. 2) Какая угодно перестановка изъ m буквъ, въ которой β буквъ равны b, γ равны c, . . . , остальныя же буквы различны, находится въ этой второй таблицѣ; ибо если въ этой перестановкѣ уничтожить значки 1, 2, ... , α, то получимъ группу первой таблицы, а, по предположенію, буквы *a* въ этой группѣ были снабжены индексами 1, 2, . . . , α и послѣдніе перемѣщены всевозможными способами.

Затѣмъ, въ каждой группѣ 2-ой таблицы поставимъ у буквы *b* значки 1, 2, 3, . . . , β и перемѣстимъ эти значки всевозможными способами, получимъ 3-я таблица, число членовъ которой равно $x \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta$. Какъ и выше, докажемъ, что эти члены суть различныя перестановки изъ *m* буквъ, въ числѣ которыхъ γ буквъ равны *c* и т. д.

Продолжая такимъ образомъ, получимъ всѣ перестановки изъ *m* буквъ числомъ $x \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma$ . . . Но когда всѣ равныя буквы замѣнятся неравными, то образуются перестановки изъ *m* буквъ, безъ повтореній; число такихъ перестановокъ равно P_m. Итакъ:

$$x \,.\, P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \,.\,.\,. = P_m, \text{ откуда } x = \frac{P_m}{P_\alpha \,.\, P_\beta \,.\, P_\gamma \,.\,.\,.}, \text{ или}$$

$$N_m = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,. m}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,. \alpha \times 1 \,.\, 2 \,.\,.\,. \beta \times 1 \,.\, 2 \,.\,.\,. \gamma \times \,.\,.\,.}.$$

Примѣры: I. *Сколько можно составить пятизначныхъ чиселъ цифрами 3 и 5, изъ которыхъ первая повторяется 2 раза, вторая 3 раза?*

Искомое число, очевидно, есть $\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, т.-е. 10.

II. *Какъ велика сумма цифръ во всѣхъ перестановкахъ изъ цифръ* 122334?

Число всѣхъ перестановокъ $= \frac{P_6}{P_2 \,.\, P_2} = 180$; въ каждой перестановкѣ сумма цифръ $= 15$, слѣд. во всѣхъ перестановкахъ она $= 15 \times 180 = 2700$.

III. *Въ урнѣ 10 шаровъ: 3 бѣлыхъ, 4 красныхъ, 2 черныхъ и 1 синій. Сколько можетъ быть перестановокъ изъ этихъ шаровъ?*

Число искомыхъ перестановокъ $= \frac{P_{10}}{P_3 \,.\, P_4 \,.\, P_2} = 12600$

709. Сочетанія съ повтореніями.—Имѣя *m* данныхъ буквъ *a*, *b*, *c*, *d*, . . . , *h*, *i*, *l*, и взявъ букву *a*, присоединимъ къ ней поочередно всѣ буквы, не исключая и буквы *a*, затѣмъ къ *b* присоединимъ послѣдовательно всѣ слѣдующія за ней буквы и самую букву *b*; къ *c* — всѣ за ней слѣдующія и *c*, и т. д. Получимъ группы, различающіяся, по крайней мѣрѣ, однимъ элементомъ и называемыя *сочетаніями изъ m буквъ 2-го порядка съ повтореніями.*

$$\begin{array}{llllll}
aa & bb & cc & . & . & ii \; ll \\
ab & bc & cd & . & . & il \\
ac & bd & . & . & . & \\
. & . & . & & & \\
. & . & ci & & & \\
. & bi & cl & & & \\
ai & bl & & & & \\
al & & & & &
\end{array}$$

Затѣмъ, взявъ каждое сочетаніе 2-го порядка, припишемъ къ нему букву, которою оно оканчивается и каждую изъ слѣдующихъ буквъ, составимъ группы, разнящіяся, по крайней мѣрѣ, однимъ элементомъ и образующія *сочетанія изъ m элементовъ 3-го порядка съ повтореніями*, и т. д.

$$\begin{array}{llllllll}
aaa & abb & . & . & . & iii & ill & lll \\
aab & abc & . & . & . & iil & & \\
aac & . & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & . & & & \\
aal & abl & . & . & . & & &
\end{array}$$

Въ простыхъ сочетаніяхъ порядокъ *k* былъ необходимо $\leqslant m$; въ случаѣ сочетаній съ повтореніями порядокъ ихъ м. б. какой угодно, т.-е. *k* можетъ быть $\geqslant m$. Напр., изъ двухъ буквъ *a* и *b* сочетанія съ повтореніями могутъ быть и 3-го, и 4-го и т. д. порядковъ; такъ полныя сочетанія 3-го пор. изъ двухъ буквъ *a* и *b* будутъ: *aaa*, *aab*, *abb*, *bbb*.

Чтобы опредѣлить число полныхъ сочетаній изъ *m* буквъ *k*-го порядка, сосчитаемъ двумя различными способами, сколько разъ какая-нибудь опредѣленная буква, *a* напр., встрѣчается во всѣхъ этихъ сочетаніяхъ, и приравняемъ одинъ другому результаты счета. Обозначимъ искомое число сочетаній знакомъ Γ_m^k, а буквою x обозначимъ, сколько разъ въ нихъ встрѣчается буква a. Въ каждомъ сочетаніи находится k буквъ; а число сочетаній $=\Gamma_m^k$, сл. всѣхъ буквъ во всѣхъ сочетаніяхъ будетъ $k\,\Gamma_m^k$; но это же число буквъ равно mx, слѣд.

$$mx = k\,\Gamma_m^k, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{k\,\Gamma_m^k}{m}.$$

Вычеркнемъ букву *a по одному разу* изъ всѣхъ сочетаній, въ которыхъ она встрѣчается. Урѣзанныя такимъ образомъ сочетанія будутъ составлены изъ данныхъ m буквъ, но въ каждомъ будетъ только по $k-1$ буквъ; способомъ, не разъ уже указаннымъ, докажемъ, что совокупность этихъ урѣзанныхъ сочетаній представитъ *всѣ* полныя сочетанія изъ m буквъ по $k-1$. Ихъ число, согласно принятой нотаціи, будетъ Γ_m^{k-1}.

Они будутъ содержать и букву a; и чтобы выразить, сколько разъ встрѣчается въ нихъ буква a, нужно только вм. k подставить $k-1$ въ вышенайденную формулу. Найдемъ $\frac{k-1}{m}\,\Gamma_m^{k-1}$.

Такъ какъ буква a изъ сочетаній съ повтореніями изъ m буквъ по k была вычеркнута Γ_m^{k-1} разъ, то

$$x = \Gamma_m^{k-1} + \frac{k-1}{m}\,\Gamma_m^{k-1} = \frac{m+k-1}{m}\,\Gamma_m^{k-1}.$$

Приравнивая одно другому два выраженія для x, имѣемъ

$$\frac{k\,\Gamma_m^k}{m} = \frac{m+k-1}{m}\,\Gamma_m^{k-1}, \text{ откуда}$$

$$\Gamma_m^k = \frac{m+k-1}{k}\,\Gamma_m^{k-1}.$$

Подставляя сюда вмѣсто k поочередно k, $k-1$, $k-2, \ldots, 2$, и замѣчая, что $\Gamma_m^1 = m$, найдемъ

$$\Gamma_m^k = \frac{(m+k-1)(m+k-2)\ldots(m+1)m}{1.2\ldots k}.$$

Очевидно, что $\Gamma_m^k = C_{m+k-1}^k$, и слѣдовательно, можно высказать теорему:

Число полныхъ сочетаній изъ m элементовъ k-го порядка равно числу сочетаній безъ повтореній изъ $m+k-1$ элементовъ по k.

Можно еще замѣтить, что, какъ по свойству обыкновенныхъ сочетаній, $C_{m+k-1}^k = C_{m+k-1}^{m-1}$, то

$$\Gamma_m^k = C_{m+k-1}^{m-1}.$$

Первая формула удобнѣе для случаевъ, когда $k < m-1$, вторая—въ противныхъ случаяхъ.

Нижеслѣдующее, иное, доказательство дано профессоромъ *Валецкимъ*.

Найти число сочетаній съ повтореніями изъ m буквъ $a, b, c, \ldots, l$ порядка k. Всякое такое сочетаніе м. б. изображено одночленомъ $a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda$, гдѣ $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ суть m цѣлыхъ, положительныхъ или равныхъ нулю, чиселъ, которыхъ сумма $=k$. Всѣхъ сочетаній будетъ столько, сколькими способами можно распредѣлить k единицъ между m числами, нулевыми или положительными. Чтобы представить одно изъ такихъ распредѣленій, расположимъ въ рядъ $m-1$ какихъ-либо знаковъ, напр., 0; затѣмъ напишемъ единицы числа α передъ первымъ 0, единицы β въ первомъ промежуткѣ и т. д., наконецъ, единицы числа λ за послѣднимъ 0; не ставя ничего, если показатель есть нуль. Такимъ образомъ получатся группы въ родѣ: 0.110...01, состоящія изъ k единицъ и $m-1$

раздѣлительныхъ знаковъ. Сочетаній столько, сколько группъ этого рода, а число этихъ группъ есть число перестановокъ изъ $m+k-1$ буквъ, въ числѣ которыхъ находится k единицъ и $m-1$ значковъ 0. Такимъ образомъ, обозначая искомое число сочетаній знакомъ Γ_m^k, получимъ:

$$\Gamma_m^k = \frac{1.2.3\ldots(m+k-1)}{1.2.3\ldots(m-1)\times 1.2.3\ldots k}\ldots(1)$$

Эту формулу можно представить въ другомъ видѣ, сокративъ на $1.2.3\ldots(m-1)$; найдемъ

$$\Gamma_m^k = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)}{1.2.3\ldots k}\ldots(2).$$

Напр., число тройныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 4 элементовъ будетъ $\Gamma_4^3 = \frac{4.5.6}{1.2.3} = 20$.

710. Иногда можно упрощать опредѣленіе числа сочетаній съ повтореніями при помощи соотношенія

$$\Gamma_m^k = \Gamma_{k+1}^{m-1}\ldots(3).$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы (1) имѣемъ

$$\Gamma_m^k = \frac{1.2.3\ldots(m+k-1)}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots k} \text{ и } \Gamma_{k+1}^{m-1} = \frac{1.2.3\ldots(m+k-1)}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots k}$$

а эти дроби равны.

Напр., $\Gamma_3^{10} = \Gamma_{11}^2 = \frac{11.12}{1.2} = 66$.

711. Примѣръ. *На сколько способовъ могутъ вскрыться 2, 3, . . . игральныя кости?*

Двѣ кости могутъ вскрыться на столько способовъ, сколько существуетъ парныхъ сочетаній съ повтореніями изъ 6 элементовъ, т. е. на $\Gamma_6^2 = \frac{6.7}{1.2} = 21$ способъ.

Три кости кости могутъ вскрыться на $\Gamma_6^3 = \frac{6.7.8}{1.2.3}$ способовъ и т. д.

ГЛАВА XLIV.

Биномъ Ньютона.

Выводъ формулы бинома Ньютона для цѣлаго положительнаго показателя.—Свойства этой формулы.—Степень полинома.—Ариѳметическій треугольникъ Паскаля.

712. Произведеніе биномовъ $(x+a)(x+b)\ldots(x+h)(x+i)$. Прямымъ умноженіемъ находимъ:

$$1.\ (x+a)(x+b) = x^2 + \begin{array}{l} a \\ +b \end{array} x + ab;$$

2. $$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\end{array}\right|x^2+\begin{array}{r}ab\\+ac\\+bc\end{array}x+abc;$$

3. $$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{array}{r}a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{r}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right|x^2+\begin{array}{r}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}x+abcd.$$

и т. д.

Внимательное разсмотрѣніе этихъ произведеній обнаруживаетъ слѣдующіе законы ихъ состава:

1) Число членовъ каждаго произведенія единицею больше числа перемножаемыхъ биномовъ.

2) Каждое произведеніе расположено по убывающимъ степенямъ общей буквы x биномовъ, причемъ: показатель буквы x въ первомъ членѣ равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; затѣмъ показатели x идутъ постепенно уменьшаясь на 1, до послѣдняго члена, который не содержитъ буквы x, или, что тоже, содержитъ x въ *нулевой* степени.

3) Коэффиціентъ перваго члена равенъ 1; коэф. 2-го члена равенъ суммѣ вторыхъ членовъ биномовъ, или, что тоже, суммѣ сочетаній перваго порядка изъ вторыхъ членовъ; коэф. третьяго члена равенъ суммѣ двойныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ; коэф. четвертаго члена — суммѣ тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ, и т. д. Наконецъ, послѣдній членъ равенъ произведенію вторыхъ членовъ всѣхъ биномовъ.

Докажемъ общность этого закона. Для этого, допустивъ, что законъ вѣренъ для $m-1$ бинома, докажемъ, что онъ останется вѣренъ и для произведенія, содержащаго однимъ биномомъ больше, т.-е. для m биномовъ.

Итакъ, пусть будутъ $x+a$, $x+b$, $x+c$, . . . , $x+h$, $x+i$, тѣ $m-1$ биномовъ, для которыхъ, *по допущенію*, вышеуказанный законъ вѣренъ. Обозначимъ символами: S_1 — сумму вторыхъ членовъ этихъ биномовъ, S_2 — сумму двойныхъ сочетаній изъ нихъ, S_3 — сумму тройныхъ сочетаній, вообще, S_k — сумму сочетаній k-го порядка, и S_{m-1} — произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ. По допущенію, произведеніе этихъ $m-1$ биномовъ дастъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\,.\;.\;.\,(x+h)(x+i)=x^{m-1}+S_1x^{m-2}+S_2x^{m-3}+$$
$$+S_3x^{m-4}+\,.\;.\;.\,+S_{k-1}x^{m-k}+S_kx^{m-k-1}+\,.\;.\;.\,+S_{m-1}.$$

Введя m-го множителя $x+l$, найдемъ отсюда:

$$(x+a)(x+b)\,.\;.\;.\,(x+i)(x+l)=x^m+\left.\begin{array}{r}S_1\\+l\end{array}\right|x^{m-1}+\begin{array}{r}S_2\\+S_1l\end{array}x^{m-2}+$$
$$+\begin{array}{r}S_3\\S_2l\end{array}x^{m-3}\,.\;.\;.\,+\begin{array}{r}S_k\\+S_{k-1}l\end{array}x^{m-k}+\,.\;.\;.\,+S_{m-1}l.$$

1. Видимъ, что показатель буквы x въ первомъ числѣ равенъ числу m перемножаемыхъ биномовъ, что въ слѣдующихъ членахъ показатели буквы x

идутъ, послѣдовательно уменьшаясь на 1, до послѣдняго члена, гдѣ этотъ показатель есть *нуль*, т.-е. гдѣ x не входитъ.

2. Изъ закона показателей прямо слѣдуетъ, что число членовъ произведенія равно $m+1$, т.-е. на единицу больше числа биномовъ.

3. Коэффиціентъ перваго члена есть 1.

Коэф. втораго члена составленъ изъ суммы S_1 вторыхъ членовъ первыхъ $m-1$ биномовъ, сложенной со вторымъ членомъ, l, m-го бинома; слѣд. онъ равенъ суммѣ вторыхъ членовъ всѣхъ m биномовъ.

Коэф. третьяго члена составляется изъ суммы S_2 двойныхъ сочетаній вторыхъ членовъ $m-1$ первыхъ биномовъ, сложенной съ произведеніемъ S_1l суммы вторыхъ членовъ этихъ же $m-1$ биномовъ на второй членъ l послѣдняго m-го бинома; другими словами, этотъ коэф. составленъ изъ суммы такихъ двойныхъ сочетаній m буквъ, въ которыя не входитъ l, $+$ сумма двойныхъ сочетаній m буквъ, въ которыя входитъ l; а это даетъ полную сумму двойныхъ сочетаній изъ m буквъ.

Коэф. червертаго члена равенъ суммѣ S_3 тройныхъ сочетаній изъ вторыхъ членовъ первыхъ $m-1$ биномовъ, сложенной съ произведеніемъ S_2l суммы двойныхъ сочетаній тѣхъ же буквъ на новую букву l введеннаго бинома; другими словами, этотъ коэф. составленъ изъ суммы тройныхъ сочетаній вторыхъ буквъ m биномовъ, сочетаній, не содержащихъ l, $+$ сумма тройныхъ сочетаній изъ тѣхъ же буквъ, но содержащихъ l; это даетъ полную сумму тройныхъ сочетаній m буквъ.

Вообще, коэф. при x^{m-k}, или коэф. $(k+1)$-го члена, составляется изъ суммы S_k сочетаній k-го порядка вторыхъ членовъ первыхъ $m-1$ биномовъ, $+$ произведенію $S_{k-1}.\,l$ суммы сочетаній $(k-1)$-го порядка изъ тѣхъ же членовъ на второй членъ l новаго бинома; т.-е. этотъ коэф. слагается изъ суммы сочетаній k-го пор. вторыхъ буквъ m биномовъ, сочетаній, не содержащихъ l, $+$ сумма сочетаній k-го порядка изъ тѣхъ же буквъ, но содержащихъ l; это даетъ полную сумму k-хъ сочетаній m буквъ.

Наконецъ, такъ какъ S_{m-1} есть произведеніе вторыхъ членовъ $m-1$ первыхъ биномовъ, то $S_{m-1}.\,l$ есть произведеніе вторыхъ членовъ m биномовъ.

Итакъ, законъ, допущенный для $m-1$ биномовъ, оказывается вѣрнымъ и для произведенія, содержащаго однимъ биномомъ больше. Но мы непосредственно доказали его для двухъ, трехъ и четырехъ биномовъ, слѣд. онъ вѣренъ и для 5; будучи вѣрнымъ для 5, вѣренъ и для 6 биномовъ, и т. д.; слѣд. онъ вѣренъ для какого угодно числа биномовъ.

713. Формула бинома.—Итакъ, имѣемъ тождество:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+i)(x+l)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\ldots$$
$$\ldots+S_kx^{m-k}+\ldots+S_m\ .\ \ .\ \ .\ (1)$$

полагая, что число биномовъ есть m. При этомъ:

$$\left.\begin{array}{l}
S_1=a+b+c\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +l;\\
S_2=ab+ac+\ .\ .\ .\ .\ .\ +il;\\
S_3=abc+abd+\ .\ .\ .\ .\ +hil;\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
S_k=abc\ \ldots\ i+abc\ \ldots\ l+\ldots\\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
S_m=abcd\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ il.
\end{array}\right\}$$

Для вывода изъ этого тождества формулы бинома, т.-е. $(x+a)^m$, стоитъ только положить, что во всѣхъ m биномахъ вторые члены равны, т.-е. что $a=b=c=\ldots=i=l$. Первая часть тождества обратится въ $(x+a)^m$.

Затѣмъ, найдемъ, что:

$$S_1=a+a+a+\ldots+a;$$

а какъ всѣхъ слагаемыхъ здѣсь m, то $S_1=ma$.

$S_2 = a^2 + a^2 + a^2 + \dots + a^2$; причемъ слагаемыхъ здѣсь столько, сколько двойныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т.-е. $\frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}$; слѣдовательно, $S_2 = \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, a^2$.

$S_3 = a^3 + a^3 + \dots + a^3$; причемъ a^3 повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько есть тройныхъ сочетаній изъ m элементовъ, т.-е. $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$; такъ что $S_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^3$.

Вообще, $S_k = a^k + a^k + \dots + a^k$; причемъ слагаемымъ a^k берется столько разъ, сколько есть сочетаній k-го порядка изъ m элементовъ, т.-е. $\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k}$; и слѣд., $S_k = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k} \,.\, a^k$.

Наконецъ, $S_m = a \,.\, a \,.\, a \dots a$, гдѣ a повторяется множителемъ m разъ; слѣд., $S_m = a^m$.

Такимъ образомъ, тождество (1) беретъ видъ:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^3x^{m-3} + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k} a^kx^{m-k} + \dots + a^m.$$

Это и есть знаменитая *Ньютонова формула бинома;* пока она доказана нами для случая возвышенія бинома въ какую угодно степень *цѣлаго положительнаго* порядка. Вторая часть ея называется *разложеніемъ* первой.

714. Эйлерово доказательство формулы бинома.—Приводимъ доказательство формулы разложенія $(a+b)^m$, независимое отъ теоріи соединеній. Оно дано великимъ аналистомъ XVIII вѣка Эйлеромъ. Замѣтимъ, что если въ биномѣ $a+b$ вынести за скобки a, то найдемъ

$$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m(1+x)^m,$$

положивъ $\frac{b}{a} = x$. Вопросъ приводится такимъ образомъ къ разложенію $(1+x)^m$.

Въ своемъ доказательствѣ Эйлеръ беретъ исходнымъ пунктомъ слѣдующее тождество. Взявъ произведеніе n биномовъ

$$f(x) = (1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x) \dots (1+a^nx) \dots (1),$$

подставимъ ax вмѣсто x; найдемъ

$$f(ax) = (1+a^2x)(1+a^3x)(1+a^4x) \dots (1+a^nx) \,.\, (1+a^{n+1}x);$$

а помноживъ обѣ части на $1+ax$, имѣемъ

$$(1+ax)f(ax) = (1+ax)(1+a^2x) \dots (1+a^nx) \,.\, (1+a^{n+1}x),$$

или

$$(1+ax)\,.\,f(ax)=(1+a^{n+1}x)\,.\,f(x)\ (2)$$

Если перемножить n биномовъ (1), то, очевидно, получится многочленъ, низшій членъ котораго будетъ 1, а высшій будетъ содержать x^n. Расположивъ его члены по восходящимъ степенямъ x, получимъ

$$f(x)=1+A_1x+A_2x^2+\,.\,.\,.\,+A_nx^n,\,.\,.\,.\,(3),$$

и все дѣло сводится къ нахожденію коэффиціентовъ A_1, A_2, ... , A_n. Для этого въ тождествѣ (2) замѣнимъ $f(ax)$ и $f(x)$ ихъ разложеніями, выполнимъ умноженіе и расположимъ члены по восходящимъ степенямъ x; такимъ образомъ получится тождество

$$\begin{array}{l}1+A_1a\,\big|\,x+A_2a^2\,\big|\,x^2+\,.\,.\,.\,+A_pa^p\,\big|\,x^p+\,.\,.\,.\\ \quad +a\,\big|\quad +A_1a^2\,\big|\qquad\qquad +A_{p-1}a^p\\ \\ =1+A_1\,\big|\,x+A_2\,\big|\,x^2+\,.\,.\,.\,+A_p\,\big|\,x^p+\,.\,.\,.\\ \quad +a^{n+1}\,\big|\quad +A_1a^{n+1}\,\big|\qquad\qquad +A_{p-1}a^{n+1}\end{array}$$

Приравняемъ теперь коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x; для коэффиціентовъ при x^p найдемъ равенство

$$A_pa^p+A_{p-1}a^p=A_p+A_{p-1}a^{n+1},$$

изъ котораго имѣемъ

$$A_p=A_{p-1}\,.\,\frac{a^{n+1}-a^p}{a^p-1}.$$

Полагая здѣсь $p=1,\ 2,\ 3,\,.\,.\,.\,.\,p$, находимъ

$$A_1=\frac{a^n-1}{a-1}\,.\,a$$

$$A_2=A_1\,.\,\frac{a^{n-1}-1}{a^2-1}\,.\,a^2$$

$$A_3=A_2\,.\,\frac{a^{n-2}-1}{a^3-1}\,.\,a^3$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$A_{p-1}=A_{p-2}\,.\,\frac{a^{n-p+2}-1}{a^{p-1}-1}\,.\,a^{p-1}$$

$$A_p=A_{p-1}\,.\,\frac{a^{n-p+1}-1}{a^p-1}\,.\,a^p.$$

Перемножая эти равенства, сокращая обѣ части на $A_1\,.\,A_2\,.\,.\,.\,A_{p-1}$ и замѣчая, что $a^1\,.\,a^2\,.\,a^3\,.\,.\,.\,a^p=a^{1+2+3+\ldots+p}=a^{\frac{p(p+1)}{2}}$, найдемъ

$$A_p=\frac{a^n-1}{a-1}\,.\,\frac{a^{n-1}-1}{a^2-1}\,.\,\frac{a^{n-2}-1}{a^3-1}\,.\,.\,.\,\frac{a^{n-p+1}-1}{a^p-1}\,.\,a^{\frac{p(p+1)}{2}}$$

Положимъ теперь $a = 1$; A_p будетъ представлять въ этомъ случаѣ произведеніе p дробей, изъ коихъ каждая обращается въ $\frac{0}{0}$. Но, сокращая каждую на $a - 1$ и полагая затѣмъ $a = 1$, найдемъ ихъ истинныя значенія, а именно

$$\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right)_{a=1} = (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)_{a=1} = \frac{n}{1};$$

$$\left(\frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1}\right)_{a=1} = \left(\frac{a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1}{a + 1}\right)_{a=1} = \frac{n-1}{2};$$

. . . .

. . . .

$$\left(\frac{a^{n-p+1} - 1}{a^p - 1}\right)_{a=1} = \left(\frac{a^{n-p} + a^{n-p-1} + \dots + 1}{a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + 1}\right)_{a=1} = \frac{n-p+1}{p}.$$

Слѣдовательно

$$A_p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1.2.3\dots p}.$$

Полагая здѣсь $p = 1, 2, 3, \dots\dots n$, найдемъ всѣ коэффиціенты A_1, A_2, $A_3, \dots\dots A_n$ разложенія (3), гдѣ первая часть, $f(x)$, есть произведеніе $(1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)\dots(1 + a^nx)$, обращающееся при $a = 1$ въ $(1 + x)^n$. Такимъ образомъ, равенство (3) даетъ

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}x^p + \dots x^n.$$

Если подставить сюда обратно $\frac{b}{a}$ вмѣсто x, то получится выше найденное разложеніе $(a + b)^n$.

715. Свойства формулы бинома. — Формула бинома [беремъ разложеніе $(x+a)^m$] обладаетъ слѣдующими замѣчательными свойствами:

I. Члены ея расположены по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ буквы a, причемъ показатели буквы x идутъ, послѣдовательно уменьшаясь на 1, начиная отъ m и до нуля (въ послѣднемъ членѣ), а показатели буквы a идутъ, послѣдовательно увеличиваясь на 1, отъ 0 (въ первомъ членѣ) до m; сумма же показателей при x и a постоянна и равна въ каждомъ членѣ показателю m степени бинома.

II. *Число членовъ равно* $m + 1$, т.-е. единицею больше показателя бинома: это непосредственно видно изъ закона показателей.

III. Коэффиціенты бинома суть:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1.2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},\ \dots,\ \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2.3\dots k},\ \dots,\ m, 1,$$

т.-е. *коэффиціентъ перваго члена равенъ 1, а коэффиціенты членовъ, начиная со второго, суть числа сочетаній изъ m элементовъ порядка, равнаго числу предшествующихъ членовъ.*

IV. Обыкновенно $(k + 1)$-й членъ, формула котораго есть

$$T_{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{1.2.3\dots(k-1)k}a^k x^{m-k},$$

называется *общимъ членомъ* разложенія, потому что изъ него можно получить всѣ члены разложенія, начиная со 2-го, полагая k равнымъ послѣдовательно $1, 2, 3, 4, \ldots, m$. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$k = 1$, находимъ $T_2 = \frac{m}{1} a x^{m-1}$, а это есть второй членъ;

$k = 2$, » $T_3 = \frac{m(m-1)}{1 . 2} a^2 x^{m-2}$, т.-е. третій членъ;

$k = 3$, » $T_4 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} a^3 x^{m-3}$, т.-е. четвертый членъ;

. . . .

$k = m$, » $T_{m+1} = \frac{m(m-1)(m-2) \ldots 2 . 1}{1 . 2 \ldots (m-1) . m} a^m x^0 = a^m$; а это — послѣдній членъ.

Такимъ образомъ для полученія изъ общаго члена—какого угодно члена разложенія нужно только положить k=числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

V. *Коэффиціенты членовъ крайнихъ и равно-удаленныхъ отъ крайнихъ равны между собою.* Въ самомъ дѣлѣ, коэф-ты 1-го и послѣдняго члена равны 1. Затѣмъ, возьмемъ члены: $k+1$-й отъ начала и $k+1$-й отъ конца. По свойству III, коэффиціентъ перваго изъ этихъ членовъ равенъ числу сочетаній k-го порядка изъ m элементовъ, т.-е. C_m^k. Замѣтивъ, что отъ послѣдняго до $k+1$-го члена отъ конца включительно имѣется $k+1$ членъ, а всѣхъ членовъ $m+1$, заключаемъ что $(k+1)$-му члену отъ конца предшествуетъ $(m+1)-(k+1)$ или $m-k$ членовъ, а потому его коэф., по пунк. III, равенъ C_m^{m-k}. Но мы знаемъ, что $C_m^k = C_m^{m-k}$ (§ 705, I).

VI. Если показатель m есть число четное и $= 2p$, то число членовъ разложенія будетъ нечетное $2p+1$, а потому въ срединѣ разложенія будетъ коэффиціентъ не повторяющійся, съ обѣихъ сторонъ котораго коэффиціенты равны и расположены въ обратномъ порядкѣ. Очевидно, въ этомъ случаѣ придется вычислить $p+1$ коэффиціентъ.

Если же показатель m есть число нечетное, напр., $2p+1$, то число членовъ будетъ четное и $= 2p+2$; коэффиціенты второй половины будутъ тѣже, что и въ первой, но расположены въ обратномъ порядкѣ, а въ срединѣ разложенія находится рядомъ два равныхъ коэффиціента. Вычислить придется половину, $(p+1)$, всѣхъ коэффиціентовъ.

VII. Вычисленіе членовъ разложенія слѣдуетъ вести по слѣдующему правилу. Подставивъ въ формулу $k+1$-го члена

$$T_{k+1} = \frac{m(m-1) \ldots (m-k+2)(m-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots (k-1) . k} a^k x^{m-k} \ldots (1)$$

$k-1$ вмѣсто k, на основаніи п. IV, найдемъ k-ый членъ

$$T_k = \frac{m(m-1) \ldots (m-k+2)}{1 . 2 . 3 \ldots (k-1)} a^{k-1} x^{m-k+1} \ldots (2)$$

Раздѣливъ (1) на (2), получимъ

$$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{m-k+1}{k}\times\frac{a}{x},\ \text{откуда}\ T_{k+1}=T_k\times\frac{m-k+1}{k}\times\frac{a}{x}\ \ldots (3).$$

Итакъ: *чтобы изъ k-го члена вывести $(k+1)$-й членъ, надо коэффиціентъ k-го помножить на показателя $m-k+1$ буквы x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число k членовъ, предшествующихъ опредѣляемому; затѣмъ, показателя буквы a увеличить на 1, а показателя буквы x уменьшить на 1.*

Примѣры. 1) ***Разложить*** $(x+a)^7$.

Число членовъ $=7+1=8$; поэтому вычисляемъ 4 коэффиціента, а для другой половины разложенія ставимъ тѣ же коэф-ты въ обратномъ порядкѣ. Найдемъ, примѣняя правило VII, первые четыре члена: $x^7+7ax^6+\frac{7\,.\,6}{2}a^2x^5+\frac{7\,.\,6\,.\,5}{2\,.\,3}a^3x^4$, или $x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4$. Все разложеніе будетъ:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

2) ***Разложить*** $(x+a)^8$.

Всѣхъ членовъ 9; вычисляемъ 5 первыхъ: $x^8+8ax^7+\frac{8\,.\,7}{2}a^2x^6+\frac{8\,.\,7\,.\,6}{2\,.\,3}a^3x^5+\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{2\,.\,3\,.\,4}a^4x^4$, или $x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4$. Все разложеніе будетъ

$$(x+a)^8=x^8+8ax^7+28a^2x^6+56a^3x^5+70a^4x^4+56a^5x^3+28a^6x^2+8a^7x+a^8.$$

VIII.—*Коэффиціенты идутъ увеличиваясь до средины разложенія, а затѣмъ уменьшаются.*

Соотношеніе (3) пунк. VII показываетъ, что коэффиціентъ $k+1$-го члена получается изъ коэф-та k-го члена умноженіемъ на дробь $\frac{m-k+1}{k}$. Слѣд., когда этотъ множитель >1, коэффиціентъ $(k+1)$-й будетъ больше k-го; когда $\frac{m-k+1}{k}$ будетъ $=1$, оба коэф-та будутъ равны; наконецъ, при $\frac{m-k+1}{k}<1$ послѣдующій коэф-тъ будетъ $<$ предшествующаго. Опредѣленіе, при какихъ k множитель $\frac{m-k+1}{k}$ будетъ >1, приводится къ рѣшенію, относительно k, неравенства

$$\frac{m-k+1}{k}>1,\ \text{откуда, замѣчая, что}\ k>0,\ \text{имѣемъ:}\ k<\frac{m+1}{2}\ \ldots\ (1).$$

Различаемъ два случая: m — число четное, m — нечетное.

Первый случай.—Пусть m число четное и $=2p$. Всѣхъ членовъ въ разложеніи будетъ $2p+1$; одинъ изъ нихъ занимаетъ среднее мѣсто: тотъ, передъ которымъ находится p членовъ и за которымъ слѣдуетъ p членовъ, т.-е. $p+1$-й. Подставивъ въ нер. (1) $2p$ вмѣсто m, найдемъ

$$k<p+\frac{1}{2}.$$

k есть число *цѣлое*, и оно должно быть меньше $p + \frac{1}{2}$; это можетъ быть при $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p$: т.-е. коэффиценты возрастаютъ отъ начала до $p + 1$-го включительно, т.-е. до *средняго*, который и будетъ *наибольшій*. Изъ п. V заключаемъ, что дальнѣйшие коэф-ты будутъ идти уменьшаясь до конца разложенія. Итакъ, въ срединѣ разложенія находится *одинъ* членъ съ *наибольшимъ* коэффиціентомъ.

Второй случай. — Пусть m -число нечетное п $= 2p + 1$. Число членовъ разложенія будетъ $2p - 2$, такъ что оно распадается на двѣ половины по $p + 1$ коэффиценту въ каждой. Неравенство (1) даетъ

$$k < p + 1,$$

откуда слѣдуетъ, что для полученія возрастающихъ коэффиціентовъ надо давать k значенія $0, 1, 2, \dots, p$; т.-е. коэффиценты идутъ возрастая въ первой половинѣ строки. Если затѣмъ дадимъ k значение $p + 1$, для вычисленія перваго коэф-та второй половины разложенія, то множитель $\frac{m - k + 1}{k}$ обратится въ 1; слѣд. $(p + 2)$-й коэф. $= (p + 1)$-му (что слѣдуетъ и изъ пун. V).

Итакъ, при m нечетномъ, въ срединѣ разложенія находятся *два равные коэффицента рядомъ, больше остальныхъ.*

IX. *Сумма всѣхъ коэффиціентовъ разложенія* $(x + a)^m$ *всегда* $= 2^m$. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ формулѣ бинома $x = a = 1$, замѣтимъ, что первая часть обратится въ 2^m; а во второй части всѣ степени буквъ a и x обратятся въ 1, такъ что въ этой части останется сумма коэффицентовъ; именно:

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} + \dots + 1$$

Примѣчание. Замѣтивъ, что коэффиценты, начиная со второго, суть числа сочетаній изъ m элементовъ порядковъ 1-го, 2-го, . . . , m-го, и перенеся 1 въ первую часть, можемъ предыдущее равенство написать въ видѣ:

$$2^m - 1 = C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \dots + C_m^m.$$

Это значитъ, что полное число сочетаній изъ m элементовъ, порядковъ отъ 1-го до m-го, равно $2^m - 1$.

X. Разложеніе $(x - a)^m$ получается изъ $(x + a)^m$ подстановкою $(-a)$ вмѣсто a; такимъ образомъ

$$(x - a)^m = [x + (-a)]^m = x^m + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2}(-a)^2x^{m-2} +$$
$$+ \dots + (-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 . 2}a^2x^{m-2} - \dots \pm a^m \dots (\alpha).$$

Очевидно, всѣ члены съ четными степенями $(-a)$ дадутъ знакъ $+$, съ нечетными же знакъ $-$; поэтому знаки разложенія чередуются. Послѣднему члену при m четномъ предшествуетъ $(+)$, при m нечетномъ $(-)$. Общій членъ будетъ

$$T_{k+1} = \pm \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 . 2 . 3 \dots k} a^k x^{m-k},$$

гдѣ нужно брать знакъ $+$ при k четномъ, и $-$ при k нечетномъ. Но если замѣтимъ, что $-a = -1 . a$, откуда $(-a)^k = (-1)^k . a^k$ и что это произведеніе само собою принимаетъ знакъ $(+)$ при k четномъ и $(-)$ при нечетномъ k, то, очевидно, цѣлесообразнѣе дать общему члену видъ

$$T_{k+1} = +(-1)^k . \frac{m(m-1) \ldots (m-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots k} . a^k x^{m-k},$$

подъ которымъ онъ самъ собою принимаетъ надлежащій знакъ соотвѣтственно всякому частному значенію k.—Подобно этому и послѣднему члену, $\pm a^m$, цѣлесообразнѣе дать видъ: $+(-1)^m . a^m$.

Такъ, общій членъ разложенія $(1-x)^9$ будетъ

$$T_{k+1} = (-1)^k . \frac{9 . 8 \ldots (10-k)}{1 . 2 \ldots k} x^k.$$

XI. Если въ формулѣ (α) положить $x = a = 1$, то она дастъ

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1 . 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

или, собравъ положительные члены въ одной части, а отриц. въ другой:

$$1 + \frac{m(m-1)}{1 . 2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots = m + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

т.-е. *сумма коэффиціентовъ нечетныхъ мѣстъ равна суммѣ коэффиціентовъ четныхъ мѣстъ.*

Примѣчаніе. Написавъ послѣднее равенство въ видѣ

$$1 + C_m^2 + C_m^4 + C_m^6 + \ldots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots,$$

заключаемъ: если изъ m предметовъ составить сочетанія всѣхъ порядковъ отъ 1-го до m-го включительно, то число сочетаній, въ составъ которыхъ входитъ нечетное число предметовъ, единицею больше числа сочетаній четнаго порядка.

716. Задача I.—*Разложить* $(7a^2b - 3ab^2)^5$.

Положивъ $7a^2b = u$, $3ab^2 = v$, имѣемъ:

$$(u - v)^5 = u^5 - 5vu^4 + \frac{5 . 4}{2} v^2u^3 - \frac{5 . 4}{2} v^3u^2 + 5v^4u - v^5.$$

Подставивъ вмѣсто u и v ихъ величины и выполнивъ всѣ вычисленія, найдемъ:

$$(7a^2b - 3ab^2)^5 = 16807a^{10}b^5 - 36015a^9b^6 + 30870a^8b^7 - 13230a^7b^8 + 2835a^6b^9 - 243a^5b^{10}.$$

Задача II. *Найти седьмой членъ разложенія* $(a^2 + 3x^5)^{19}$?

Искомый членъ $= C_{19}^6 . (3x^5)^6 . (a^2)^{13} = 19779228\,x^{30}a^{26}$.

Задача III. *Найти 12-й членъ разложенія* $(2 - a^2)^{15}$.

Искомый членъ $= C_{15}^{11}(-a^2)^{11} . 2^4 = C_{15}^4 . 16 . (-a^{22}) = -21840a^{22}$.

Задача IV. *Найти коэффиціентъ при* x^{18} *въ разложеніи* $(ax^4 - bx)^9$.

Данное выр. $= \left[ax^4\left(1 - \frac{b}{ax^3}\right)\right]^9 = a^9x^{36}\left(1 - \frac{b}{ax^3}\right)^9$, и какъ a^9x^{36} будетъ множителемъ каждаго члена разложенія $\left(1 - \frac{b}{ax^3}\right)^9$, то нужно найти въ этомъ разложеніи коэффиціентъ члена, содержащаго $\frac{1}{x^{18}}$, или $\left(\frac{1}{x^3}\right)^6$, т.-е. 7-го чл. Такимъ образомъ, искомый коэффиціентъ $= a^9 \,.\, C_9^6 \,.\, \left(\frac{b}{a}\right)^6 = 84a^3b^6$.

Задача V. *Найти коэффиціентъ при* x^r *въ разложеніи* $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^m$.

Пусть x^r встрѣчается въ $k+1$-мъ членѣ. Этотъ членъ $=$

$$= C_m^k \,.\, x^{m-k} \,.\, \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = (-1)^k \,.\, C_m^k \,.\, x^{m-3k};$$

но въ немъ должно быть x^r, слѣд. $m - 3k = r$, откуда $k = \frac{m-r}{3}$. Итакъ, искомый коэффиціентъ $= (-1)^{\frac{m-r}{3}} \,.\, C_m^{\frac{m-r}{3}}$, что можно представить въ формѣ

$$(-1)^{\frac{m-r}{3}} \cdot \frac{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, m}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, \frac{m-r}{3} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\, \frac{2m+r}{3}}.$$

Задача VI. *Найти численно-наибольшій членъ въ разложеніи* $(x+a)^n$.

$k+1$-ый членъ получается изъ k-го умноженіемъ послѣдняго на

$$\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}, \text{ т.-е. на } \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \cdot \frac{a}{x}.$$

Множитель $\frac{n+1}{k} - 1$, очевидно, уменьшается по мѣрѣ возрастанія k; слѣд. и численное значеніе $\left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \cdot \frac{a}{x}$ уменьшается при возрастаніи k, а потому $k+1$-ый чл. не всегда будетъ больше k-го. Если $\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x}$ при нѣкоторомъ k будетъ меньше 1, то $k+1$-й чл. будетъ меньше k-го. Слѣд., чтобы k-й членъ былъ численно большій, необходимо должно быть

$$\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{n-(k-1)+1}{k-1} \cdot \frac{a}{x} > 1,$$

т.-е.

$$k > \frac{n+1}{1+\frac{x}{a}} \quad \text{и} \quad k < \frac{n+1}{1+\frac{x}{a}} + 1.$$

Если k будетъ $= \frac{n+1}{1+\frac{x}{a}}$, тогда будетъ $\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{a}{x} = 1$ и слѣд. будетъ *не одинъ* наиб. члена, а два, k-ый и $k+1$-ый, которые будутъ равны между собою.

Такъ какъ мы ищемъ наибольшій по *численному* значенію членъ, то наше разсужденіе одинаково примѣнимо и къ разложенію $(x-a)^n$, такъ что въ частныхъ примѣрахъ нѣтъ надобности обращать вниманія на знакъ второго члена бинома. Само собою разумѣется, что удобнѣе каждый примѣръ рѣшать независимо отъ общихъ формулъ.

Примѣръ 1-й. *Найти наибольшій членъ разложенія* $(1+4x)^8$, *если* $x=\frac{1}{3}$.

k-ый членъ будетъ наибольшимъ, если будетъ $\frac{T_{k+1}}{T_k}<1$ и $\frac{T_k}{T_{k-1}}>1$.

Такъ какъ

$$T_{k+1}=\frac{8-k+1}{k}\cdot 4x\,.\,T_k \quad \text{и} \quad T_k=\frac{8-(k-1)+1}{(k-1)}\cdot 4x\,.\,T_{k-1},$$

то д. б. удовлетворены неравенства

$$\frac{9-k}{k}\cdot\frac{4}{3}<1 \quad \text{и} \quad \frac{10-k}{k-1}\cdot\frac{4}{3}>1,$$

изъ которыхъ найдемъ: $\frac{43}{7}>k>\frac{36}{7}$. Слѣдовательно, наибольшій членъ будетъ шестой. Величина его $=$

$$C_8^5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^5=C_8^3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{57344}{243}.$$

Примѣръ 2-й. *Найти наибольшій членъ разложенія* $(3-2x)^9$, *если* $x=1$.

$$T_{k+1}=\frac{9-k+1}{k}\cdot\frac{2x}{3}\times T_k, \text{ *численно*,}$$

$$T_k=\frac{9-(k-1)+1}{k-1}\cdot\frac{2x}{3}\times T_{k-1}, \text{ *численно*.}$$

Должно быть

$$\frac{10-k}{k}\cdot\frac{2}{3}<1 \quad \text{и} \quad \frac{11-k}{k-1}\cdot\frac{2}{3}>1,$$

откуда $5>k>4$. Но при $k=4$, $T_{k+1}=T_k$; сл. въ данномъ случаѣ два члена, 4-й и 5-й, численно равные, больше остальныхъ.

Ихъ общая величина $=$

$$C_9^3\,.\,(2)^3\,.\,3^6=84\times 8\,.\,729=489888.$$

717. Приложеніе. *Теоремы Эйлера и Фермата.*

I. Теорема Эйлера: *если* p *есть число первоначальное, а* m *— какое-угодно цѣлое число, то разность* m^p-m *дѣлится на* p.

Если p — число первоначальное, то коэффиценты разложенія $(x+a)^p$ суть цѣлыя числа, содержащія (кромѣ 1-го и послѣдняго членовъ) множителя. p Въ самомъ дѣлѣ, представляя числа сочетаній, коэффиціенты необходимо суть числа цѣлыя; сверхъ того, число p, будучи первымъ, не входитъ въ знаменатели 1.2, $1.2.3, \ldots, 1.2\ldots(p-1)$ коэффиціентовъ.

Такимъ образомъ, имѣемъ право написать

$$m^p=[1+(m-1)]^p=1+\text{ крат. } p+(m-1)^p,$$

откуда, вычитая по m, имѣемъ:

$$m^p-m=(m-1)^p-(m-1)+\text{кр. } p;$$

и слѣдовательно

$$\begin{aligned} m^p - m &= (m-1)^p - (m-1) + \text{кр. } p \\ &= (m-2)^p - (m-2) + \text{кр. } p \\ &= \dots = 1^p - 1 + \text{кр. } p = \text{кр. } p, \end{aligned}$$

и теорема доказана.

II. Теорема Ферма есть простое слѣдствіе теоремы Эйлера и выражается такъ: *если первоначальное число p не дѣлитъ числа m, то оно дѣлитъ $m^{p-1} - 1$.*

Въ самомъ дѣлѣ, найденное равенство $m^p - m =$ кр. p можно переписать такъ:

$$m(m^{p-1} - 1) = \text{кр.}\, p,$$

откуда прямо видно, что если p не дѣлитъ числа m, то, будучи первымъ, оно должно дѣлить другого множителя $m^{p-1} - 1$.

718. Степень полинома. Практическій пріемъ для разложенія степени полинома заключается въ томъ, что въ выраженіи $(a + b + c \dots)^m$ разсматриваютъ $b + c + \dots$ какъ одну букву, и по формулѣ бинома разлагаютъ $[a + (b + c + \dots)]^m$. Въ разложеніе войдутъ различныя степени $(b + c + \dots)$; надъ этимъ выраженіемъ оперируютъ такимъ же точно образомъ, разсматривая $(c + d + \dots)$ какъ одну букву, продолжая такимъ образомъ, получаютъ требуемое разложеніе.

Отыщемъ общій членъ разложенія $(a + b + c + d + \dots)^m$. Положивъ $b + c + d + \dots = x$, имѣемъ $(a + b + c + d + \dots)^m = (a + x)^m = (x + a)^m$. Обозначивъ этотъ общій членъ буквою X, имѣемъ:

$$X = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2.3\dots r} a^r x^{m-r},$$

или

$$X = \frac{1.2.3\dots m}{1.2\dots r.1.2\dots(m-r)} a^r x^{m-r} \dots (1).$$

Здѣсь $x^{m-r} = (b + c + d \dots)^{m-r} = (b + y)^{m-r} = (y + b)^{m-r}$, полагая $c + d + \dots = y$.

Разложеніе $(y + b)^{m-r}$ содержитъ $m - r + 1$ членовъ, назвавъ общій членъ его, содержащій a^r, буквою Y, можемъ этому члену, согласно (1), дать видъ

$$Y = \frac{1.2.3\dots(m-r)}{1.2\dots r'.1.2\dots(m-r-r')} . b^{r'} y^{m-r-r'}.$$

Подставивъ въ (1) на мѣсто x^{m-r} общій членъ Y этого выраженія, найдемъ

$$X = \frac{1.2\dots m.1.2\dots(m-r)}{1.2\dots r.1.2\dots(m-r).1.2\dots r'.1.2\dots(m-r-r')} . a^r b^{r'} y^{m-r-r'},$$

или, сокративъ коэффиціентъ на $1.2\dots(m-r)$:

$$X = \frac{1.2.3\dots m}{1.2\dots r.1.2\dots r'.1.2\dots(m-r-r')} . a^r b^{r'} y^{m-r-r'} \dots (2).$$

Выраженіе это представляетъ всѣ тѣ члены искомаго разложенія, которые содержатъ a^r и $b^{r'}$. Въ немъ $y^{m-r-r'} = (c + d + e + \dots)^{m-r-r'} = (z + c)^{m-r-r'}$, полагая $z = d + e + \dots$

Разложеніе $(z + c)^{m-r-r'}$ имѣетъ $m - r - r' + 1$ членовъ; назвавъ общій его членъ, тотъ, передъ которымъ находится r'' членовъ, буквою Z, получимъ

$$Z = \frac{1.2.3\dots(m-r-r')}{1.2\dots r''.1.2.3\dots(m-r-r'-r'')} . a^r b^{r'} z^{m-r-r'-r''}.$$

Замѣнивъ во (2) выраженіе $y^{m-r-r'}$ его общимъ членомъ Z, имѣемъ

$$X = \frac{1.2...m.1.2...(m-r-r')}{1.2...r.1.2...r'.1.2...(m-r-r').1.2...r''.1.2...(m-r-r'-r'')} \cdot a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}$$

или, по сокращеніи:

$$X = \frac{1.2.3\ .\ .\ .\ m}{1.2\ .\ .\ .\ r.1.2\ .\ .\ .\ r'.1.2\ .\ .\ .\ r''.1.2\ .\ .\ .\ (m-r-r'-r'')} a^r b^{r'} c^{r''} z^{m-r-r'-r''}$$

и т. д.

Если бы полиномъ имѣлъ только 4 члена, то былъ бы $z = d$, и если обозначить $m-r-r'-r''$ буквою r''', то общій членъ разложенія $(a+b+c+d)^m$ былъ бы

$$X = \frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r\ .\ 1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r'\ .\ 1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r''\ .\ 1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r'''} a^r b^{r'} c^{r''} d^{r'''},$$

гдѣ $r''' = m - r - r' - r''$ или $r + r' + r'' + r''' = m$.

Условившись произведеніе $1\ .\ 2\ .\ .\ .\ k$ принимать $= 1$, когда $k = 0$, можемъ изъ X получить всѣ члены разложенія $(a + b + c + d)^m$, подставляя вмѣсто r, r', r'', r''' послѣдовательно всѣ положительныя цѣлыя числа, удовлетворяющія условію $r + r' + r'' + r''' = m$.

Для полученія перваго члена, полагаемъ $r = m$, и слѣд. $r' = r'' = r''' = 0$, вслѣдствіе чего всѣ произведенія $1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r$, $1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r'$ и $1\ .\ 2\ .\ .\ .\ r'''$ обратятся въ 1; найдемъ

$$X = \frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ m\ .\ 1\ .\ 1\ .\ 1} a^m b^0 c^0 d^0 = a^m$$

Желая найти члены, содержащіе a^{m-1}, нужно положить $r = m - 1$ и слѣд. $r' + r'' + r''' = 1$. При этомъ получится столько членовъ, сколькими способами можно удовлетворить ур—нію $r' + r'' + r''' = 1$ цѣлыми положительными числами со включеніемъ нуля. Очевидно, этому ур—нію удовлетворимъ, полагая поочередно каждое слагаемое $= 1$, и при этомъ каждое изъ остальныхъ двухъ равнымъ 0. Такимъ образомъ

1. При $r = m - 1$ беремъ $r' = 1$ и $r'' = r''' = 0$, что дастъ

$$X = \frac{1.2\ .\ .\ .\ m}{1.2\ .\ .\ .\ (m-1).1.1.1} a^{m-1} b^1 c^0 d^0 = m a^{m-1} b;$$

2. При $r = m - 1$ беремъ $r'' = 1$ и $r' = r''' = 0$ откуда,

$$X = \frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (m-1)\ .\ 1\ .\ 1\ .\ 1} a^{m-1} b^0 c^1 d^0 = m a^{m-1} c;$$

3. Наконецъ, при $r = m - 1$, взявъ $r''' = 1$ и $r' = r'' = 0$, имѣемъ

$$X = \frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (m-1)\ .\ 1\ .\ 1\ .\ 1} a^{m-1} b^0 c^0 d^1 = m a^{m-1} d.$$

Желая найти члены, содержащіе a^{m-2}, должны въ общемъ членѣ положить $r = m - 2$, и слѣд. $r' + r'' + r''' = 2$. Послѣднему ур—нію можно удовлетворить 6 способами:

1. $r' = 2$ и $r'' = r''' = 0$;
2. $r'' = 2$ и $r' = r''' = 0$.
3. $r'' = 2$ и $r' = r'' = 0$.
4. $r' = 1$, $r'' = 1$ и $r''' = 0$.
5. $r' = r''' = 1$ и $r'' = 0$.
6. $r'' = r''' = 1$ и $r' = 0$.

Такимъ образомъ найдемъ члены:

1. $X = \frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (m-2)\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 1\ .\ 1} a^{m-2} b^2 c^0 d^0 = \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2} a^{m-2} b^2.$

2. $X = \frac{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (m-2)\ .\ 1\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 1} a^{m-2} b^0 c^2 d^0 = \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2} a^{m-2} c^2$

3. $X = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, m}{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, (m-2) \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 2} a^{m-2}b^0c^0d^2 = \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} a^{m-2}d^2.$

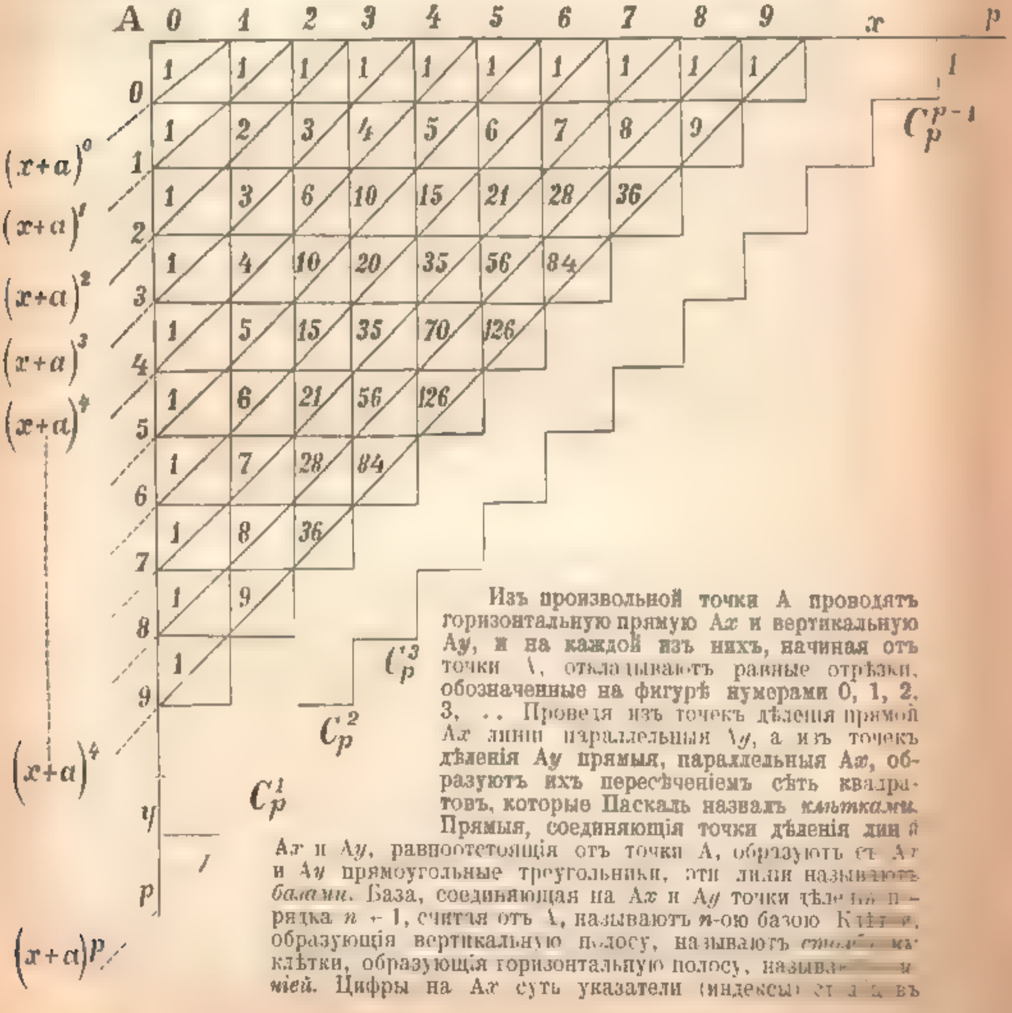
4. $X = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, m}{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, (m-2) \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1} a^{m-2}b^1c^1d^0 = m(m-1)a^{m-2}bc.$

5. $X = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, m}{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, (m-2) \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1} a^{m-1}b^1c^0d^1 = m(m-1)a^{m-2}bd.$

6. $X = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, m}{1 \,.\, 2 \,.\, .\, .\, (m-2) \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1} a^{m-2}b^0c^1d^1 = m(m-1)a^{m-2}cd.$

Ариѳметическій треугольникъ Паскаля.

719. Таблицѣ, извѣстной подъ именемъ *ариѳметическаго треугольника Паскаля*, даютъ различное расположеніе: мы укажемъ то, которое принято было самимъ Паскалемъ.



A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	1	3	6	10	15	21	28	36		
3	1	4	10	20	35	56	84			
4	1	5	15	35	70	126				
5	1	6	21	56	126					
6	1	7	28	84						
7	1	8	36							
8	1	9								
9	1									

Изъ произвольной точки A проводятъ горизонтальную прямую Ax и вертикальную Ay, и на каждой изъ нихъ, начиная отъ точки A, откладываютъ равные отрѣзки, обозначенные на фигурѣ нумерами 0, 1, 2, 3, .. Проведя изъ точекъ дѣленія прямой Ax линіи параллельныя Ay, а изъ точекъ дѣленія Ay прямыя, параллельныя Ax, образуютъ ихъ пересѣченіемъ сѣть квадратовъ, которые Паскаль назвалъ *клѣтками*. Прямыя, соединяющія точки дѣленія линій Ax и Ay, равноотстоящія отъ точки A, образуютъ съ Ax и Ay прямоугольные треугольники, эти линіи называютъ *базами*. База, соединяющая на Ax и Ay точки дѣленія порядка $n + 1$, считая отъ A, называютъ n-ою базою. Клѣтки, образующія вертикальную полосу, называютъ *столбцомъ*, клѣтки, образующія горизонтальную полосу, называютъ *линіей*. Цифры на Ax суть указатели (индексы) [illegible] въ (нулевой, первый, второй . . .) цифры на Ay суть указатели линій. Самую таблицу составляютъ, руководясь слѣдующимъ правиломъ.

Правило построенія таблицы. *Число въ какой угодно клѣткѣ* C *получаютъ сложеніемъ чиселъ, стоящихъ въ клѣткахъ* C' *и* C'', *прилежащихъ непосредственно къ* C, *одна — сверху, другая — слѣва отъ* C; т.-е. $C = C' + C''$.

Таблица чиселъ, такимъ образомъ составленныхъ, и образуетъ ариѳметическій треугольникъ Паскаля. Отсюда прямо слѣдуетъ, что числа, написанныя въ двухъ клѣткахъ, лежащихъ на одной и той же базѣ, въ равныхъ удаленіяхъ отъ ея концовъ, равны между собою.

Фигурныя числа. — Числа, находящіяся въ клѣткахъ линіи съ индексомъ p, называются *фигурными числами порядка* p. Такъ, фигурныя числа нулевого порядка суть 1, 1, 1, . . . ; фигурныя числа 1-го порядка суть 1, 2, 3, 4, . . . ; 2-го порядка: 1, 3, 6, 10, . . . ; и т. д.

m-ое фигурное число порядка p будемъ обозначать символомъ F^p_m; это число написано на линіи подъ нумеромъ p, въ столбцѣ подъ нумеромъ $m-1$, на базѣ подъ нумеромъ $m+p-1$.

По закону составленія треугольника Паскаля имѣемъ соотношеніе

$$F^p_m = F^{p-1}_m + F^p_{m-1} \; . \; . \; . \; (1).$$

Примѣчаніе. Легко видѣть, что $F^0_m = 1$, каково бы ни было m; и $F^p_1 = 1$, каково бы ни было p.

Свойства фигурныхъ чиселъ.

720. Теорема. *m-ое фигурное число порядка p равно суммѣ m первыхъ фигурныхъ чиселъ порядка $p-1$.*

Складывая соотношенія, указываемыя равенствомъ (1):

$$F^p_m = F^{p-1}_m + F^p_{m-1}, \quad F^p_{m-1} = F^{p-1}_{m-1} + F^p_{m-2}, \; . \; . \; . \; , \; F^p_2 = F^{p-1}_2 + F^p_1$$

и замѣчая, что $F^p_1 = 1 = F^{p-1}_1$, имѣемъ

$$F^p_m = F^{p-1}_m + F^{p-1}_{m-1} + \; . \; . \; . \; + F^{p-1}_2 + F^{p-1}_1 \; . \; . \; . \; (2).$$

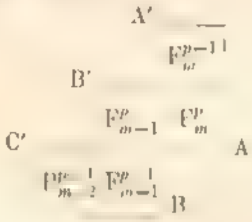
721. Выраженіе фигурнаго числа F^p_m *чрезъ* m *и* p. — Чтобы выразить фигурное число F^p_m чрезъ m и p, докажемъ слѣдующую *лемму Паскаля.*

Два фигурныхъ числа F^p_m и F^{p+1}_{m-1}, стоящія въ двухъ смежныхъ клѣткахъ одной и той же базы порядка $m + p - 1$, связаны соотношеніемъ

$$\frac{F^p_m}{F^{p+1}_{m-1}} = \frac{p+1}{m-1}.$$

Это соотношеніе вѣрно для клѣтокъ на базѣ съ индексомъ 1, ибо числа въ двухъ клѣткахъ на этой базѣ суть $1 = F^1_1$ и $1 = F^0_2$, такъ что въ самомъ дѣлѣ $\frac{F_2{}^0}{F_1{}^1} = \frac{1}{1}$.

Слѣдовательно, теорема будетъ доказана, разъ мы докажемъ, что если свойство это имѣетъ мѣсто для базы съ индексомъ $m+p-2$, то оно имѣетъ мѣсто и для базы съ индексомъ $m+p-1$. Возьмемъ на базѣ индекса $m+p-2$ три смежныя клѣтки A′, B′, C′, расположенныя на линіяхъ съ индексами $p-1$, p, $p+1$ и въ столбцахъ съ индексами $m-1$, $m-2$, $m-3$. Фигурныя числа, находящіяся въ этихъ клѣткахъ, суть F_m^{p-1}, F_{m-1}^p, F_{m-2}^{p+1}.



По допущенію, имѣемъ

$$\frac{F_m^{p-1}}{F_{m-1}^p}=\frac{p}{m-1},\quad \frac{F_{m-1}^p}{F_{m-2}^{p+1}}=\frac{p+1}{m-2},$$

откуда

$$\frac{F_m^{p-1}+F_{m-1}^p}{F_{m-1}^p}=\frac{m+p-1}{m-1},\quad \frac{F_{m-1}^p}{F_{m-1}^p+F_{m-2}^{p+1}}=\frac{p+1}{m+p-1},$$

или

$$\frac{F_m^p}{F_{m-1}^p}=\frac{m+p-1}{m-1},\quad \frac{F_{m-1}^p}{F_{m-1}^{p+1}}=\frac{p+1}{m+p-1}.$$

Перемножая, найдемъ:

$$\frac{F_m^p}{F_{m-1}^{p+1}}=\frac{p+1}{m-1}\ .\ .\ .\ (3).$$

Но числа F_m^p и F_{m-1}^{p+1} написаны въ смежныхъ клѣткахъ A и B базы индекса $m+p-1$; первая прилежитъ къ клѣткамъ A′, B′, а вторая къ B′, C′. Такимъ образомъ, лемма доказана.

Написавъ соотношеніе (3) въ формѣ

$$F_{m-\alpha}^{p+\alpha}=\frac{p+1+\alpha}{m-1-\alpha}\cdot F_{m-1-\alpha}^{p+1+\alpha}$$

и подставляя вмѣсто α числа 0, 1, 2, . . . , $m-2$, найдемъ

$$F_m^p=\frac{p+1}{m-1}\cdot F_{m-1}^{p+1}$$

$$F_{m-1}^{p+1}=\frac{p+2}{m-2}\cdot F_{m-2}^{p+2}$$

. . . .

. . . .

$$F_2^{m+p-2}=\frac{m+p-1}{1}\cdot F_1^{m+p-1}.$$

Перемноживъ почленно эти равенства и замѣтивъ, что $F_1^{m+p-1}=1$, имѣемъ формулу

$$F_m^p=\frac{(p+1)(p+2)\ .\ .\ .\ (m+p-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ (m-1)}\ .\ .\ .\ (4),$$

что можно написать еще такъ:

$$F^p_m = \frac{m(m-1)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots p} \ldots (5),$$

полагая $p \geqslant 0$.

Изъ этой формулы имѣемъ

$$F^0_m = 1;\quad F^1_m = \frac{m}{1};\quad F^2_m = \frac{m(m-1)}{1.2};\quad F^3_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3};\ldots$$

722. Приложенія ариѳметическаго треугольника. —Укажемъ важнѣйшія приложенія ариѳметическаго треугольника.

I. Обыкновенныя сочетанія. *Числа, стоящія на базѣ съ индексомъ m и въ столбцахъ съ индексами 1, 2, 3, . . . , представляютъ числа обыкновенныхъ сочетаній изъ m буквъ, взятыхъ, соотвѣтственно, по одной, по двѣ, по три,* и т. д.

Теорема вѣрна для базы съ индексомъ 1; слѣд. она будетъ доказана, разъ мы докажемъ, что если она вѣрна для индекса $m-1$, то будетъ вѣрна и для индекса m.

Пусть будутъ двѣ смежныя клѣтки a и b, взятыя на базѣ съ индексомъ $m-1$, и находящіяся въ столбцахъ съ указателями p и $p-1$. По допущенію, числа, написанныя въ клѣткахъ a и b, суть C^p_{m-1} и C^{p-1}_{m-1} (гдѣ C означаетъ число сочетаній). Съ другой стороны, по закону построенія треугольника Паскаля, число x, стоящее въ клѣткѣ c, прилежащей и къ a, и къ b, и расположенной на базѣ съ указателемъ m, удовлетворяетъ равенству

$$x = C^{p-1}_{m-1} + C^p_{m-1}.$$

Но, по § 705, II, сумма чиселъ, написанныхъ во второй части соотношенія, равна C^p_m; слѣд. $x = C^p_m$, и теорема доказана.

Формула для C^p_m.—Клѣтка c, въ которой написано число C^p_m, находится на базѣ индекса m и въ столбцѣ индекса p, слѣд. на линіи индекса $m-p$. Заключаемъ, что

$$C^p_m = F^{m-p}_{p+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

II. Сочетанія съ повтореніями.—Лемма. *Число полныхъ сочетаній изъ m буквъ по p равно числу полныхъ сочетаній изъ $m-1$ буквъ по p, + число полныхъ сочетаній изъ m буквъ по $p-1$.*

Въ самомъ дѣлѣ, полныя сочетанія изъ m буквъ $a, b, c, \ldots, l$ по p можно разбить на двѣ группы: на группу сочетаній, содержащихъ опредѣленную букву, a напр., и на группу, этой буквы не содержащихъ.

Число сочетаній первой группы равно Γ^{p-1}_m, потому что для составленія ихъ нужно сначала составить полныя сочетанія изъ m буквъ по $p-1$, а потомъ къ каждому приписать букву a. Число же сочетаній второй группы, очевидно, есть число полныхъ сочетаній изъ $m-1$ буквъ $b, c, \ldots l$ взятыхъ по p, или Γ^p_{m-1}. Итакъ

$$\Gamma^p_m = \Gamma^{p-1}_m + \Gamma^p_{m-1}.$$

Но совершенно такое же соотношеніе связываетъ фигур. числа $F^p_m, F^{p-1}_m, F^p_{m-1}$; сверхъ того, легко видѣть, что $F^1_m = \Gamma^1_m$ и $F^2_m = \Gamma^2_m$; слѣдовательно

$$F^p_m = \Gamma^p_m.$$

Отсюда *теорема: m-ое фигурное число порядка p равно числу полныхъ сочетаній изъ m буквъ по p.*

Припоминая формулу для F_m^p, § 721, 5, имѣемъ

$$F_m^p = \frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots p}.$$

III. Суммированіе одинаковыхъ степеней первыхъ *n* натуральныхъ чиселъ.—Такъ какъ $F_n^1 = n$, то

$$S_1 = F_1^1 + F_2^1 + F_3^1 + \cdots + F_n^1 = F_n^2 = \frac{n(n+1)}{1.2}.$$

$$F_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2};$$

слѣдовательно

$$\frac{S_2 + S_1}{2} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

откуда

$$S_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Выраженіе F_n^3 даетъ величину S_3; F_n^4—величину S_4, и т. д.

IV. Вычисленіе кучъ ядеръ.—Числа ядеръ въ слояхъ треугольной кучи равны соотвѣтственно F_1^2, F_2^2, F_3^2, . . . , F_{n-1}^2, F_n^2; слѣд. если куча состоитъ изъ *n* слоевъ, то число ядеръ равно F_n^3, т.-е. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Далѣе (см. § 739) показано будетъ, что число ядеръ квадратной и прямоугольной кучъ зависитъ отъ S_2, и какъ S_2 можно опредѣлить посредствомъ треугольника Паскаля, то и вопросъ о суммованіи сказанныхъ кучъ рѣшается этимъ треугольникомъ.

Примѣчаніе. Фигурныя числа колонны подъ № 1, т.-е. фигурныя числа 1-го порядка, наз. также *натуральными*.

Фигурныя числа колонны подъ № 2, т.-е. фигурныя числа 2-го порядка, называются *треугольными*, такъ какъ ихъ числа единицъ можно расположить въ формѣ треугольниковъ (см. выше).

Фигурныя числа, стоящія въ столбцѣ подъ № 3, или фигурныя числа 3-го порядка называются *пирамидальными*. Числа 4-го порядка наз. *треугольно-треугольными*.

V. Вычисленіе коэффиціентовъ бинома Ньютона.—*Если* 1, A_1, A_2, . . . *суть коэффиціенты членовъ разложенія* $(x+a)^m$, *то числа*

$$1,\ \ 1 + A_1,\ \ A_1 + A_2,\ \ldots$$

суть коэффиціенты разложенія $(x+a)^{m+1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, если равенство

$$(x+a)^m = 1.x^m + A_1.ax^{m-1} + A_2a^2x^{m-2} + \ldots + A_ma^m$$

помножимъ на $x+a$, то получимъ

$$(x+a)^{m+1}=1\,.\,x^{m+1}+(1+A_1)ax^m+(A_1+A_2)a^2x^{m-1}+\,.\,.\,.\,+A_ma^{m+1}.$$

Так. обр. коэф-ты второго разложенія выводятся изъ коэффиціентовъ перваго по закону составленія ариѳметич. треугольника. Но числа на базѣ индекса 1 суть коэффиценты $(x+a)^1$; слѣд. числа базы индекса 2 суть коэф-ты $(x+a)^2$, и вообще, числа базы индекса m суть коэф-ты $(x+a)^m$, расположеннаго по нисходящимъ степенямъ x.

Число этой базы, стоящее въ клѣткѣ колонны индекса p, есть C^p_m; слѣдоват., общій членъ разложенія $(x+a)^m$ есть $C^p_m a^p x^{m-p}$.

723. Примѣчаніе. Теоріей соединеній занимались уже индійскіе математики; въ алгебрѣ *Баскары* (1114) даны правильныя формулы для опредѣленія числа различныхъ соединеній. Формулы числа размѣщеній и сочетаній позднѣе были вторично найдены *Галилеемъ* (1564—1642). Ариѳметическій треугольникъ былъ извѣстенъ уже китайскимъ математикамъ XI столѣтія, а затѣмъ вновь найденъ былъ *Паскалемъ* въ XVII столѣтіи (1623—1662). Формула бинома дана *Ньютономъ* въ 1676 году. Она вырѣзана на гробницѣ Ньютона въ Вестминстерскомъ аббатствѣ.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

ТЕОРІЯ РЯДОВЪ И ЛОГАРИѲМОВЪ.

ГЛАВА XLV.

Прогрессія ариѳметическая.—Общій членъ.—Сумма членовъ.—Вставка среднихъ ариѳметическихъ.—Безконечная прогрессія.—Опредѣленіе суммы одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи.—Приложенія

724. Опредѣленіе. *Ариѳметической прогрессіей* наз. рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предыдущаго прибавленіемъ постояннаго, положительнаго или отрицательнаго, количества, называемаго ***разностью*** прогрессіи. Очевидно, что когда разность положительна, члены будутъ возрастать, и прогрессія наз. *возрастающею;* когда разность отрицательна, члены идутъ уменьшаясь, и прогрессія наз. *убывающею.* Слово прогрессія обозначается знакомъ $\div$; члены прогрессіи отдѣляются одинъ отъ другого точкою. Такъ:

$\div 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\,.\,.$ есть прогрессія возрастающая; разность ея $= 3$.

$\div 5 \,.\, 2 \,.\, -1 \,.\, -4 \,.\, -7 \,.\,.\,.$ есть прогр. убывающая; разность ея $= -3$.

Для полученія разности надо изъ какого-нибудь члена вычесть предшествующій.

Когда число членовъ прогрессіи ограниченное, она наз. ***конечною;*** при неограниченномъ числѣ членовъ—*безконечною.*

725. Каждые три смежные члена ариѳм. прогрессіи составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію. Пусть дана прогрессія въ общемъ видѣ

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\,.\,.\,,$$ а разность ея r.

По опредѣленію прогрессіи: $c - b = r$ и $d - c = r$, откуда

$$d - c = c - b:$$

смежные члены b, c, d, составляютъ непрерывную ариѳметическую пропорцію.

726. Теорема. *Общій членъ.*—n-й членъ прогрессіи называется общимъ членомъ. Пусть дана прогрессія

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\,.\,.\, r \,.\, s \,.\, t \,.\, u \,.\,.\,.\, (1),$$

въ которой u есть n-й членъ, а разность $= \delta$. По опредѣленію прогрессіи имѣемъ:

$$b = a + \delta,\ c = b + \delta,\ d = c + \delta,\ .\ .\ .\ .\ ,\ s = r + \delta,\ t = s + \delta,\ u = t + \delta.$$

Складывая эти равенства, находимъ:

$$b + c + d + \cdot\cdot\cdot + s + t + u = a + b + c + \cdot\cdot\cdot + r + s + t + (n-1)\delta;$$

а отнявъ отъ обѣихъ частей по $b + c + \cdot\cdot\cdot + s + t$, получаемъ:

$$u = a + (n-1)\delta.$$

Итакъ: *общій членъ прогрессіи равенъ первому, сложенному съ разностью, помноженною на число предшествующихъ членовъ.*

Примѣры: 1. *Найти двадцатый членъ прогрессіи:*

$$\div 7\ .\ 3\ .\ -1\ .\ .\ .\ .$$

Здѣсь $a = 7$, $\delta = -4$, $n = 20$. Слѣд.

$$u = 7 + (20-1)\ .\ (-4) = 7 + 19\ .\ (-4) = -69.$$

2. *Найти величину n-го нечетнаго числа.*

Нечетныя числа образуютъ ариѳм. прогрессію, въ которой $a = 1$, $\delta = 2$; слѣд. n-е нечетное число $= 1 + (n-1)\ .\ 2 = 2n - 1$.

3. *Пространства, проходимыя свободно-падающимъ тѣломъ въ первую, вторую, . . . секунду, образуютъ ариѳметич. прогр., первый членъ которой $= \frac{1}{2}g$, а разность $= g$. Найти пространство, пробѣгаемое въ n-ю секунду?*

Это пространство $= \frac{1}{2}\ g + (n-1)g = (2n-1)\ .\ \frac{g}{2}$.

727. Теорема. *Во всякой конечной ариѳметической прогрессіи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ двухъ другихъ, равноудаленныхъ отъ крайнихъ.*

Пусть имѣемъ прогрессію объ n членахъ:

$$\div a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ .\ .\ x\ .\ .\ .\ y\ .\ .\ .\ k\ .\ r\ .\ t\ .\ u,$$

разность которой $= \delta$; пусть, кромѣ того, членъ x имѣетъ передъ собою p членовъ, и пусть p членовъ слѣдуютъ за y. По формулѣ общаго члена имѣемъ:

$$x = a + p\ .\ \delta\ .\ .\ .\ (1).$$

Написавъ прогрессію въ обратномъ порядкѣ:

$$\div u\ .\ r\ .\ k\ .\ .\ .\ y\ .\ .\ .\ x\ .\ .\ .\ d\ .\ c\ .\ b\ .\ a,$$

замѣчаемъ, что ея разность будетъ $(-\delta)$; въ ней передъ членомъ y находится p членовъ, и потому

$$y = u + p\ .\ (-\delta)\ .\ .\ .\ (2).$$

Складывая равенства (1) и (2), получаемъ:

$$x+y=a+u.$$

Примѣчаніе. Можно бы было членъ y выразить и изъ начальной прогрессіи, принявъ въ ней y за первый членъ; въ такомъ случаѣ члену u предшествовало бы p членовъ, и потому $u=y+p\delta$, откуда: $y=u-p\delta$, выраженіе, одинаковое съ (2).

728. Теорема. *Сумма членовъ конечной ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ, помноженной на число членовъ.*

Взявъ прогрессію $\div a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,.\,.\,h\,.\,k\,.\,i\,.\,u$ объ n членахъ и назвавъ ея сумму буквою S, имѣемъ

$$S=a+b+c+d+\cdots+h+k+i+u\;.\;.\;.\;(1).$$

Написавъ слагаемыя въ обратномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$S=u+i+k+h+\cdots+d+c+b+a\;.\;.\;.\;(2)$$

Складывая (1) съ (2), получаемъ:

$$2S=(a+u)+(b+i)+(c+k)+(d+h)+\;.\;.\;.$$
$$.\;.\;.+(h+d)+(k+c)+(i+b)+(u+a).$$

Во вторыхъ, третьихъ и т. д. скобкахъ имѣемъ суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ; по предыдущей теоремѣ, каждая такая сумма $=(a+u)$, слѣд. вторая часть равенства содержитъ слагаемое $(a+u)$, повторенное n разъ, а потому

$$2S=(a+u)\,.\,n,\quad \text{откуда}\quad S=\frac{(a+u)\,.\,n}{2}.$$

Примѣчаніе Подставивъ вмѣсто u выраженіе $a+(n-1)\delta$, можемъ этой формулѣ дать видъ

$$S=\frac{2a+(n-1)\,.\,\delta}{2}\,.\,n.$$

Примѣры: I. *Найти сумму n первыхъ натуральныхъ чиселъ.* Эти числа образуютъ прогрессію $\div 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)\,.\,n$, въ которой первый членъ $=1$, разность $=1$, число членовъ $=n$; а потому

$$S=\frac{(1+n)\,.\,n}{2}.$$

II. *Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.*

Выше мы видѣли, что n-ое нечетное число $=2n-1$; потому вопросъ приводится къ нахожденію суммы членовъ прогрессіи

$$\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2n-1),$$

въ которой первый членъ $=1$, разность $=2$, послѣдній членъ $=2n-1$, число членовъ $=n$. Такимъ образомъ

$$S=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2.$$

Итакъ: *сумма n первыхъ нечетныхъ чиселъ равна квадрату числа этихъ чиселъ.*

Докажемъ, что *обратно: если сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равна квадрату числа этихъ членовъ, каково бы оно ни было, то прогрессія есть рядъ нечетныхъ чиселъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, *каково бы ни было n*, должно быть

$$\frac{2a+(n-1)\delta}{2}\cdot n \quad n^2,$$

или, располагая по степенямъ n:

$$(2-\delta)n^2+(\delta-2a)n=0.$$

Такъ какъ полиномъ первой части долженъ быть *тождественно* равенъ нулю, то должны имѣть:

$$2-\delta=0 \quad \text{и} \quad \delta-2a=0, \quad \text{откуда } \delta=2,\ 2a=\delta;$$

или:

$$a=1 \quad \text{и} \quad \delta=2, \quad \text{т.-е. рядъ будетъ } \div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,.\,.$$

729. Вставка среднихъ ариѳметическихъ между двумя данными числами.

Между двумя данными числами a и b вставить m среднихъ ариѳметическихъ значитъ составить ариѳметическую прогрессію объ $m+2$ членахъ, которой a и b были бы крайними членами. Очевидно, вопросъ приводится къ нахожденію разности δ прогрессіи. Такъ какъ члену b предшествуетъ $m+1$ членовъ, то

$$b=a+(m+1)\,.\,\delta, \quad \text{откуда } \delta=\frac{b-a}{m+1}.$$

Такимъ образомъ прогрессія будетъ

$$\div\, a\cdot\left(a+\frac{b-a}{m+1}\right)\cdot\left(a+2\cdot\frac{b-a}{m+1}\right)\cdot\left(a+3\cdot\frac{b-a}{m+1}\right)\cdot\,\cdot\quad\Big(a+m\frac{b-a}{m+1}\cdot b.$$

Примѣръ. *Между 5 и 32 вставить 8 среднихъ ариѳметическихъ.*

Разность будетъ $\frac{32-5}{9}$, или 3; слѣд. имѣемъ прогрессію

$$\div 5\,.\,8\,.\,11\,.\,14\,.\,17\,.\,20\,.\,23\,.\,26\,.\,29\,.\,32.$$

730. Теорема.—*Если въ прогрессіи* $\div a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,.\,.\,r\,.\,t\,.\,u$ *между каждымъ членомъ и слѣдующимъ вставить одинаковое число m среднихъ ариѳметическихъ, то данные члены вмѣстѣ съ вставленными составятъ одну сплошную прогрессію*

$$\div a.\alpha.\beta\ldots\lambda.b.\alpha'.\beta'\ldots\lambda'.c.\alpha''.\beta''\ldots\lambda''.d\ldots t.\alpha^{(n)}.\beta^{(n)}\ldots\lambda^{(n)}.u.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ частныя прогрессіи, такимъ образомъ составленныя

$$\div a.\alpha.\beta\ldots\lambda.b;\quad \div b.\alpha'.\beta'\ldots\lambda'.c;\ \ldots\quad \div t.\alpha^{(n)}.\beta^{(n)}\ldots\lambda^{(n)}.u,$$

послѣдовательно имѣютъ разности

$$\frac{b-a}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1},\ \ldots,\ \frac{u-t}{m+1};$$

но $b-a=c-b=d-c=\ldots=u-t$, по опредѣленію прогрессіи, слѣд. всѣ эти отдѣльныя прогрессіи имѣютъ одинаковую разность. А какъ, притомъ, послѣдній членъ одной служитъ первымъ членомъ слѣдующей, то совокупность всѣхъ прогрессій составляетъ одну сплошную прогрессію.

731. Теорема. *Во всякой безконечной возрастающей ариѳметической прогрессіи члены приближаются къ* $+\infty$, *а въ убывающей къ* $-\infty$.

1. Если буквою u обозначимъ n-й членъ, то требуется доказать, что всегда можно найти такое цѣлое число n, что u будетъ больше всякаго произвольно взятаго количества M, т.-е. что для n всегда можно найти цѣлое значеніе, удовлетворяющее неравенству: $a+\delta(n-1)>M\ \ldots$ (1). Въ самомъ дѣлѣ, перенеся a во вторую часть и дѣля на положит. число δ, имѣемъ

$$n-1>\frac{M-a}{\delta},\quad \text{откуда}\quad n>1+\frac{M-a}{\delta}.$$

Каково бы ни было M, всегда $\frac{M-a}{\delta}$ можно выразить цѣлымъ или дробнымъ числомъ; найдя цѣлую часть формулы $1+\frac{M-a}{\delta}$ и взявъ для n цѣлое число, большее ея, тѣмъ самымъ удовлетворимъ неравенству (1).

Примѣръ. *Съ какого мѣста члены прогрессіи* $\div 5\,.\,8\,.\,11\ldots$ *становятся больше 10000?*

По предыдущему должно быть $n>1+\frac{10000-5}{3}$, или $n>3332\frac{2}{3}$; слѣд. члены становятся больше 10000, начиная съ 3333-го.

2. Если прогрессія будетъ убывающая, т.-е. $\delta<0$, то всегда можно найти въ прогрессіи такой членъ u, который былъ бы меньше произвольно взятой величины M, т.-е. всегда можно найти цѣлое число n, удовлетворяющее неравенству $a+(n-1)\delta<M$. Въ самомъ дѣлѣ, неравенство даетъ $(n-1)\delta<M-a$, откуда, раздѣливъ на δ и перемѣнивъ смыслъ неравенства, имѣемъ

$$n-1>\frac{M-a}{\delta},\quad \text{а отсюда}\quad n>1+\frac{M-a}{\delta}.$$

Взявъ для n цѣлое число, большее $1+\frac{M-a}{\delta}$, удовлетворимъ неравенству.

732. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ ариѳметическимъ прогрессіямъ.

Во всякой ариѳметической прогрессіи фигурируетъ 5 количествъ a, u, δ, n, s, связанныхъ двумя уравненіями:

$$u=a+(n-1)\,.\,\delta\ \ldots\ (1)\qquad s=\frac{(a+u)n}{2}\ \ldots\ (2).$$

Слѣдовательно, всегда можно найти два изъ этихъ количествъ, когда остальныя три будутъ даны; а потому можно предложить столько различныхъ задачъ, сколько существуетъ сочетаній изъ пяти элементовъ по два, т.-е. C_5^2 или 10 задачъ. Эти сочетанія суть: *аи*, *ад*, *ап*, *аs*, *ид*, *ип*, *иs*, *дп*, *дs*, *пs*; а слѣд. задачи таковы:

	Данныя.	Искомыя.
1.	*а*, *д*, *п*	*и*, *s*
2.	*и*, *д*, *п*	*а*, *s*
3.	*а*, *и*, *п*	*д*, *s*
4.	*а*, *и*, *д*	*п*, *s*
5.	*s*, *д*, *п*	*а*, *и*
6.	*s*, *и*, *п*	*а*, *д*
7.	*s*, *а*, *п*	*и*, *д*
8.	*s*, *и*, *д*	*а*, *п*
9.	*s*, *а*, *д*	*и*, *п*
10.	*s*, *а*, *и*	*д*, *п*.

Изъ числа этихъ задачъ только 8-я и 9-я приводятъ къ квадратному ур—нію, остальныя рѣшаются ур—ми 1-й степени.

733. Задача I. *Сколько нужно взять членовъ въ ариѳметической прогрессіи, которой 1-й членъ есть 16, а разность 8, чтобы сумма членовъ составила 1840?*

Имѣемъ ур—нія

$$и = 16 + (п - 1) \,.\, 8 \text{ и } 1840 = \frac{(16 + и)п}{2}.$$

Исключая изъ этихъ ур—ній *и*, находимъ ур—ніе

$$(1) \qquad 1840 = \frac{[2 \,.\, 16 + (п - 1) \,.\, 8]п}{2}, \quad \text{или} \quad п^2 + 3п - 460 = 0.$$

Рѣшая это ур—ніе, находимъ корни: $п' = 20$, $п'' = -23$. Заключаемъ, что нужно взять 20 членовъ. Прогрессія будетъ

$$\div 16.24.32.40.48.56.64.72.80.88.96.104.112.120.128.136.144.152.160.168.$$

Отрицательный корень. Подставивъ въ ур. (1) $-п$ вмѣсто $п$, получимъ:

$$1840 = \frac{[2 \,.\, 16 + (-п - 1) \,.\, 8] \,.\, -п}{2}, \quad \text{или} \quad 1840 = \frac{[2 \,.\, (-16) + (п + 1) \,.\, 8]п}{2},$$

или

$$1840 = \frac{[2 \,.\, (-8) + (п - 1) \,.\, 8]п}{2},$$

ур—ніе, положительный корень котораго $= 23$. Заключаемъ, что, взявъ первымъ членомъ прогрессіи (-8) вмѣсто 16, разность сохранивъ ту же, а число членовъ увеличивъ на 3, получимъ сумму, равную 1840. И дѣйствительно, сумма 23 членовъ прогрессіи

$$\div -8 \,.\, 0 \,.\, 8 \,.\, 16 \,.\, 24 \,.\,.\,.\, 168$$

равна 1840, ибо эта прогрессія сравнительно съ предыдущей имѣетъ три лишнихъ члена: $-8,0$ и $+8$, дающимъ въ суммѣ 0, а остальные члены — тѣ же, что и въ предыдущемъ рядѣ.

734. Задача II. *Изъ А выѣзжаетъ курьеръ и проѣзжаетъ въ первый день 10 миль, а въ каждый слѣдующій $\frac{1}{4}$-ью мили больше. Спустя 3 дня, другой курьеръ, ѣдущій по тому же пути какъ и первый, выѣзжаетъ изъ города В, расположеннаго передъ городомъ А, въ 40 миляхъ отъ послѣдняго. Онъ проѣзжаетъ въ первый день 7 миль, а въ каждый слѣдующій день $\frac{2}{3}$ мили болѣе. Черезъ сколько дней послѣ выѣзда перваго оба курьера встрѣтятся?*

Рѣшеніе Штурма. Пусть искомое число дней будетъ x. Путь, пройденный 1-мъ курьеромъ, есть сумма членовъ ариѳм. прогр., которой крайніе члены суть 10 и $10+\frac{x-1}{4}$, т.-е. $\left(20+\frac{x-1}{4}\right)\frac{x}{2}$, или $\frac{(79+x)x}{8}$. Второй курьеръ находится въ дорогѣ, до встрѣчи съ первымъ, $x-3$ дня, и проѣзжаетъ $\left[14+\frac{(x-4).2}{3}\right].\frac{x-3}{2}$, или $\frac{(17+x)(x-3)}{3}$ миль.

Ур—ніе задачи есть

$$(1)\quad \frac{(79+x)x}{8}-\frac{(17+x)(x-3)}{3}-40=0,\text{ или }(2)\ 5x^2-125x+552=0.$$

Рѣшивъ ур—ніе, найдемъ: $x'=5,72\ .\ .\ .$, $x''=19,27\ .\ .\ .$

Но, приводя задачу къ ур—нію, мы предполагали, что x — число цѣлое; сл. найденныя рѣшенія не отвѣчаютъ на предложенный вопросъ. Тѣмъ не менѣе, можно показать, что цѣлыя части 5 и 19 корней означаютъ, что были двѣ встрѣчи, первая по истеченіи 5, вторая 19-ти дней.

Во-первыхъ, замѣтимъ, что если буквою α обозначить путь, сдѣланный первымъ курьеромъ, и буквою β — путь, пройденный вторымъ, увеличенный на 40 миль, полагая, что первый курьеръ находится въ пути цѣлое число x, а второй—цѣлое число $x-3$ дней, то имѣемъ тождественно

$$(3)\quad 5x^2-125x+552=24\,(\beta-\alpha).$$

Это, очевидно, слѣдуетъ изъ того, что ур. (2) было выведено изъ (1) перемѣною знаковъ у всѣхъ членовъ и умноженіемъ ихъ на 24.

Подставимъ теперь въ 1-ую часть ур. (2) вмѣсто x сперва 5, потомъ 6; такъ какъ меньшій корень $5,72\ .\ .\ .$ содержится между этими числами, то результатъ первой подстановки будетъ положительный, второй — отрицательный. Но, въ силу тождества (3), разность $\beta-\alpha$ всегда имѣетъ одинаковый знакъ съ триномомъ $5x^2-125x+552$; слѣд. въ концѣ пятаго дня $\alpha<\beta$, а въ концѣ шестого $\beta<\alpha$. Итакъ, первая встрѣча, какъ и было сказано, имѣла мѣсто между пятымъ и шестымъ днемъ. Подобнымъ образомъ докажемъ, что вторая встрѣча имѣла мѣсто черезъ 19 дней. Возможность этой второй встрѣчи легко понять, ибо второй курьеръ, увеличивая свою скорость болѣе перваго, встрѣтитъ его, будучи сначала перегнанъ первымъ. Это подтверждается изслѣдованіемъ, въ концѣ сколькихъ дней оба курьера имѣютъ одинаковую скорость: найдемъ число дней 13, содержащееся между 5 и 19.

Можно, далѣе, опредѣлить дроби, которыя слѣдуетъ придать къ числамъ 5 и 19, для нахожденія точнаго времени встрѣчъ, предполагая, что скорость курьеровъ не измѣняется въ теченіе цѣлаго дня. Опредѣлимъ, напр., время второй встрѣчи.

Чтобы найти промежутокъ, раздѣляющій курьеровъ по истеченіи 19 дней, достаточно, въ силу тождества (3), подставить въ первую часть ур. (2) 19 вмѣсто x и раздѣлить результатъ на 24. Найдемъ $\left(-\frac{3}{4}\right)$; знакъ (—) показываетъ, что въ началѣ 19-го дня курьеръ B не догналъ еще курьера A. Но скорости A и B въ теченіе 19-го дня суть $10+\frac{18}{4}$ и $7-\frac{15\times2}{3}$, или $\frac{29}{2}$ и 17; слѣд., если обозначимъ буквою y искомую часть дня, то для опредѣленія y получимъ ур—ніе $17y-\frac{3}{4}+\frac{29}{2}y$, откуда $y=0{,}3$; слѣд. вторая встрѣча имѣла мѣсто въ концѣ $19^{д.},3$.

735. Задача. III. *Въ двухъ ариѳметическихъ прогрессіяхъ*

$$\div 2\,.\,5\,.\,8\,.\,11\ldots \quad\text{и}\quad \div 3\,.\,7\,.\,11\,.\,15\ldots$$

заключающихъ, каждая, по 100 членовъ, сколько находится общихъ членовъ?

Членъ порядка x въ первой прогрессіи есть $2+3(x-1)$, или $3x-1$; членъ порядка y во второй равенъ $3-4(y-1)$, или $4y-1$; чтобы эти члены были равны, необходимо, чтобы было $3x=4y$. Вопросъ приводится къ нахожденію цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, меньшихъ 100, удовлетворяющихъ неопредѣленному ур—нію $3x=4y$. Выводя изъ него x, находимъ $x=y+\frac{1}{3}y$; слѣд. $\frac{y}{3}$ должны равняться нѣкоторому цѣлому k, откуда $y=3k$, и слѣд. $x=4k$. Но какъ x должно быть не болѣе 100, то k можетъ получать только значенія: 1, 2, 3, . . ., 25. Заключаемъ, что обѣ прогрессіи содержатъ 25 общихъ членовъ.

736. Задача IV. *Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы три данныя числа* A, B, C *были членами порядка m, p, q одной и той же ариѳметической прогрессіи.*

Обозначая буквами x и y первый членъ и разность прогрессіи, о которой говорится въ условіи, необходимо и достаточно, чтобы ур—нія

$$A=x+(m-1)y,\quad B=x+(p-1)y,\quad C=x+(q-1)y$$

удовлетворялись одними и тѣми же значеніями x и y; другими словами, искомое условіе есть результатъ исключенія x и y изъ этихъ трехъ ур—ній. Имѣемъ

$$A-B=(m-p)y,\quad B-C=(p-q)y,$$

а исключивъ y, найдемъ

$$(A-B)(p-q)=(B-C)(m-p),\ \text{или}\ (p-q)A+(q-m)B+(m-p)C=0:$$

это и есть искомое условіе.

737. Задача V.—*Найти сумму одинаковыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи.*

Пусть имѣемъ прогрессію ÷ $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, d \,.\,.\,.\, k \,.\, l$, разность которой $= \delta$, а число членовъ $n+1$, и пусть требуется найти сумму m-хъ степеней ея членовъ.— По свойству прогрессіи имѣемъ:

$$b = a + \delta,\quad c = b + \delta,\quad d = c + \delta, \ldots, l = k + \delta.$$

Возвышая всѣ эти равенства въ $m+1$-ю степень, по формулѣ бинома Ньютона имѣемъ:

$$b^{m+1} = (a+\delta)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m\delta + \frac{(m+1)\,.\,m}{1\,.\,2}a^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-2}\delta^3 + \ldots + \delta^{m+1}$$

$$c^{m+1} = (b+\delta)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m\delta + \frac{(m+1)\,.\,m}{1\,.\,2}b^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}b^{m-2}\delta^3 + \ldots + \delta^{m+1}$$

$$d^{m+1} = (c+\delta)^{m+1} = c^{m+1} + (m-1)c^m\delta + \frac{(m+1)\,.\,m}{1\,.\,2}c^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}c^{m-2}\delta^3 + \ldots + \delta^{m+1}$$

. . . .

$$l^{m+1} = (k+\delta)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m\delta + \frac{(m+1)\,.\,m}{1\,.\,2}k^{m-1}\delta^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}k^{m-2}\delta^3 + \ldots + \delta^{m+1}$$

Складывая эти равенства, замѣчая притомъ, что члены b^{m+1}, c^{m+1}, d^{m+1} . . ., k^{m+1} общіе обѣимъ частямъ, взаимно уничтожаются, и полагая для краткости

$$a^m + b^m + c^m + \ldots + k^m = S_m;\quad a^{m-1} + b^{m-1} + \ldots + k^{m-1} = S_{m-1};$$
$$a^{m-2} + b^{m-2} + \ldots + k^{m-2} = S_{m-2}, \ldots ;\ a + b + c + \ldots + k = S_1,$$

найдемъ

$$l^{m+1} - a^{m+1} = (m+1)\delta\,.\,S_m + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}\delta^2\,.\,S_{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\delta^3\,.\,S_{m-2} + \ldots + (m+1)\delta\,.\,S_1 + n\delta^{m+1} \ldots (1)$$

Выражая отсюда S_m, находимъ:

$$S_m = \frac{l^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)\delta} - \frac{m}{2}\,.\,\delta\,.\,S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2\,.\,3}\delta^2\,.\,S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3\,.\,4}\delta^3\,S_{m-3} - \ldots - S_1 - \frac{n}{m+1}\delta \ldots (2).$$

Помощію этой формулы можно найти S_m, если будутъ извѣстны суммы S_{m-1}, S_{m-2}, . . . , S_1. Прилагая эту формулу, нужно помнить, что число членовъ второй части равно $m+1$.

S_1 есть сумма членовъ самой прогрессіи и выраженіе ея извѣстно. Зная S^1 и полагая $m=2$, найдемъ S_2. Зная S_1 и S_2, и полагая $m=3$, найдемъ S_3, и т. д.

Сумма одинаковыхъ степеней натуральнаго ряда. — Положивъ $a = 1$, $\delta = 1$, $l = n + 1$, обратимъ нашу прогрессію въ рядъ первыхъ $n + 1$ натуральныхъ чиселъ: $\div 1 . 2 . 3 . . . n . (n + 1)$. Въ этомъ рядѣ будетъ

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + . . . + n^m; \qquad S_{m-1} = 1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + . . . + n^{m-1};$$

. . . .

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + . . . + n^2; \quad S_1 = 1 + 2 + 3 . . . + n.$$

Формула (2) приметъ видъ

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{(m+1)} - \frac{m}{2} . S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 . 3} . S_{m-2} -$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2 . 3 . 4} S_{m-3} - . . . - S_1 - \frac{n}{m+1} . . . (3).$$

1 Положивъ $m = 1$, и замѣтивъ, что рядъ будетъ имѣть 2 члена, получимъ:

$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{1}{2} . S_0$. Но $S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + . . . + n^0 = 1 + 1 + 1 + . . . + 1 = n$;

слѣдовательно

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - 1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{(n+1)\ n}{2} . . . (A)$$

результатъ, найденный нами въ § 728.

2. Положивъ $m = 2$, находимъ:

$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - S_1 - \frac{1}{3} . S_0$. Подставляя величины, найденныя для S_0 и S_1, получимъ

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} - \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)^2 - 1]}{3}$$

$$- \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} . . . (B)$$

Таково выраженіе суммы квадратовъ первыхъ n натуральныхъ чиселъ, извѣстное подъ именемъ *формулы Архимеда.*

3. Положивъ $m = 3$, найдемъ:

$S_3 = \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{3}{2} S_2 - S_1 - \frac{1}{4} S_0$. Подставляя выраженія, найденныя для S_2, S_1, S_0, получимъ:

$$S_3 = \frac{(n+1)^4 - 1}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{2n(n+1)}{4} - \frac{n}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)}{4} = \frac{(n+1)[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n]}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)(n+1)[n^2 + 2n + 1 - 2n - 1]}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} =$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2 . . . (C).$$

Такимъ образомъ: *сумма кубовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ равна квадрату суммы тѣхъ же чиселъ.*

4. Подобнымъ образомъ нашли бы

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \ldots (D)$$

$$S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \ldots (E)$$

и т. д.

738. Предѣлъ $\frac{S^m}{n^{m+1}}$ (формула *Шлёмильха*). — Положивъ въ равенствѣ (1) $a=1$, $b=1$, $l=n$, имѣемъ:

$$n^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1 \, . \, 2} \, . \, S_{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} S_{m-2} + \ldots + (m+1)S_1 + n.$$

Если бы перенесли всѣ члены, исключая второго, въ первую часть, то нашли бы въ ней полиномъ $m+1$-й степени относительно n, такъ что сумма S_m m-хъ степеней первыхъ n чиселъ есть цѣлая функція $m+1$-й степени относительно n, разсматриваемаго какъ перемѣнное. Такимъ образомъ, полиномы S_{m-1}, S_{m-2} . . . суть функціи отъ n степени m-й, $m-1$-й, . . . Слѣд., раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на n^{m+1}, замѣтимъ, что всѣ дроби

$$\frac{S_{m-1}}{n^{m+1}}, \frac{S_{m-2}}{n^{m+1}}, \frac{S_{m-3}}{n^{m+1}}, \ldots$$

обратятся въ нуль при $n = \infty$, ибо степень числителя отн. n каждой изъ нихъ ниже степени знаменателя.

Значитъ, въ предѣлѣ, при $n = \infty$, равенство дастъ

$$1 = (m+1) \, . \, lim \frac{S_m}{n^{m+1}}, \text{ откуда } lim \frac{S_m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

Напр., по этой теоремѣ имѣемъ: $lim \frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{3}$, $lim \frac{S_4}{n^5} = \frac{1}{5}$, и т. д.

739. Приложеніе 1.— *Вычисленіе кучъ ядеръ.* Въ настоящее время въ артиллеріи употребляются ядра двухъ родовъ: сферическія — для гладкихъ орудій, и цилиндро-коническія — для нарѣзныхъ. Тѣ и другія складываютъ въ арсеналахъ въ кучи различныхъ формъ; займемся вычисленіемъ числа ядеръ, заключающихся въ такихъ кучахъ.

1. *Опредѣлить число ядеръ пирамидальной кучи съ квадратнымъ основаніемъ.*— Сферическія ядра въ этого рода кучахъ складываютъ слѣдующимъ образомъ. На землѣ кладутъ ядра рядами, образующими квадратный слой, въ каждой сторонѣ котораго n ядеръ; на немъ помѣщаютъ въ промежуткахъ между ядрами другой квадратный слой, содержащій $n-1$ ядеръ въ каждой своей сторонѣ, и т. д. до верхняго слоя, въ которомъ находится одно ядро. Такимъ образомъ число ядеръ въ кучѣ будетъ =

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2,$$

т.-е. суммѣ квадратовъ n первыхъ натуральныхъ чиселъ, или, по формулѣ (B):

$$X = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ldots (\alpha).$$

Усѣченная квадратная пирамида. — Если съ этой кучи снять нѣсколько ядеръ, взявъ сперва верхнее ядро, затѣмъ ядра (4) слѣдующаго слоя и т. д., то если снято будетъ p слоевъ, получится квадратная усѣченная пирамида, въ основаніи которой n^2 ядеръ, а въ верхнемъ слоѣ $(p+1)^2$. Число снятыхъ ядеръ получится изъ (α), гдѣ надо n замѣнить буквою p. Число ядеръ оставшихся

$$X' = \frac{n(n+1)(2n+1) - p(p+1)(2p+1)}{6} = \frac{(n-p)[2p^2 + p(2n+3) + (n+1)(2n+1)]}{6}.$$

Положивъ $p=0$, найдемъ формулу (α).

II. *Найти число ядеръ пирамиды съ треугольнымъ основаніемъ.* — Основаніемъ кучи служитъ равносторонній △; въ промежутки его положены ядра, образующія другой равносторонній △, котораго каждая сторона содержитъ однимъ ядромъ менѣе, и т. д.; наконецъ, верхній слой состоитъ изъ одного ядра.

Пусть нижній слой содержитъ въ каждой сторонѣ n ядеръ; онъ будетъ состоять изъ n рядовъ, изъ которыхъ въ первомъ будетъ 1 ядро, во второмъ 2, въ третьемъ 3 . . ., въ n-мъ n ядеръ. Слѣдоват. число всѣхъ ядеръ нижняго слоя $=1+2+3+\ldots+n$, или, по формулѣ (A), $\frac{n(n+1)}{2}$, или $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$. Полагая въ этой формулѣ n последовательно равнымъ 1, 2, 3, . . . , n, найдемъ:

число ядеръ 1-го слоя $=\frac{1}{2}+\frac{1^2}{2}$

„ „ 2-го „ $\frac{2}{2}+\frac{2^2}{2}$

„ „ 3-го „ $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2}$

. . . .

„ „ n-го „ $\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$; слѣд. число всѣхъ ядеръ кучи

$$Y=\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+n)+\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2);$$

или, по формуламъ (A) и (B):

$$Y=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\ldots(\beta).$$

Усѣченная треугольная куча.—Снявъ p слоевъ сверху, получимъ усѣченную треугольную пирамиду, содержащую въ верхнемъ ребрѣ $(p+1)$ ядро. По формулѣ (β) найдемъ число ядеръ въ ней

$$Y'=\frac{(n-p)\left[p^2+p(n-3)+(n+1)(n+2)\right]}{6}.$$

III. *Найти число ядеръ кучи съ прямоугольнымъ основаніемъ.* —Пусть меньшая сторона основанія содержитъ n ядеръ, большая $n+p$. Замѣтимъ, что число ядеръ въ измѣреніяхъ слоевъ будетъ всегда уменьшаться на 1, при переходѣ отъ одного слоя къ другому. Слѣд. разность между числами шаровъ въ двухъ сторонахъ каждаго слоя всегда будетъ p. Верхній слой состоитъ изъ одного ряда, имѣющаго $p+1$ ядро.

Число ядеръ нижняго слоя будетъ

$$n(n+p),\qquad\text{или}\qquad n^2+pn.$$

Полагая n послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, . . . , n, найдемъ числа ядеръ во всѣхъ слояхъ:

$1^2+p\,.\,1$

$2^2+p\,.\,2$

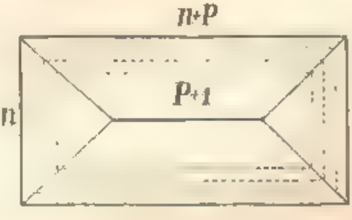
$3^2+p\,.\,3$

. . . .

. . . .

$(n-1)^2+p(n-1)$

$n^2+p\,.\,n;$



Черт. 153.

слѣд. число всѣхъ ядеръ кучи

$$Z = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2) + p(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n),$$

или

$$Z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + p \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6} \ldots (\gamma)$$

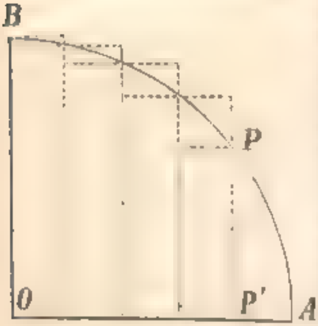
Обыкновенно даютъ число ядеръ сторонъ основанія; пусть $n + p = m$, формула приметъ видъ

$$Z = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

IV. *Куча цилиндро-коническихъ ядеръ.*—Въ основаніи кучи находится прямоугольникъ, въ одной сторонѣ котораго (меньшей) n ядеръ, въ другой p. Въ виду формы ядеръ, надъ этимъ основаніемъ можно расположить прямоугольный слой съ p ядрами въ одной сторонѣ, $(n-1)$ въ другой, и т. д. Число U ядеръ будетъ.

$$U = pn + p(n-1) + p(n-2) + \ldots + p \cdot 2 + p \cdot 1 = p \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

740. Приложеніе II.—*Опредѣленіе объема шара и его частей.*—Разсмотримъ шаровой слой, котораго одно основаніе пусть совпадаетъ съ большимъ кругомъ, такой слой мы получимъ, взявъ на дугѣ AB квадранта точку P, спустивъ изъ нея перпендикуляръ PP' на радіусъ OA и заставивъ фигуру OBPP' сдѣлать полный оборотъ около OA, какъ оси. Раздѣлимъ OP' = h на произвольное число n равныхъ частей, изъ точекъ дѣленія проведемъ перпендикуляры къ OA до встрѣчи съ дугою, и на каждомъ изъ нихъ и на отрѣзкахъ построимъ прямоугольники: получимъ рядъ описанныхъ и рядъ вписанныхъ прямоугольниковъ. При обращеніи фигуры около OA, первые образуютъ тѣло, состоящее изъ n цилиндровъ, объемъ котораго будетъ больше объема слоя, вторые составятъ тѣло, котораго объемъ меньше слоя.



Черт. 154.

Для вычисленія объемовъ обоихъ тѣлъ, описаннаго и вписаннаго, обозначимъ радіусъ шара буквою R. Радіусы основаній описанныхъ цилиндровъ будутъ

$$R, \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \ldots, \sqrt{R^2 - \left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2}.$$

Радіусы основаній вписанныхъ цилиндровъ будутъ:

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2}, \sqrt{R^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2}, \ldots \sqrt{R^2 - \left(\frac{nh}{n}\right)^2}.$$

Объемъ описаннаго тѣла будетъ:

$$W = \pi R^2 \cdot \frac{h}{n} + \pi\left[R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{h}{n} + \pi\left[R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{h}{n} + \ldots + \pi\left[R^2 - \left[\frac{(n-1)h}{n}\right]^2\right] \cdot \frac{h}{n},$$

или, въ виду того, что числомъ слагаемыхъ есть n:

$$W = \pi R^2 h - \pi \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} \cdot h^3.$$

Для объема вписаннаго тѣла такимъ же образомъ найдемъ:

$$w = \pi\left[R^2 - \left(\frac{h}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{h}{n} + \pi\left[R^2 - \left(\frac{2h}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{h}{n} + \pi\left[R^2 - \left(\frac{3h}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{h}{n} + \ldots +$$

$$+ \pi\left[R^2 - \left(\frac{nh}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{h}{n},$$

или $$w = \pi R^2 h - \pi\,.\,\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}\,.\,h^3.$$

Отсюда находимъ; $W - w = \frac{1}{n}\,.\,h^3$, слѣд. при неограниченномъ увеличенiи n разность между обоими объемами м. б. сдѣлана безконечно малою; а потому, на осн. Теоремы I, § 183, заключимъ, что объемъ слоя есть общiй предѣлъ перемѣнныхъ W и w. Итакъ, назвавъ объемъ слоя буквою U, имѣемъ

$$U = \lim\left\{\pi R^2 h - \pi\,.\,\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}\,.\,h^3\right\}.$$

Такъ какъ первый членъ $\pi R^2 h$ есть величина постоянная, то задача сводится къ опредѣленiю $\lim\left[\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}\right]_{n=\infty}$, который, какъ извѣстно равенъ $\frac{1}{3}$.

Итакъ: $$U = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3 = \pi h\left[R^2 - \frac{h^2}{3}\right]\,.\,.\,.\,(1).$$

При помощи этой формулы можно опредѣлить и объемъ такого слоя, котораго ни одно изъ основанiй не есть большой кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ центра опустимъ перпендикуляры h' и h'' на основанiя такого слоя, то, полагая $h' > h''$, можемъ разсматривать данный слой U′ какъ разность двухъ слоевъ перваго рода; поэтому

$$U' = \pi\left[R^2 - \frac{1}{3}h'^2\right]h' - \pi\left[R^2 - \frac{1}{3}h''^2\right]h'',$$

что легко привести (введя радiусы основанiй и высоту слоя) къ обыкновенной формулѣ объема слоя

Если въ формулѣ (1) положимъ $h=R$, найдемъ объемъ полушара $U'' = \frac{2}{3}\pi R^3$, а отсюда объемъ цѣлаго шара: $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Вычтя изъ объема полушара объемъ слоя (1), найдемъ объемъ сферическаго сегмента: $\frac{2}{3}\pi R^3 - \pi[R^2 - \frac{1}{3}h^2]h\,.\,.\,.\,(2)$. Отсюда получимъ обыкновенно даваемую въ геометрiи формулу объема сегмента, если введемъ его высоту $H=R-h$ отсюда $h=R-H$, а подставивъ во (2), найдемъ $\pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$.

Для вычисленiя объема шарового сектора, разсматриваемъ его какъ сумму сегмента и конуса: назвавъ высоту сегмента буквою H, находимъ для высоты конуса $R-H$, а для радiуса его основанiя $\sqrt{R^2 - (R-H)^2}$, такъ что объемъ сектора будетъ $= \pi\left(R - \frac{H}{3}\right)H^2 + \frac{1}{3}\pi[R^2 - (R-H)^2](R-H)$, или, по упрощенiи, $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Такимъ образомъ формула (1) рѣшаетъ вполнѣ вопросъ о вычисленiи объемовъ шара и его частей.

ГЛАВА XLVI.

Прогрессія геометрическая.—Общій членъ.—Вставка среднихъ геометрическихъ.—Сумма членовъ конечной прогрессіи. Леммы о степеняхъ и корняхъ. Суммированіе безконечныхъ геометрическихъ прогрессій.

741. Опредѣленіе.—*Геометрической прогрессіей* наз. рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное количество, называемое *знаменателемъ прогрессіи*. Когда абсолютная величина членовъ идетъ увеличиваясь, прогрессія называется *возрастающею;* если же абсолютная величина членовъ идетъ убывая, прогрессія наз. *убывающею*. Очевидно, въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей она меньше единицы. Для полученія знаменателя прогрессіи надо какой-нибудь членъ раздѣлить на предыдущій. Слово прогрессія обозначается знакомъ ∺; между членами прогрессіи ставятъ знакъ : . Такъ,

$:: 2 : 6 : 18 : 54 : \ldots$ есть возрастающая прогр. съ знаменателемъ 3;

$:: 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \ldots$ есть убывающая прогрессія съ знаменателемъ $\frac{1}{3}$.

Общій видъ геометрической прогрессіи будетъ

$$∺ a : b : c : d : \ldots r : t : u : \ldots \quad (1)$$

знаменатель обыкновенно обозначаютъ буквою q.

Каждые три смежные члена прогрессіи составляютъ непрерывную кратную пропорцію. Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію геометрической прогрессіи: $c = bq$ и $d = cq$, откуда, раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ $c : d = b : c$.

742. Теорема. **Общій (n-й) членъ.**—Пусть въ прогрессіи (1) § 741 членъ u будетъ n-й; по опредѣленію прогрессіи, имѣемъ:

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \ldots, \quad t = rq, \quad u = tq.$$

Перемножая почленно эти $(n - 1)$ равенствъ и сокращая обѣ части на $b \cdot c \ldots t$, найдемъ

$$u = aq^{n-1},$$

т.-е. *каждый членъ прогрессіи равенъ первому, помноженному на знаменателя прогрессіи въ степени числа предшествующихъ членовъ.*

Такъ, найдемъ, что 9-й чл. прогрессіи $∺ 1 : 3 : 9 : 27 : \ldots$ будетъ $= 1 \times 3^8$, или 6561. Восьмой членъ $∺ 3 : \frac{3}{2} : \ldots$ равенъ $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{3}{128}$.

743. Задача. *Найти условіе, при которомъ три данныя числа* A, B, C *представляютъ члены порядковъ m, n, p одной и той же геометрической прогрессіи?*

Обозначивъ первый членъ этой прогрессіи буквою x, а знаменателя буквою y, имѣемъ ур—нія

$$A = xy^{m-1}, \quad B = xy^{n-1}, \quad C = xy^{p-1}.$$

Три ур—нія вообще не могутъ быть удовлетворены однѣми и тѣми же значеніями x и y; поэтому, чтобы найти искомое условіе, нужно выразить, что существуетъ общее этимъ ур—мъ рѣшеніе, т.-е. *исключить* x и y. Для исключенія x дѣлимъ почленно первое ур. на второе, а второе на третье:

$$\frac{A}{B} = y^{m-n}, \quad \frac{B}{C} = y^{n-p}.$$

Возвышая первое изъ этихъ ур—ній въ степень $n-p$, а второе въ степень $m-n$, имѣемъ:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = y^{(m-n)(n-p)}, \quad \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n} = y^{(m-n)(n-p)},$$

откуда

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n-p} = \left(\frac{B}{C}\right)^{m-n}, \quad \text{или } A^{n-p} \times B^{p-m} \times C^{m-n} = 1:$$

это и есть требуемое условіе.

744. Вставка среднихъ геометрическихъ между двумя данными числами.

Вставить m *среднихъ геометрическихъ или пропорціональныхъ* между двумя данными числами a и b значитъ найти m такихъ чиселъ, которыя между собою и съ данными составляли бы геометрическую прогрессію. Пусть q будетъ неизвѣстный знаменатель этой прогрессіи; послѣднему члену b предшествуетъ $m+1$ членъ, а потому

$$b = aq^{m+1}, \quad \text{откуда} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Такимъ образомъ искомая прогрессія будетъ

$$:: a : a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a\sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} : \ldots : b.$$

Примѣръ. Вставить 3 среднихъ геометрич. между 4 и 64. Знаменатель $q = \sqrt[4]{\frac{64}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$; искомые средніе члены суть: 4×2, 4×2^2 и 4×2^3, или 8, 16 и 32.

745. Теорема.—*Если между послѣдовательными членами геометрической прогрессіи вставить одинаковое число среднихъ, то полученныя частныя прогрессіи составятъ одну сплошную прогрессію.*

Пусть данная прогрессія будетъ $:: a : b : c : \ldots : r : t : u$, и пусть между каждыми двумя послѣдовательными членами вставлено m среднихъ геометрическихъ; отдѣльныя прогрессіи $\div\div\, a : \alpha : \beta : \ldots\ldots : \lambda : b$; $\div\div\, b : \alpha' : \beta' : \ldots : \lambda' : c$; $\ldots$ $:: t : \alpha^{(n)} : \ldots : \lambda^{(n)} : u$ имѣютъ соотвѣтственно знаменателей

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \ldots, \sqrt[m+1]{\frac{u}{t}};$$

но $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \ldots = \frac{u}{t} = q$, гдѣ q—знаменатель данной прогрессіи; слѣд. всѣ эти прогрессіи имѣютъ общаго знаменателя; и какъ послѣдній членъ одной служитъ первымъ членомъ слѣдующей, то всѣ прогрессіи въ совокупности составляютъ одну сплошную прогрессію.

746. Теорема.— *Во всякой геометрической прогрессіи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію двухъ другихъ, равно удаленныхъ отъ крайнихъ.*

Пусть въ прогрессіи $\div\div a : b : \ldots : x : \ldots : y : \ldots t : u$ члену x предшествуетъ и за членомъ y слѣдуетъ p членовъ; въ такомъ случаѣ: $x = aq^p \ldots$ (1). Въ прогрессіи, начинающейся членомъ y и кончающейся членомъ u, имѣемъ $u = yq^p$, откуда $y = \frac{u}{q^p} \ldots$ (2). Перемноженіе (1) и (2) даетъ $xy = au$, что и т. д.

747. Сумма членовъ конечной геометрической прогрессіи.

Пусть дана прогрессія $\div\div a : b : c : d : \ldots : r : t : u$, содержащая n членовъ, съ знаменателемъ q; сумму членовъ назовемъ S. По свойству геом. прогр. имѣемъ

$$b = aq, \quad c = bq, \quad d = cq, \ldots, \quad t = rq, \quad u = tq.$$

Складывая почленно эти равенства, находимъ:

$$b + c + d + \ldots + t + u = (a + b + c + \ldots + r + t)q.$$

Первая часть этого равенства есть сумма S безъ перваго члена a, т.-е. $S - a$, выраженіе въ скобкахъ есть сумма членовъ безъ послѣдняго, т.-е $S - u$; слѣд. равенству можно дать видъ

$$S - a = (S - u)\,q \quad \text{или} \quad S - a = Sq - uq;$$

рѣшивъ это ур. относительно S, найдемъ

$$S = \frac{uq - a}{q - 1} \ldots (1),$$

т.-е. *чтобы найти сумму членовъ геометрической прогрессіи, нужно: послѣдній членъ умножить на знаменателя, изъ произведенія вычесть первый членъ, и раздѣлить остатокъ на разность между знаменателемъ и единицей.*

Если въ формулѣ (1) замѣнить u его величиною aq^{n-1}, то S приметъ видъ

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \ldots (2)$$

Въ этой формѣ справедливость формулы очевидна; въ самомъ дѣлѣ, по закону частнаго отъ дѣленія $x^m - a^m$ на $x - a$, имѣемъ

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1,$$

а умноживъ обѣ части на a, найдемъ въ первой части формулу (2), а во второй: $a + aq + \ldots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$; но эта сумма есть ничто иное какъ сумма членовъ самой прогрессіи.

Другой пріемъ. Называя сумму членовъ прогрессіи буквою S, имѣемъ

$$S = a + b + c + \ldots + r + t + u \;\ldots\; (3)$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на q, находимъ:

$$Sq = aq + bq + cq + \ldots + rq + tq + uq \;\ldots\; (4)$$

Но, по опредѣленію прогрессіи, $b = aq$, $c = bq$, ..., $t = rq$, $u = tq$; слѣд. (3) можно написать въ видѣ:

$$S = a + aq + bq + \ldots + rq + tq \;\ldots\; (5).$$

Вычитая (5) изъ (4) замѣчаемъ, что всѣ члены уничтожаются, за исключеніемъ члена uq въ (4) и a въ (5); такъ что

$$Sq - S = uq - a, \quad \text{или} \quad S(q-1) = uq - a,$$

откуда

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

Примѣры: I. *Найти сумму 6 членовъ прогрессіи, которой первый членъ $=7$, а послѣдній 700000?*

Знаменатель q опредѣляется изъ ур—нія $700000 = 7 \,.\, q^5$, откуда $q=10$; слѣд.

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 7 \cdot \frac{10^6 - 1}{10 - 1} = 7 \cdot \frac{1000000-1}{10-1} = 7 \cdot \frac{999999}{9} = 777777.$$

II. *Найти сумму 10 первыхъ членовъ геометрической прогрессіи, которой первый членъ $= \frac{1}{2}$, а знаменатель $\frac{1}{10}$?*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{10} - 1}, \text{ или, помноживъ числителя и знам. на } (-10^{10}):$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{10} - 1}{10^9(10 - 1)} = \frac{1}{2} \cdot 1,\ 111\ 111\ 111 = 0,\ 555\ 555\ 555\ 5.$$

Безконечныя геометрическія прогрессіи.

748. Изученіе безконечныхъ геометрическихъ прогрессій требуетъ предварительнаго доказательства слѣдующихъ теоремъ о степеняхъ; къ нимъ присоединяемъ и соотвѣтственныя теоремы о корняхъ.

749. Лемма I. *Послѣдовательныя цѣлыя положительныя степени положительнаго числа, большаго 1, возрастаютъ съ увеличеніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы больше всякой данной величины.*

Пусть будетъ $a > 1$; смыслъ неравенства не измѣнится отъ умноженія неравенства на положительное число; такимъ образомъ послѣдовательно найдемъ:

$$a^2 > a,\ a^3 > a^2,\ a^4 > a^3 \text{ и т. д., вообще } a^{m+1} > a^m;$$

откуда видно, что степени въ самомъ дѣлѣ возрастаютъ съ увеличеніемъ показателя. Но если доказано, что количество идетъ возрастая, то отсюда еще нельзя заключить, что оно можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ: это еще должно быть доказано. Очевидно, будетъ доказано, что a^m м. б. сдѣлано какъ угодно большимъ, если докажемъ, что для показателя m всегда можно найти такую величину, при которой будетъ $a^m > K$, гдѣ K — заданное количество. Пусть a превышаетъ единицу на α, т.-е. $a - 1 = \alpha$. Такъ какъ $a > 1$, то умноженіе на a поведетъ къ увеличенію, и получится рядъ неравенствъ

$$\begin{gathered} a - 1 = \alpha \\ a^2 - a > \alpha \\ a^3 - a^2 > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^{m-1} - a^{m-2} > \alpha \\ a^m - a^{m-1} > \alpha, \end{gathered}$$

откуда, складывая, найдемъ

$$a^m - 1 > \alpha + \alpha + \alpha + \cdot \cdot \cdot + \alpha + \alpha, \quad \text{или } a^m - 1 > m\alpha,$$

откуда

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Очевидно отсюда, что a^m будетъ больше K, если будетъ

$$1 + m\alpha > K,$$

откуда

$$m > \frac{K-1}{\alpha};$$

но очевидно, что каково бы ни было α, всегда можно найти для m такое значеніе, которое будетъ больше $\frac{K-1}{\alpha}$.

Примѣръ. При какомъ значеніи m количество $(1{,}001)^m$ будетъ больше 1000?

При $m > \frac{1000-1}{0{,}001}$, т.-е. при $m > 999000$.

750. Лемма II *Послѣдовательныя цѣлыя положительныя степени числа a, меньшаго 1, идутъ уменьшаясь съ увеличеніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими къ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $a < 1$, получаемъ: $a^2 < a$, $a^3 < a^2, \ldots$, $a^{m+1} < a^m$, т.-е. степени становятся тѣмъ меньше, чѣмъ показатель больше. Затѣмъ, число меньшее 1 можно представить въ видѣ $\frac{1}{1+\alpha}$; желая опредѣлить степень, въ которую нужно возвысить $\frac{1}{1+\alpha}$, чтобы эта степень была меньше заданнаго числа δ, полагаемъ

$$\frac{1}{(1+\alpha)^m} < \delta, \quad \text{откуда} \quad (1+\alpha)^m > \frac{1}{\delta},$$

а по предыдущей леммѣ, это неравенство всегда м. б. удовлетворено.

751. Лемма III. *Корни цѣлаго положительнаго порядка изъ числа большаго 1 уменьшаются съ возрастаніемъ показателя и могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими къ 1, оставаясь, однако же, всегда большими 1, и никогда не дѣлаясь равными ей или меньшими ея.*

Пусть $a > 1$; надо доказать, что

1. $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}$; . . . ; $\sqrt[m+1]{a} < \sqrt[m]{a}$.

2. $\sqrt[m]{a}$ не можетъ быть ни $=$, ни < 1.

3. Разность $\sqrt[m]{a} - 1$ м. б. сдѣлана $<$ всякой, какъ угодно малой, величины.

Для доказательства первой части теоремы приведемъ корни $\sqrt[m+1]{a}$ и $\sqrt[m]{a}$ къ общему показателю: найдемъ: $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m-1)]{a^{m-1}}$, и $\sqrt[m-1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$. По первой леммѣ, $a^{m+1} > a^m$, а слѣд. и $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}} > \sqrt[m(m+1)]{a^m}$ или $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m+1]{a}$.

Затѣмъ, положивъ $\sqrt[m]{a} = 1$ и возвысивъ обѣ части въ m-ую степень, нашли бы $a = 1$, что противно условію $a > 1$. Допустивъ, что $\sqrt[m]{a} < 1$, нашли бы такимъ же образомъ: $a < 1$, что опять противорѣчитъ условію. Итакъ, $\sqrt[m]{a} > 1$.

Докажемъ теперь, что для m всегда можно найти такое значеніе, при которомъ $\sqrt[m]{a}$ будетъ какъ угодно мало разниться отъ 1. Обозначивъ буквою δ очень малое положительное число, будемъ имѣть биномъ $1 + \delta$, весьма мало разнящійся отъ 1, но все-таки большій ея. Въ леммѣ I мы доказали, что всегда можно найти такое значеніе для m, при которомъ будетъ $(1 + \delta)^m > K$, гдѣ K какъ угодно велико; слѣд. какую бы величину ни имѣло a, всегда можно дать m значеніе, при которомъ будетъ $(1 + \delta)^m > a$, откуда $1 + \delta > \sqrt[m]{a}$. Съ другой стороны доказано, что $\sqrt[m]{a} > 1$, такъ что $\sqrt[m]{a}$ заключается между двумя количествами 1 и $1 + \delta$, разность между которыми δ м. б. какъ угодно мала; а потому и разность $\sqrt[m]{a} - 1$ тѣмъ болѣе м. б. сдѣлана какъ угодно малою.

752. Лемма IV. *Корни цѣлаго положительнаго порядка изъ числа меньшаго 1 увеличиваются съ увеличеніемъ показателя, оставаясь всегда < 1, къ которой они могутъ быть сдѣланы какъ угодно близкими.*

Для доказательства, что $\sqrt[m+1]{a} > \sqrt[m]{a}$, приведемъ эти корни къ общему показателю; найдемъ: $\sqrt[m+1]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^m}$, $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$. Но $a < 1$, слѣд. $a^m > a^{m+1}$ (лем. II), а потому $\sqrt[m(m+1)]{a^m}$ или $\sqrt[m+1]{a}$ больше $\sqrt[m(m+1)]{a^{m+1}}$ или $\sqrt[m]{a}$: т.-е. корни увеличиваются съ увеличеніемъ показателя. Затѣмъ, допустивъ, что $\sqrt[m]{a} = 1$, нашли бы, что $a = 1$; допустивъ, что $\sqrt[m]{a} > 1$ нашли бы, что $a > 1$: тотъ и другой выводъ противорѣчитъ условію $a < 1$. Но, оставаясь всегда < 1, $\sqrt[m]{a}$ м. б. сдѣланъ какъ угодно близкимъ къ 1. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ буквою δ какъ угодно малое положит. количество, будемъ имѣть: $1 - \delta < 1$. Поэтому можно выбрать для m такое значеніе, при которомъ, въ силу леммы II, будетъ $(1 - \delta)^m < a$, откуда $1 - \delta < \sqrt[m]{a}$, или $1 - \sqrt[m]{a} < \delta$, какъ бы δ ни было мало.

753. Теорема. *Въ безконечно-возрастающей геометрической прогрессіи абсолютная величина членовъ приближается къ ∞, а въ убывающей—къ 0.*

Будемъ разсматривать абсолютныя величины членовъ прогрессіи, (условившись обозначать абсол. значеніе количества x знакомъ $[x]$):

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \dots : aq^n : \dots$$

Пусть $[q]$ будетъ > 1. Въ силу леммы I, съ приближеніемъ n къ ∞, и $[q^n]$ приближается къ ∞, поэтому для n всегда можетъ быть найдено такое значеніе, при которомъ будетъ $[q^n] > \left[\frac{A}{a}\right]$, гдѣ A какъ угодно большое число; а изъ этого неравенства: $[aq^n] > [A]$, т.-е. съ приближеніемъ n къ ∞, абсолютная величина членовъ прогрессіи приближается къ ∞.

Если, теперь, q будетъ положительно, то и q^n будетъ положительно, слѣд. при $a > 0$ всѣ члены прогрессіи положительны, а потому величина ихъ приближается къ $+\infty$; при $a < 0$, они отрицательны и приближаются къ $-\infty$.

Пусть, затѣмъ, будетъ $[q] < 1$; на основаніи леммы II, при возрастаніи n до ∞, $[q^n]$ приближается къ 0, поэтому всегда можно дать n такое значеніе, что будетъ $[q^n] < \left[\frac{\alpha}{a}\right]$, гдѣ α какъ угодно мало; а отсюда $[aq^n] < \alpha$, т.-е. $[aq^n]$, съ приближеніемъ n къ ∞, приближается къ 0.

Если, теперь, $q > 0$, то и $q^n > 0$, слѣд.: если $a > 0$, то члены прогрессіи приближаются къ 0, оставаясь положительными; при < 0 они приближаются къ 0, будучи отрицательны.

754. Теорема. *Сумма членовъ возрастающей прогрессіи, при неограниченномъ возрастаніи числа членовъ, приближается къ* $\pm\infty$, *а убывающей — къ постоянной величинѣ* $\frac{a}{1-q}$.

Для суммы n членовъ мы имѣемъ формулу $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$, которую можно представить въ видѣ

$$S = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1} \dots (1).$$

I. $q > 1$.—Первый членъ, какъ функція n, измѣняется съ измѣненіемъ числа членовъ, второй же, не содержа n, есть количество постоянное; измѣненіе суммы зависитъ, поэтому, отъ перваго члена. Мы доказали, что въ возрастающей прогрессіи съ положительнымъ знаменателемъ, величина aq^n, съ приближеніемъ n къ ∞, приближается къ $+\infty$ при $a > 0$, и къ $-\infty$ при $a < 0$; а потому и первый членъ, знаменатель котораго конеченъ и положителенъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и S, приближается къ $+\infty$ при $a > 0$, и къ $-\infty$ при $a < 0$.

II. Если $q < 1$, то при $n = \infty$ количество aq^n, а сл. и $\frac{aq^n}{q-1}$ имѣетъ предѣломъ 0, а слѣд. сумма S имѣетъ предѣломъ $-\frac{a}{q-1}$ или $\frac{a}{1-q}$. Итакъ, при $q < 1$,

$$\lim S = \frac{a}{1-q},$$

т.-е. *предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей прогрессіи равенъ первому члену, дѣленному на 1 безъ знаменателя прогрессіи.*

Это предложеніе можно доказать обратнымъ способомъ, раздѣливъ a на $1-q$: частное будетъ имѣть неограниченное число членовъ, ибо одночленъ не дѣлится безъ остатка на многочленъ, а члены его будутъ слѣдовать закону геометрической прогрессіи. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{array}{l|l} a & 1-q \\ \hline a-aq & a+aq+aq^2+aq^3+\dots \\ \quad +aq & \\ \quad +aq-aq^2 & \\ \hline \qquad +aq^2 & \\ \quad\dots\dots\dots & \end{array}$$

III. Пусть $q = +1$. Взявъ конечную (объ n членахъ) прогрессію, имѣемъ: $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$; положивъ $q = +1$, найдемъ $S = \frac{0}{0}$.

Для раскрытія неопредѣленности, замѣчаемъ, что

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1), \text{ слѣд.}$$

$$S = \frac{a(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)}{q-1};$$

отсюда видно, что неопредѣленность — кажущаяся и зависитъ отъ присутствія въ числ. и знамен. общаго множителя $q - 1$, обращающагося въ 0 при $q = 1$. Сокративъ на $q - 1$, и положивъ потомъ $q = 1$, получимъ:

$$S = a\underbrace{(1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ разъ}} = an.$$

Этотъ результатъ можно было предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ, при $q = 1$ сумма $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$ обращается въ $a + a + a \dots + a$, или въ an.

Если, теперь, положить $n = \infty$, то будетъ: $S = a \,.\, \infty$, т.-е. $S = +\infty$ при $a > 0$, и $S = -\infty$ при $a < 0$.

IV. q — *отрицательное*.—Если въ равенствѣ

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

перемѣнить q на $-q$, отъ чего только нечетныя степени q перемѣнятъ знакъ, то получится выраженіе для суммы прогрессіи съ отрицательнымъ знаменателемъ:

$$a - aq + aq^2 - aq^3 + \dots \pm aq^{n-1} = \frac{\pm aq^n - a}{-q - 1} = \mp \frac{aq^n}{q + 1} + \frac{a}{q + 1}.$$

Заключаемъ, что:

1) При q большемъ 1, по абсолютной величинѣ, и при $n = \infty$ членъ $\mp \frac{aq^n}{q + 1} = \pm\infty$, слѣд. и $S = \mp\infty$.

2) При $q < 1$, по абсолютной величинѣ, и при $n = \infty$, будетъ $aq^n = 0$, и слѣд. $S = \frac{a}{1 + q}$.

3) При $q - 1$, по абс. вел., $S = \frac{\mp a + a}{2}$, и слѣд. S равно или 0 (при четномъ числѣ членовъ) или a (при нечетномъ числѣ членовъ). Въ этомъ случаѣ прогрессія представляетъ *рядъ колеблющійся*.

755. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ геометрическимъ прогрессіямъ.

Такъ какъ между пятью количествами a, u, n, q, s фигурирующими во всякой геометрич. прогрессіи, существуетъ только 2 различныхъ соотношенія

$$u = aq^{n-1} \dots (1) \quad S = \frac{uq - a}{q - 1} \dots (2),$$

то, какъ скоро даны 3 изъ этихъ количествъ, остальныя опредѣлятся изъ указанныхъ ур—ній. Какъ и въ случаѣ ариѳметической прогрессіи, можно предложить здѣсь 10 задачъ, изъ которыхъ рѣшимъ только 2 слѣдующія:

Задача I. *Вычислить a и u по даннымъ s, q и n.*

Исключая u изъ ур—ній (1) и (2), находимъ:

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{откуда} \quad a = S \times \frac{q - 1}{q^n - 1};$$

подставляя эту величину въ ур. (2), получаемъ:

$$u = S \cdot \frac{q \quad 1}{q^n - 1} \cdot q^{n-1}.$$

Задача II. *Вычислить q и s, зная a, u, n.*

Изъ (1) находимъ:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}};$$

подстановка во (2) даетъ:

$$S = \frac{u\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} - 1} = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Задача III. *Найти женератрису данной періодической дроби.*

1. Пусть чистая періодическая дробь $f = 0,3737\ .\ .\ .$: ее можно представить въ видѣ

$$f = \frac{37}{100} + \frac{37}{100^2} + \frac{37}{100^3} + \dots$$

Слѣд. f есть предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи, которой $q = \frac{1}{100}$ и $a = \frac{37}{100}$. Потому

$$f = \frac{\frac{37}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{99};$$

результатъ, извѣстный изъ ариѳметики.

2. Возьмемъ смѣшанную періодическую дробь $f = 0.32(745)$. Ее можно написать въ формѣ

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000} + \frac{745}{100 \times 1000^2} + \frac{745}{100 \times 1000^3} + \cdots$$

$$= \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 1000}\left[1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right].$$

Рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогр., въ которой $a = 1$, $q = \frac{1}{1000}$; рядъ этотъ равенъ, слѣдовательно, $\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1000}{999}$; а потому

$$f = \frac{32}{100} + \frac{745}{100 \times 999} = \frac{32 \times 999 + 745}{1000 \times 999}.$$

Замѣнивъ въ числителѣ 999 разностью $1000 - 1$, находимъ

$$f = \frac{32000 - 32 + 745}{100 \times 999} = \frac{32745 - 32}{99900},$$

откуда прямо слѣдуетъ извѣстное изъ ариѳметики правило.

Задача IV. *Часовая и минутная стрѣлки показываютъ полдень. Въ которомъ часу встрѣтятся онѣ снова?*

Примемъ за единицу времени часъ, а за 1 длины окружность циферблата. Черезъ часъ минутная стрѣлка возвратится къ цифрѣ XII, а часовая пройдетъ $\frac{1}{12}$ циферблата; слѣд. минутная стрѣлка должна пройти эту $\frac{1}{12}$ циферблата, но въ это время часовая, движущаяся въ 12 разъ медленнѣе минутной, пройдетъ $\frac{1}{12}$ отъ $\frac{1}{12}$ циферблата, или $\frac{1}{12^2}$ его. Слѣд. минутная стрѣлка должна пройти эту послѣднюю долю циферблата, но въ теченіе этого времени часовая пройдетъ еще $\frac{1}{12^3}$; и т. д. Итакъ, минутная стрѣлка, чтобы догнать часовую, должна отъ полудня пройти путь: $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \cdots$, представляющійся подъ видомъ безконечно-убывающей геом. прогрессіи, первый членъ которой $= 1$, а знаменатель $\frac{1}{12}$. Предѣлъ этой суммы есть $\frac{1}{1 - \frac{1}{12}}$, или $\frac{12}{11}$. Такъ какъ минутная стрѣлка единицу пути (циферблатъ) проходитъ въ 1 часъ, то $\frac{12}{11}$ этого пути пройдетъ въ 1 ч. $\times \frac{12}{11} = 1$ ч. 5 м. $27\frac{3}{11}$ с.

Задача V. *Соединяя средины сторонъ квадрата, получаютъ вписанный квадратъ; въ этотъ квадратъ, соединяя средины его сторонъ, вписываютъ новый квадратъ, и т. д. Предполагая, что эта операція продолжается неограниченное число разъ, найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ квадратовъ.*

Пусть сторона даннаго квадрата будетъ a; площади послѣдовательныхъ квадратовъ будутъ: a^2, $\frac{a^2}{2}$, $\frac{a^2}{4}$, $\frac{a^2}{8}$, . . . Сумма ихъ будетъ

$$S = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right).$$

Предѣлъ суммы прогрессіи въ скобкахъ $= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$; слѣд. $S = 2a^2$.

Задача VI. *Число 195 раздѣлить на 3 части, которыя составляли бы геометрическую прогрессію, которой третій членъ былъ бы больше перваго на 120.*

Пусть первый членъ будетъ x, а знаменатель прогрессіи q; имѣемъ два ур—нія

$$x + xq + xq^2 = 195, \quad xq^2 - x = 120,$$

которыя можно представить въ видѣ

$$x(1 + q + q^2) = 195, \quad x(q^2 - 1) = 120.$$

Раздѣливъ первое на второе, исключимъ x, и получимъ квадратное уравненіе $5q^2 - 8q - 21 = 0$, откуда: $q' = 3$, $q'' = -\frac{7}{5}$. Подставляя вмѣсто q въ ур. $x(q^2 - 1) = 120$ сперва 3, потомъ $-\frac{7}{5}$, найдемъ: $x' = 15$, $x'' = 125$. Искомыя рѣшенія будутъ:

$$\div\div 15 : 45 : 135; \quad \div\div 125 : -175 : +245.$$

ГЛАВА XLVII.

О рядахъ вообще; опредѣленія. Суммированіе конечныхъ рядовъ. — Суммированіе безконечныхъ рядовъ — О сходимости рядовъ — Перемноженіе рядовъ.

756. Опредѣленія. *Рядомъ* называется рядъ количествъ, изъ которыхъ каждое получается изъ предшествующаго по одному и тому же закону. Такъ, ариѳметическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждое количество составляется изъ предшествующаго приложеніемъ къ нему постояннаго количества. Геометрическая прогрессія есть рядъ, законъ котораго состоитъ въ томъ, что каждый членъ образуется изъ предшествующаго умноженіемъ на постоянное количество.

Количества, составляющія рядъ, называются *членами* ряда; ихъ обозначаютъ въ общемъ видѣ такъ: u_1, u_2, u_3. . . . . u_n . . . Членъ, которому предшествуетъ $n - 1$ членовъ, т.-е. n—ый членъ, u_n, называется *общимъ членомъ* ряда. Давая въ алгебраическомъ выраженіи общаго члена u_n буквѣ n значенія 1, 2, 3,. . . получимъ послѣдовательно всѣ члены ряда, начиная съ перваго.

Сумму n членовъ ряда обозначаютъ буквою S_n; т. е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Рядъ называется *конечнымъ*, если онъ состоитъ изъ конечнаго числа членовъ; и *безконечнымъ*, если число членовъ безконечно. Если сумма n членовъ ряда, по мѣрѣ приближенія n къ ∞, стремится къ опредѣленному конечному предѣлу S, то безконечный рядъ называется *сходящимся*, а S его *суммою;* если же сумма S_n, по мѣрѣ приближенія n къ ∞, сама приближается къ безконечности, то безконечный рядъ наз. *расходящимся*; само собою разумѣется, что о суммѣ такого ряда не можетъ быть и рѣчи. Можетъ, наконецъ, случиться, что по мѣрѣ приближенія n къ ∞, сумма ряда не возрастаетъ до ∞, но и не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу; такіе ряды называютъ *полусходящимися* или *колеблющимися*; ихъ причисляютъ къ расходящимся.

Такъ, мы видѣли, что безконечная геометрическая прогрессія, которой знаменатель есть положительная или отрицательная правильная дробь $(-1 < q < +1)$, имѣетъ конечную и опредѣленную сумму $\frac{a}{1-q}$; такая прогрессія представляетъ, поэтому, примѣръ *сходящагося* ряда. Если же знаменатель безк. геом. прогрессіи, по абсолютной величинѣ, больше 1, т.-е. если $q > +1$, или $q < -1$, то сумма прогрессіи будетъ равна $\pm\infty$, и сл. прогрессія представляетъ въ этомъ случаѣ рядъ *расходящійся.* При $q = +1$, прогрессія также есть рядъ расходящійся. Наконецъ, если $q = -1$, то прогрессія беретъ видъ

$$∷ a : -a : +a : -a : \ldots$$

Сумма ея въ этомъ случаѣ равна или 0, или a, смотря по тому, беремъ ли четное, или нечетное число членовъ; такъ что, по мѣрѣ приближенія n къ ∞, сумма членовъ не стремится ни къ какому опредѣленному предѣлу: однимъ словомъ, при $q = -1$, прогрессія есть рядъ *колеблющійся.*

Одинъ изъ важнѣйшихъ вопросовъ, представляющихся въ теоріи рядовъ, относится къ суммированію рядовъ. *Суммировать рядъ* значитъ найти сумму его членовъ, не вычисляя въ отдѣльности каждаго члена. Для рѣшенія этого вопроса не существуетъ общихъ правилъ, и самая задача возможна лишь въ исключительныхъ случаяхъ. Въ предшествующихъ главахъ мы имѣли примѣры суммированія членовъ ариѳметической и геометрической прогрессіи и одинаковыхъ степеней членовъ первой. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ.

757. Суммированіе конечныхъ рядовъ.—Когда рядъ разлагается на прогрессіи, то формулы суммы прогрессій и дадутъ возможность суммировать рядъ.

Примѣръ 1.—*Найти сумму n членовъ ряда*

$$6 + 66 + 666 + 6666 + 66666 + \ldots$$

1-й членъ $= 6 \times 1$

2-й „ $= 6 \times 10 + 6$

3-й „ $= 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$

4-й „ $6 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 6 \times 10 + 6$

. . . .

n-й членъ $= 6 \times 10^{n-1} + 6 \times 10^{n-2} + 6 \times 10^{n-3} + \ldots + 6 \times 10 + 6.$

Суммируя вертикальные столбцы, какъ геометрическія прогрессіи, находимъ

$$S = \frac{6(10^n - 1)}{10-1} + \frac{6(10^{n-1} - 1)}{10-1} + \frac{6(10^{n-2} - 1)}{10-1} + \ldots + \frac{6(10-1)}{10-1}$$

$$= \frac{6}{10-1}[10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} \ldots 10] - \frac{6n}{10-1}.$$

$$= \frac{60}{(10-1)^2} \cdot (10^n - 1) - \frac{6n}{10-1}.$$

Ряды геометрическіе.—Пусть даны числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ Вычтя каждое число изъ слѣдующаго за нимъ, получимъ числа

$$\beta - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \delta - \gamma,\ \varepsilon - \delta, \ldots$$

называемыя *первыми разностями* данныхъ чиселъ. Обозначая эти разности буквами β', γ', δ', . . . , вычтемъ каждое число изъ слѣдующаго за нимъ; найдемъ

$$\gamma' - \beta',\ \delta' - \gamma',\ \varepsilon' - \delta', \dots$$

Числа эти называются *вторыми разностями* данныхъ чиселъ α, β, γ, . . . Обозначая эти новыя разности буквами γ'', δ'', ε'', . . . составимъ *третьи разности:*

$$\delta'' - \gamma'',\ \varepsilon'' - \delta'', \dots$$

и т. д. Если первыя разности $\beta - \alpha$, $\gamma - \beta$, . . . *постоянны*, то говорятъ, что *числа* α, β, γ, . . . *образуютъ прогрессію перваго порядка:* таковы прогрессіи ариѳметическія. Если только вторыя разности дѣлаются постоянными, прогрессія называется—*второго порядка*. Вообще, *прогрессіей m-го порядка* называютъ рядъ чиселъ, которыхъ *m*-ыя разности постоянны.

Напр., числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 образуютъ прогрессію 3-го порядка, потому что третьи разности постоянны. Въ самомъ дѣлѣ:

Первыя разности суть . . . 3, 6, 10, 15, 21, 28;
вторыя разности 3, 4, 5, 6, 7;
третьи разности . . . . 1, 1, 1, 1.

Геометрическимъ рядомъ называютъ рядъ чиселъ, получаемыхъ отъ почленнаго перемноженія геометрической прогрессіи на прогрессію опредѣленнаго порядка.

Примѣръ II.—*Суммировать n членовъ ряда*

$$S = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \dots + na^{n-1} \dots (1)$$

Это есть рядъ геометрическій, полученный отъ почленнаго перемноженія геометрической прогрессіи 1, a, a^2, a^3, . . . на прогрессію 1-го порядка 1, 2, 3, 4, . . .

Помноживъ обѣ части равенства (1) на a, имѣемъ

$$aS = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + \dots + (n-1)a^{n-1} + na^n \dots (2)$$

Вычтя изъ (2) равенство (1), имѣемъ:

$$(a-1)S = -[1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{n-1}] + na^n,$$

или

$$(a-1)S = na^n - \frac{a^n - 1}{a-1},$$

откуда

$$S = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n - 1}{(a-1)^2} \dots (3)$$

Приложеніе.—Положивъ $a = -1$ въ предложенномъ рядѣ, имѣемъ

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \pm n.$$

Формула (3) прямо даетъ

$$S = \pm \frac{n}{2} + \frac{(1 \pm 1)}{4},$$

причемъ верхній знакъ относится къ случаю n нечетнаго, нижній къ случаю n четнаго.

Примѣръ III. *Суммировать рядъ* (n членовъ):

$$S = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \dots + \frac{n}{2}(n+1)a^{n-1}.$$

Умноживъ обѣ части на a и вычтя предложенный рядъ, имѣемъ

$$(a-1)S=\frac{n}{2}(n+1)a^n-[1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}]\ldots(1)$$

Положивъ $S'=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+na^{n-1}$, по предыдущему имѣемъ $S'=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. Замѣнивъ въ (1) S' его величиною, находимъ

$$(a-1)S=\frac{n}{2}(n+1)a^n-\frac{na^n}{a-1}+\frac{a^n-1}{(a-1)^2},$$

откуда

$$S=\frac{n(n+1)a^n}{2(a-1)}-\frac{2na^n}{2(a-1)^2}+\frac{2(a^n-1)}{2(a-1)^3}.$$

Приложеніе.—Положивъ $a=-1$, получимъ

$$S=1-3+6-10+15-\ldots\pm\frac{n}{2}(n+1),$$

и формула суммы дастъ для этого ряда

$$S=\frac{\pm n(n+1)}{4}\pm\frac{n}{4}+\frac{(1\pm1)}{8}.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что всегда можно найти сумму даннаго числа членовъ геометрическаго ряда порядка m, полагая, что знаменатель геометрической прогрессіи есть a'.

Если всѣ члены положительны, достаточно вычесть сумму S этого ряда изъ произведенія $a'.S$: остатокъ $(a'-1)S$ будетъ содержать новый геометрическій рядъ S порядка $m-1$. Вычтя эту сумму S' изъ произведенія $a'S'$, получимъ остатокъ $(a'-1)S'$, который будетъ содержать новый геометрическій рядъ S порядка $m-2$. Продолжаютъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока дойдутъ до геом. ряда, котораго разности постоянны, т.-е. до геометрической прогрессіи въ собственномъ смыслѣ, сумма которой извѣстна. Это даетъ возможность опредѣлить сумму S' ряда перваго порядка, а слѣд. сумму S' втораго порядка и, наконецъ, S.

Приводимъ еще примѣры суммированія нѣкоторыхъ рядовъ.

Примѣръ IV.—*Суммировать n членовъ ряда Лейбница*

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Замѣтивъ, что n-ый членъ м. б. представленъ въ видѣ

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

полагаемъ въ этомъ равенствѣ $n=1, 2, 3, \ldots, n$, такимъ образомъ всѣ члены разложимъ на разности, и дадимъ ряду видъ:

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Замѣчая, что второй членъ каждой разности уничтожается съ первымъ членомъ слѣдующей, найдемъ, что останутся только крайніе члены; а потому

$$S=1-\frac{1}{n+1}.$$

Примѣръ V. — *Найти сумму n членовъ ряда.*

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Попытаемся разложить общій членъ на 2 члена, употребляя для этого способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ; для этого полагаемъ тождество

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n(n+1)}-\frac{B}{(n+1)(n+2)},$$

въ которомъ A и B не зависятъ отъ n. Освободивъ отъ знаменателя, получаемъ тождество $1=(n+2)A+nB$, или

$$(A+B)n+(2A-1)=0,\quad \text{откуда: } A=\frac{1}{2} \text{ и } B=-\frac{1}{2}. \text{ Слѣд.}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $n=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$, представимъ каждый членъ въ формѣ разности и дадимъ ряду видъ:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right]+\cdots+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

откуда, какъ и предыдущемъ примѣрѣ, имѣемъ:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Примѣръ VI. — *Суммировать n членовъ*

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

Общій членъ $\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$. Полагая послѣдовательно $n=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n$, дадимъ первому члену видъ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right]$, второму видъ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]$, третьему видъ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]$, и т. д. Сумма ряда будетъ

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right].\end{aligned}$$

Члены, начиная съ $\frac{1}{3}$, до $\frac{1}{n}$, взаимно уничтожаются; такъ что

$$S=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right].$$

Примѣръ VII. — *Дана ариѳметическая прогрессія съ разностью r:*

$$\div\, a.b.c.d\,\ldots h.k.l.$$

1 *Найти сумму* $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\cdots\frac{1}{hk}+\frac{1}{kl}$, или $\Sigma\frac{1}{ab}$?

Имѣемъ

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{r}{ab}$$

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{c-b}{bc}=\frac{r}{bc}$$

. . . .

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{l}=\frac{l-k}{kl}=\frac{r}{kl}$$

Складывая эти равенства, находимъ: $\frac{1}{a}-\frac{1}{l}=r\Sigma\frac{1}{ab}$, откуда

$$\Sigma\frac{1}{ab}=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{l}\right].$$

Эта формула даетъ простое средство суммированія ряда примѣра IV, стоитъ только положить $a=1$, $r=1$, $l=n+1$, и тотчасъ находимъ

$$S=1-\frac{1}{n+1}.$$

2. *Найти сумму* $\frac{1}{abc}+\frac{1}{bcd}+\ldots+\frac{1}{hkl}$, или, короче, $\Sigma\frac{1}{abc}$?

Имѣемъ:

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}=\frac{bc-ba}{ab^2c}=\frac{2r}{abc}$$

$$\frac{1}{bc}-\frac{1}{cd}=\frac{cd-bc}{bc^2d}=\frac{2r}{bcd}$$

. . . .

$$\frac{1}{hk}-\frac{1}{kl}=\frac{kl-hk}{hk^2l}=\frac{2r}{hkl}.$$

Складывая, найдемъ: $\frac{1}{ab}-\frac{1}{kl}=2r\Sigma\frac{1}{abc}$, откуда

$$\Sigma\frac{1}{abc}=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{kl}\right).$$

По этой формулѣ легко суммировать рядъ примѣра V; положивъ $a=1$, $b=2$, $k=n+1$, $l=n+2$, тотчасъ имѣемъ:

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

Такимъ же образомъ получимъ

$$\Sigma\frac{1}{abcd}=\frac{1}{3r}\left[\frac{1}{abc}-\frac{1}{hkl}\right],\text{ и т. д.}$$

3. Можно вывести аналогичныя формулы для суммы произведеній послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи.

Называя a_0 членъ, предшествующій a, и l_0 — слѣдующіе за l, имѣемъ:

$b-a_0=2r$, откуда умножая на a: $ab-a_0a=2ra$
$c-a=2r$, „ „ „ b: $bc-ab=2rb$
$d-b=2r$, „ „ „ c: $cd-bc=2rc$
. . . .
$l_0-k=2r$, „ „ „ l: $ll_0-kl=2rl$.

Сложеніе даетъ: $ll_0 - aa_0 = 2rS$, откуда

$$S = \frac{ll_0 - aa_0}{2r}.$$

Такъ, взявъ рядъ натуральныхъ чиселъ: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, и положивъ $a_0 = 0$, $a = 1$, $l = n$, $l_0 = n + 1$, $r = 1$, получимъ

$$S = \frac{n(n+1) - 1.0}{2.1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Такимъ же образомъ:

$$\begin{aligned}
&c - a_0 = 3r; \text{ по умноженіи на } ab\text{: } abc - a_0ab = 3rab\\
&d - a = 3r, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; bc\text{: } bcd - abc = 3rbc\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&l_0 - h = 3r; \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; kl\text{: } kll_0 - hkl = 3r.kl.
\end{aligned}$$

Сложивъ, получимъ: $\Sigma ab = \frac{kll_0 - a_0ab}{3r}$.

Такъ, чтобъ суммировать

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1),$$

полагаемъ $a_0 = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $k = n$, $l = n + 1$, $l_0 = n + 2$, $r = 1$, и находимъ

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Такимъ же образомъ найдемъ: $\Sigma abc = \frac{hkll_0 - a_0abc}{4r}$, а отсюда

$$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

758. Суммированіе безконечныхъ рядовъ.—Если удастся сумму n первыхъ членовъ безконечнаго ряда представить въ видѣ функціи отъ n, то вопросъ о суммированіи ряда будетъ приведенъ къ вопросу о нахожденіи предѣла сказанной функціи при $n = \infty$.

Такъ, если взять безконечный рядъ

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

то, какъ указано въ примѣрѣ IV, сумма n первыхъ его членовъ равна $1 - \frac{1}{n+1}$; положивъ здѣсь $n = \infty$, находимъ въ результатѣ 1. Заключаемъ, что предѣлъ суммы членовъ даннаго ряда есть конечная величина 1. Отсюда видно, что данный рядъ есть *сходящійся*.

Но такой методъ суммированія безконечныхъ рядовъ примѣнимъ лишь въ рѣдкихъ случаяхъ: высшій анализъ показываетъ, что обыкновенно легче дать формулу суммы для всего безконечнаго ряда, чѣмъ для его первыхъ n членовъ. Но какъ скоро данъ безконечный рядъ и поставленъ вопросъ о его суммированіи, то предварительно долженъ быть разрѣшенъ вопросъ о томъ, существуетъ ли искомая сумма, чтобы не пришлось потратить время и трудъ на опредѣленіе такой величины, которая не м. б. опредѣлена, иначе говоря, нужно предварительно изслѣдовать — *сходящійся* данный рядъ, или *расходящійся*.

759. Условіе сходимости.—*Для того, чтобы рядъ былъ сходящимся, необходимо, чтобы члены его, начиная съ нѣкотораго мѣста, болѣе или менѣе удаленнаго отъ начала ряда, стремились къ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$ есть сходящійся, то онъ имѣетъ конечную сумму S. Въ такомъ случаѣ, назвавъ черезъ S_{n-1} и S_n суммы первыхъ $n-1$ и n членовъ, замѣчаемъ, что по мѣрѣ приближенія n къ ∞, обѣ суммы стремятся къ предѣлу S, т.-е.

$$\lim S_n = S, \qquad \lim S_{n-1} = S,$$

откуда, вычитая, находимъ: $\lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$; или, какъ разность предѣловъ равна предѣлу разности перемѣнныхъ, то $\lim (S_n - S_{n-1}) = 0$; но $S_n - S_{n-1} = u_n$, слѣд. въ сходящемся рядѣ

$$\lim (u_n) = 0.$$

Иначе: если въ ряду положительныхъ членовъ члены, хотя и уменьшаются, но не стремятся къ нулю, такой рядъ никогда не можетъ быть сходящимся. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ члены будутъ больше нѣкоторой конечной величины ε, то

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots > \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \dots$$

Вторая часть, содержа безконечное число конечныхъ слагаемыхъ, безконечно велика; тѣмъ болѣе, свойство это принадлежитъ лѣвой части, которая больше правой; слѣд. рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ расходится.

Итакъ *необходимое условіе сходимости ряда* состоитъ въ томъ, чтобы члены его неограниченно уменьшались, приближаясь къ нулю. Но одного этого условія, по крайней мѣрѣ, для рядовъ съ положительными членами, еще *недостаточно*. Въ самомъ дѣлѣ, есть такіе ряды, члены которыхъ хотя и приближается къ нулю, но сумма ряда не имѣетъ конечной величины. Это можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ.

1. Члены ряда $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ стремятся къ нулю, ибо при $n = \infty$, $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$. Не смотря на это, данный рядъ — расходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ сумму n членовъ его черезъ S_n, имѣемъ

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

т.-е. $S_n > n . \frac{1}{\sqrt{n}}$, или $S_n > \sqrt{n}$, откуда, при $n = \infty$, имѣемъ $\lim S_n = \infty$; значитъ, рядъ — расходящійся.

2. Для другого примѣра возьмемъ такъ называемый *гармоническій* рядъ, члены котораго суть обратныя величины чиселъ натуральнаго ряда.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

Члены его стремятся къ нулю, ибо $\lim \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$; и однако, это — рядъ *расходящійся*. Въ самомъ дѣлѣ, если взять n членовъ за n-мъ, то сумма $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ больше $\frac{1}{2n}$, взятой n разъ, т.-е. больше $\frac{1}{2}$. Слѣд. если сгруппировать члены ряда такъ:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) + \dots$$

то видно, что эта сумма больше

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

но послѣдняя сумма $= \infty$, слѣд. и гармонич. рядъ — безспорно расходящійся

Итакъ, одного приближенія членовъ къ нулю недостаточно для сходимости ряда. Отсюда—необходимость указанія признаковъ, по которымъ можно бы было отличать сходящіеся ряды отъ расходящихся. Укажемъ простѣйшіе изъ этихъ признаковъ, различая случаи: 1) рядовъ, члены которыхъ имѣютъ одинаковый знакъ; 2) рядовъ, у которыхъ знаки членовъ мѣняются.

Признаки сходимости знакопостоянныхъ рядовъ.

760. Теорема D'Аламбера.—I. *Если въ ряду положительныхъ членовъ*

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

съ возрастаніемъ n членъ u_n приближается къ нулю, а отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ къ предѣлу α, меньшему 1, то рядъ будетъ сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ правильную дробь q, которая заключалась бы между α и 1 ($\alpha < q < 1$). По условію, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ такому предѣлу α, который меньше q; но это возможно не иначе, какъ только тогда, когда съ нѣкотораго мѣста ряда отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ сдѣлается и будетъ оставаться $< q$. Значитъ, съ этого мѣста будутъ справедливы неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < q, \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} < q, \ldots$$

Умножая обѣ части каждаго неравенства на положительнаго знаменателя, мы этимъ не измѣнимъ смысла неравенствъ и найдемъ

$$u_{n+2} < q \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+3} < q \,.\, u_{n+2}; \quad u_{n+4} < q \,.\, u_{n+3}; \;\ldots$$

замѣняя во второмъ неравенствѣ u_{n+2} большею величиною qu_{n+1}, въ третьемъ u_{n+3} большимъ количествомъ $q^2 \,.\, u_{n+1}, \ldots$ мы не нарушимъ смысла неравенствъ, и найдемъ

$$u_{n+2} < q \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+3} < q^2 \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+4} < q^3 \,.\, u_{n+1}; \ldots$$

Сложивъ эти неравенства и прибавивъ къ обѣимъ частямъ u_{n+1}, имѣемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + \ldots < u_{n+1}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots).$$

Первая часть есть сумма ряда, слѣдующая за n-мъ членомъ и называемая *остаткомъ* ряда, обозначимъ ее чрезъ r_n, безконечный рядъ въ скобкахъ есть сумма членовъ безконечно-убывающей геометрич. прогрессіи (ибо $q < 1$), равная конечной величинѣ $\frac{1}{1-q}$: такимъ образомъ получаемъ

$$r_n < \frac{u_{n+1}}{1-q}.$$

Сумма S даннаго ряда состоитъ изъ $S_n + r_n$, гдѣ и S_n есть конечная величина, какъ сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ. Значитъ

$$S < S_n + \frac{u_{n+1}}{1-q},$$

т.-е. сумма даннаго ряда меньше конечной положительной величины, а потому сама есть величина конечная, а данный рядъ — сходящійся.

II. *Если въ ряду положительныхъ членовъ отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, съ возрастаніемъ n, приближается къ предѣлу $\alpha > 1$, то рядъ есть расходящійся.*

Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ между a и 1 нѣкоторую неправильную дробь q, т.-е. $a > q > 1$. По условію, отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ приближается къ такому предѣлу a, который больше q; но чтобы это было возможно, необходимо, чтобы съ нѣкотораго мѣста ряда сказанное отношеніе сдѣлалось и оставалось больше q. Съ этого мѣста, слѣд., возникнутъ отношенія, большія q, а потому будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > q; \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > q; \quad \frac{u_{n+4}}{u_{n+3}} > q, \ldots$$

Изъ нихъ имѣемъ

$$u_{n+2} > q \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+3} > q \,.\, u_{n+2}; \quad u_{n+4} > q \,.\, u_{n+3}; \ldots$$

а отсюда

$$u_{n+2} > q \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+3} > q^2 \,.\, u_{n+1}; \quad u_{n+4} > q^3 \,.\, u_{n+1}; \ldots$$

Складывая и придавая къ обѣимъ частямъ u_{n+1}, имѣемъ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots > u_{n+1}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

Обозначивъ сумму первыхъ n членовъ ряда чрезъ S_n, и придавъ къ обѣимъ частямъ это количество, получимъ

$$S_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots > S_n + u_{n+1}(1 + q + q^2 + \ldots).$$

Первая часть представляетъ сумму всего ряда; затѣмъ, $q > 1$, и слѣд. $1 + q + q^2 + \ldots = \infty$; неравенство означаетъ, такимъ образомъ, что данный рядъ — расходящійся.

Примѣняя эту теорему, должно составить отношеніе общаго члена къ предыдущему и найти предѣлъ этого отношенія при $n = \infty$. Если окажется, что этотъ предѣлъ < 1, заключаемъ, что данный рядъ есть сходящійся; если предѣлъ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n = \infty$ будетъ > 1, рядъ будетъ расходящійся. Если же окажется, что $\lim\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n=\infty} = 1$, наши теоремы ничего не рѣшаютъ относительно сходимости ряда, ибо нервъ доказательства — въ томъ, что съ опредѣленнаго мѣста отношеніе $u_{n+1} : u_n$ должно *оставаться* меньше или больше 1, это предположеніе уже не находитъ себѣ мѣста, когда сказанное отношеніе имѣетъ предѣломъ самую 1, и потому въ послѣднемъ случаѣ рядъ м. б. какъ сходящимся, такъ и расходящимся. Вопросъ рѣшается въ этомъ случаѣ другими признаками.

Во всякомъ случаѣ, если отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится къ 1, оставаясь съ нѣкотораго мѣста ряда постоянно *больше* 1-цы, то рядъ будетъ *расходящійся*. Въ самомъ дѣлѣ, члены ряда начнутъ, наконецъ, постоянно возрастать, и общій членъ не будетъ имѣть предѣломъ нуль.

761. Примѣры. 1. *Изслѣдовать въ отношеніи сходимости рядъ*

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} \cdots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

въ которомъ предполагается $x > 0$. Имѣемъ

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)};$$

слѣд. $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\frac{x}{n+1}$; но при всякомъ конечномъ x дробь $\frac{x}{n+1}$ обращается въ 0 при $n = \infty$. Заключаемъ, что рядъ сходится при всякомъ опредѣленномъ конечномъ x. Но не лишнее — прямо удостовѣриться въ сходимости ряда, ибо съ перваго взгляда можетъ показаться, что при нѣсколько значительной величинѣ x, напр., при $x = 10$, рядъ — какъ будто бы расходящійся, ибо имѣемъ: $1 + 10 + 50 + \frac{500}{3} + \ldots$ Но хотя вначалѣ члены ряда идутъ возрастая, все-таки позднѣе наступитъ сходимость, какъ въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ разсмотрѣніемъ. Въ § 340 мы имѣли:

$$\frac{x^k}{1.2.3\ldots k} < \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k.$$

Произвольное цѣлое положительное число k выберемъ такъ, чтобы $\sqrt{k} > x$, или $k > x^2$, и разложимъ рядъ на двѣ части:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)}$$

$$\frac{x^k}{1.2\ldots k} + \frac{x^{k+1}}{1.2\ldots(k+1)} + \frac{x^{k+2}}{1.2\ldots(k+2)} + \cdots$$

Первая часть есть конечный рядъ и имѣетъ конечную сумму, вторая часть меньше

$$\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k + \left(\frac{x}{\sqrt{k+1}}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{k+2}}\right)^{k+2} + \cdots$$

$$< \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+1} + \left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^{k+2} + \cdots$$

т. е. меньше суммы геометрич. прогрессіи, представляющей восходящія степени правильной дроби $\frac{x}{\sqrt{k}}$. Слѣд. данный рядъ съ мѣста $k > x^2$ сходится сильнѣе сходящейся геометрической прогрессіи, а слѣд. есть безспорно сходящійся рядъ.

II. Въ рядѣ

$$1 + 1.x + 1.2.x^2 + 1.2.3.x^3 + 1.2.3.4.x^4 + \ldots$$

имѣемъ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)x$. Предѣлъ этого произведенія, при $n = \infty$, безконеченъ при всякомъ значеніи x, отличномъ отъ нуля; если же $x = 0$, рядъ не существуетъ (ибо приводится къ 1). Слѣд. если рядъ существуетъ, то онъ всегда — расходящійся.

III. Въ рядѣ

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots$$

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

Даламберовой теоремою вопросъ о сходимости ряда не рѣшается, но если замѣтимъ, что члены даннаго ряда соотвѣтственно больше (начиная со 2-го) членовъ гармоническаго ряда, завѣдомо расходящагося, то расходимость даннаго ряда становится внѣ всякаго сомнѣнія.

IV. Въ рядѣ

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

гдѣ $x > 0$, $\frac{x^{n-1}}{n-1} : \frac{x^n}{n} = x \cdot \frac{n}{n-1} = x \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$; слѣд. предѣлъ этого отношенія при

$n = \infty$, равенъ x. Заключаемъ, что при $x > 1$ рядъ — расходящійся, при $x < 1$ — сходящійся; при $x = 1$ — сомнѣніе. Но, замѣтивъ, что въ послѣднемъ случаѣ рядъ обращается въ гармоническій, заключаемъ, что и при $x = 1$ онъ расходящійся.

762. Въ послѣднихъ двухъ примѣрахъ для рѣшенія вопроса о сходимости въ сомнительномъ случаѣ приходилось прибѣгать къ сравненію даннаго ряда съ другимъ, сходимость или расходимость котораго уже извѣстна.

При сравнени двухъ рядовъ, въ которыхъ члены положительны, можно пользоваться слѣдующею теоремою.

Пусть всѣ члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

положительны и идутъ, постепенно уменьшаясь, въ такомъ случаѣ, очевидно, имѣемъ соотношенія

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2u_2 &= 2u_2 \\ 4u_4 &< 2u_3 + 2u_4 \\ 8u_8 &< 2u_5 + 2u_6 + 2u_7 + 2u_8 \\ 16u_{16} &< 2u_9 + 2u_{10} + 2u_{11} + \ldots + 2u_{16} \end{aligned}$$

и т. д.

Складывая, имѣемъ

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots < 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots) - u_1 \ldots (1).$$

Если первоначальный рядъ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ сходится, то сумма его конечна, а слѣд. правая часть (1) есть также величина конечная; слѣд., лѣвая и подавно конечна, а потому производный рядъ $u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots$ сходится, если сходится первоначальный.

Раздѣливъ (1) на 2 и придавъ къ обѣимъ частямъ $\frac{1}{2}u_1$, дадимъ неравенству (1) видъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots < \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots)$$

Если производный рядъ расходится, то, какъ члены его положительны, сумма его будетъ $= \infty$, тѣмъ болѣе будетъ безконечна сумма первонач. ряда т.-е. если производный рядъ — расходящійся, то и начальный таковъ же,

Далѣе, очевидно, имѣютъ мѣсто неравенства

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2u_2 &> u_2 + u_3 \\ 4u_4 &> u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ 8u_8 &> u_8 + u_9 + u_{10} + \ldots + u_{15} \end{aligned}$$

и т. д.

откуда сложеніемъ находимъ:

$$u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots > u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

Изъ этого неравенства заключаемъ: 1) если начальный рядъ расходится, то тѣмъ болѣе расходится производный, и 2) если производный сходится, то сходится и начальный.

Результатомъ соединенія этихъ четырехъ предложеній является:

Теорема Коши. *Два безконечные ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \quad \text{и} \quad u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots$$

сходятся или расходятся одновременно.

Такимъ образомъ о сходимости или расходимости начальнаго ряда можно судить по сходимости или расходимости производнаго.

763. Однимъ изъ замѣчательныхъ приложеній этой теоремы является изслѣдованіе сходимости ряда

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\frac{1}{(n+1)^k}+\ldots$$

Въ данномъ случаѣ, отношеніе $u_{n+1} : u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k$; предѣлъ его, при $n = \infty$, есть 1: сомнѣніе относительно сходимости ряда. Производный рядъ будетъ:

$$u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\ldots=1+2^{1-k}+4^{1-k}+8^{1-k}+16^{1-k}+\ldots$$
$$=1+2^{1-k}+(2^{1-k})^2+(2^{1-k})^3+\ldots$$

Но это есть геометрическая прогрессія съ знаменателемъ 2^{1-k}: для сходимости ея необходимо, чтобы знаменатель былъ <1, т.-е. чтобы 2^{1-k} или $\frac{2^1}{2^k}<1$, т.-е. $k>1$; во всѣхъ друг. случаяхъ прогрессія расходится. По теоремѣ Коши, и данный рядъ будетъ сходящимся при $k>1$, и расходящимся при $k<1$. Отсюда, напр., прямо видно, что изъ четырехъ рядовъ:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\quad(1)\qquad\frac{1}{1\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots\quad(2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\quad(3)\qquad\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\quad(4)$$

два первые — сходящіеся, послѣдніе два — расходящіеся, между тѣмъ какъ для всѣхъ $\lim(u_{n+1} : u_n)=1$.

Сомнѣніе, оставляемое теоремою д'Аламбера, можно иногда разрѣшать при помощи слѣдующей теоремы.

764. Теорема Дюгамеля. *Рядъ* $S = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ *члены котораго постепенно уменьшаются, будетъ сходящійся, если рядъ* $S' = v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots$ *сходящійся, и, начиная съ нѣкотораго члена, отношеніе* $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Наоборотъ, первый рядъ будетъ расходящійся, если второй расходится, и отношеніе $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ S' сходится, то изъ неравенства $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$ находимъ

$$u_{n+1}<v_{n+1}\frac{u_n}{v_n}\quad\text{и}\quad\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n},$$

отсюда

$$u_{n+2}<v_{n+2}\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}},\quad u_{n+3}<v_{n+3}\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}},\ldots$$

и

$$\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}<\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}<\frac{u_n}{v_n},\quad\frac{u_{n+3}}{v_{n+3}}<\frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}<\frac{u_n}{v_n},\ldots$$

Слѣдовательно

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots<\frac{u_n}{v_n}(v_{n+1}+v_{n+2}+v_{n+3}+\ldots)$$

а это значитъ, что остатокъ R_n перваго ряда меньше произведенія остатка R'_n второго на $\frac{u_n}{v_n}$. Если рядъ S сходящійся, то R'_n стремится къ нулю, а потому изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что и R_n стремится къ нулю, и что слѣд. рядъ S — сходящійся.

Если рядъ S' расходящійся, то условіе $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ поведетъ къ неравенствамъ, отличающимся отъ вышенаписанныхъ смысломъ; такимъ образомъ, найдемъ, что $R_n > R'_n \cdot \frac{u_n}{v_n}$. Но если S' — рядъ расходящійся, то остатокъ R'_n не стремится къ нулю, а потому и R_n не стремится къ нулю, слѣд. S есть строка расходящаяся. Напр., для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 . 3}{2 . 4} + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} + \dots + \frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-1)}{2 . 4 . 6 \dots 2n} + \dots$$

найдемъ, что $u_{n+1} : u_n = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}$, и слѣд. при $n = \infty$ даетъ 1. Но сравнивая этотъ рядъ съ гармоническимъ, завѣдомо расходящимся, для котораго отношеніе соотвѣтствующихъ членовъ есть $\frac{n+1}{n+2}$, находимъ: $\frac{2n+1}{2n+2} > \frac{n+1}{n+2}$, а потому заключаемъ, что взятый рядъ — расходящійся.

Ряды знакоперемѣнные.

765. Теорема. *Когда знаки членовъ чередуются* (+, —, +, —, . . .), *то рядъ будетъ сходящійся, если съ нѣкотораго мѣста члены его неопредѣленно уменьшаются, приближаясь къ нулю, т.-е. если* $\lim u_n = 0$ *при* $n = \infty$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть съ опредѣленнаго мѣста $n = k$, каждый членъ больше слѣдующаго за нимъ, т.-е.

$$u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > u_{k+3} \dots$$

и кромѣ того $\lim u_n = 0$. Обозначимъ буквами R_1, R_2, R_3, . . . величины:

$$R_1 = u_k$$
$$R_3 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2})$$
$$R_5 = u_k - (u_{k+1} - u_{k+2}) - (u_{k+3} - u_{k+4}).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Замѣчая, что всѣ разности въ скобкахъ положительны, имѣемъ

$$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 \dots (1)$$

Съ другой стороны, положивъ

$$R_2 = (u_k - u_{k+1})$$
$$R_4 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3})$$
$$R_6 = (u_k - u_{k+1}) + (u_{k+2} - u_{k+3}) + (u_{k+4} - u_{k+5})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

имѣемъ:

$$R_2 < R_4 < R_6 < R_8 \dots (2)$$

Наконецъ, для неопредѣленно возрастающаго m

$$\lim (R_{2m-1} - R_{2m}) = \lim u_{k+2m-1} = 0 \dots (3)$$

Итакъ, если съ мѣста k (съ котораго члены идутъ убывая) брать суммы нечетнаго числа членовъ, и суммы четнаго числа членовъ, то изъ (3) прямо слѣдуетъ, что эти суммы, R_{2m-1} и R_{2m}, приближаются къ нѣкоторому общему предѣлу R; причемъ суммы R_{2m-1} приближаются къ нему, постепенно уменьшаясь, суммы R_{2m} постепенно увеличиваясь. Затѣмъ, общій ихъ предѣлъ R, во-первыхъ, положителенъ, какъ непосредственно ясно изъ неравенствъ (2), а во-вторыхъ, будучи, въ силу неравенства (3), меньше каждой изъ величинъ R_1, R_3, R_5, . . . , онъ представляетъ опредѣленную конечную величину. Вслѣдствіе уравненія $R = \lim R_{2m-1} = \lim R_{2m}$:

$$R = u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots,$$

а слѣд. при данныхъ условіяхъ рядъ $u_k - u_{k+1} + \dots$ сходящійся, а потому сходится и первоначальный рядъ

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^{k-1} u_{k-1} + (-1)^k (u_k - u_{k+1} + u_{k+2} - u_{k+3} + \dots),$$

и теорема доказана.

Такъ, напр., рядъ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$ сходящійся, а сумма его содержится между слѣдующими, болѣе и болѣе сближающимися числами

$$1 \text{ и } 1 - \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ и } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ и } 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

и т. д.

766. Теорема. *Для сходимости ряда, въ которомъ знаки членовъ измѣняются по какому угодно закону, достаточно, чтобы рядъ оставался сходящимся по перемѣнѣ всѣхъ знаковъ на +.*

Въ самомъ дѣлѣ, абсолютная величина суммы втораго ряда, очевидно, больше, нежели перваго, такъ какъ во второмъ всѣ члены положительны, а въ данномъ нѣкоторые изъ этихъ членовъ отрицательны. Но, по условію, сумма втораго ряда конечна, слѣд. и сумма даннаго конечна, т. е. данный рядъ — сходящійся,

Слѣд. о сходимости даннаго ряда можно судить, примѣняя къ произвольному ряду вышенайденные признаки сходимости для рядовъ съ положительными членами.

767. Условная и безусловная сходимость. Нерѣдко приходится встрѣчаться съ такого рода мнѣніемъ, что предложеніе, имѣющее силу для *всякаго* конечнаго числа величинъ, должно оставаться вѣрнымъ и въ томъ случаѣ, когда число величинъ дѣлается безконечнымъ. Первый, доказательно убѣдившій въ несостоятельности такого принципа, былъ *Лежень-Дирикле* (въ 1837 г.). Онъ показалъ, что предложеніе о неизмѣняемости суммы отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ, вообще, невѣрно для безконечнаго числа слагаемыхъ. Примѣръ его былъ слѣдующій. Возьмемъ рядъ

$$\sigma = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad (I)$$

и сгруппируемъ его члены по четыре.

$$\sigma = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \dots$$

гдѣ общая группа есть n-ая. Такимъ образомъ сумма σ равна суммѣ значеній, принимаемыхъ n-ою группою, если въ ней давать n всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до ∞, т.-е.

$$\sigma = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) \ldots (\alpha)$$

Затѣмъ, въ суммѣ (1) переставимъ члены такъ, чтобы за двумя положительными слѣдовалъ отрицательный; получимъ рядъ

$$s = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots (2)$$

и сгруппируемъ его члены по три:

$$s = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \ldots$$

гдѣ общая группа есть n-ая. Сумму s можно сокращенно представить въ видѣ

$$s = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) \ldots (\beta)$$

Наконецъ, сгруппировавъ члены ряда (1) по два, не измѣняя ихъ порядка, получимъ

$$\sigma = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \ldots$$

гдѣ общая группа есть n-ая. Эту сумму можно представить въ видѣ

$$\sigma = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Вычитаніе даетъ:

$$\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Если въ этомъ тождествѣ положить послѣдовательно $n = 1, 2, 3 \ldots n$, сложить результаты и перейти къ предѣлу $n = \infty$, то получится

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \sum_1^\infty \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

или $s - \sigma = \frac{1}{2}\sigma$, откуда $s = \frac{3}{2}\sigma$, т.-е. *суммы* σ и s *различны*.

Отсюда вытекаетъ необходимость различать два рода сходящихся рядовъ: ряды *условно-сходящіеся*, когда сумма ихъ зависитъ отъ порядка членовъ, и *безусловно-сходящіеся*, если сумма остается всегда одинаковою, какъ ни переставлять члены. А отсюда задача объ опредѣленіи признаковъ безусловной сходимости.

Пусть будетъ U_n сумма нѣкотораго n-членнаго ряда:

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \ldots (1)$$

и пусть предѣлъ U_n при $n = \infty$ будетъ опредѣленная конечная величина U, слѣд.

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots (2)$$

т.-е. имѣется рядъ сходящійся. Узнать, будетъ ли новый безконечный рядъ

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots (3)$$

отличающійся отъ перваго только перестановкою членовъ, имѣть ту же сумму U? Возьмемъ въ новомъ ряду p первыхъ членовъ и положимъ

$$V_p = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{p-1} \dots (4)$$

Можно взять p настолько большимъ, чтобы всѣ n членовъ суммы U_n содержались въ суммѣ V_p. Кромѣ того, пусть въ V_p будетъ еще $p - n$ членовъ, совокупность которыхъ

$$u_q + u_r + u_s + \dots$$

будетъ имѣть индексы q, r, s, ... больше $n - 1$. Поэтому

$$V_p - U_n = u_q + u_r + u_s + \dots$$

а слѣд., при неограниченномъ возрастаніи n и p

$$\lim V_p - U = \lim (u_q + u_r + u_s + \dots).$$

Чтобы рядъ $v_0 + v_1 + v_2 + \dots$ имѣлъ сумму U, должно быть: $\lim V_p = U$, а слѣд. должно быть

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \dots) = 0 \dots (5)$$

Это и есть признакъ безусловной сходимости ряда (2).

Можно найти другую форму такимъ путемъ. Если рядъ (2) съ опредѣленнаго мѣста содержитъ только положительные члены, то можно n взять настолько большимъ, чтобы въ ур—нии

$$U - U_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

справа находящіеся члены всѣ были положительны; сумма $u_n + u_{n+1} + \dots$ есть такъ называемый *остатокъ* ряда и имѣетъ предѣломъ нуль, ибо при $n = \infty$ лѣвая часть обращается въ $U - \lim U_n$ т.-е. въ нуль.

Далѣе, что касается суммы $u_q + u_r + \dots$, число членовъ которой $= p - n$, а каждый индексъ $> n - 1$, то какъ всѣ члены положительны, имѣемъ

$$0 < u_q + u_r + u_s + \dots < u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

слѣд. при n и p приближающихся къ ∞:

$$\lim (u_q + u_r + u_s + \dots) = 0;$$

слѣд. при взятомъ предположеніи рядъ сходится безусловно.

Когда первоначальный рядъ содержитъ члены, частію положительные, частію отрицательные, и нѣтъ такого мѣста, начиная съ котораго шли бы члены одинаковаго знака, къ такому ряду приведенныя заключенія неприложимы, и сходимость въ этомъ случаѣ возможна только условная.

Но въ частномъ предположеніи, что рядъ остается сходящимся, если вмѣсто его членовъ взять ихъ абсолютныя значенія, можно далѣе вести изслѣдованіе. Означая абсолютныя величины членовъ скобками, пусть рядъ

$$[u_0] + [u_1] +]u_2] + \dots$$

будетъ сходящійся. По предыдущему

$$\lim \{ [u_q] + [u_r] + [u_s] + \dots \} = 0,$$

т. е. абсолютное значеніе суммы $u_q + u_r + \ldots$ м. б. сдѣлано какъ угодно малымъ. Отсюда же прямо слѣдуетъ, что $u_q + u_r \ldots$ также имѣетъ предѣломъ нуль, а слѣд. рядъ безусловно сходится. Отсюда

768. Теорема Шейбнера. — *Безконечный рядъ сходится безусловно, если сохраняетъ сходимость и тогда, когда всѣ члены его замѣнимъ ихъ абсолютными значеніями.*

Этимъ объясняется, почему рядъ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ оказался лишь условно сходящимся; въ самомъ дѣлѣ, рядъ изъ абсолютныхъ значеній его членовъ—расходящійся.

769. Перемноженіе рядовъ.—Теорема.—*Если имѣемъ два сходящіеся ряда*

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \quad V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

знакопостоянные, или знакоперемѣнные, но въ послѣднемъ случаѣ такіе, что оба, или, по крайней мѣрѣ, одинъ, напр. U, остается сходящимся послѣ замѣны — на +; то доказать, что произведеніе UV выражается безконечнымъ рядомъ

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots$$

члены котораго составляются по слѣдующему закону:

$$w_1 = u_1 v_1$$
$$w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1$$
$$w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\textit{вообще} \quad w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1$$

т.-е. что n-ый членъ произведенія равенъ суммѣ произведеній первыхъ n членовъ ряда U на первые n членовъ ряда V, взятыхъ въ обратномъ порядкѣ.

Доказать, что UV выражается безконечнымъ рядомъ $w_1 + w_2 + \ldots$ значитъ доказать, что UV есть предѣлъ, къ которому приближается сумма n членовъ:

$$W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n$$

при неограниченномъ возрастаніи n. Для этого составимъ разность между суммою W_n и произведеніемъ двухъ суммъ

$$U_p = u_1 + u_2 + \ldots + u_p \quad \text{и} \quad V_q = v_1 + v_2 + \ldots + v_q,$$

гдѣ $p + q = n$, причемъ если n четное, то $p = q = \frac{n}{2}$, а при n нечетномъ $p = \frac{n-1}{2}$, $q = \frac{n+1}{2}$. Всѣ члены произведенія $U_p V_q$ содержатся въ суммѣ W_n, ибо въ произведеніи $U_p V_q$ индексы при u и v не больше p и q. Вынеся въ W_n за скобки $u_1, u_2, \ldots u_n$, можемъ эту сумму представить въ видѣ

$$\begin{aligned} W_n = u_1(v_1 &+ v_2 + \ldots + v_q + v_{q+1} + \ldots + v_n) \\ &+ u_2(v_1 + v_2 + \ldots + v_q + v_{q+1} + \ldots + v_{n-1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ u_p(v_1 + v_2 + \ldots + v_q + v_{q+1}) \\ &+ u_{p+1}(v_1 + v_2 + \ldots + v_q) + \ldots + u_n v_1. \end{aligned}$$

Составивъ произведеніе $U_p V_q$ и вынеся также за скобки $u_1, u_2 \ldots$ имѣемъ:

$$\begin{aligned} U_p V_q = u_1(v_1 + v_2 + \ldots + v_q) + u_2(v_1 + v_2 + \ldots + v_q) + \ldots \\ \ldots + u_p(v_1 + v_2 + \ldots v_q). \end{aligned}$$

Вычтя это произведеніе изъ W_n, находимъ:

$$W_n - U_pV_q = u_1(v_{q+1} + \dots + v_n) + u_2(v_{q+1} + \dots + v_{n-1}) + \dots + u_p v_{q+1}$$
$$+ u_{p+1}(v_1 + v_2 + \dots + v_q) + u_{p+2}(v_1 + v_2 + \dots + v_{q-1}) + \dots + u_n v_1$$

При увеличеніи n до безконечности, неограниченно возрастаютъ и p и q. Такъ какъ рядъ V сходящійся, то его общій членъ v_{q+1} и суммы $v_{q+1} + \dots + v_n$, $v_{q+1} + \dots + v_{n-1}, \dots$ стремятся къ нулю; а суммы первыхъ членовъ $v_1 + v_2 + \dots + v_p, \dots, v_1$ будутъ конечны. Подставивъ вмѣсто первыхъ суммъ положительную безконечно малую величину α, большую каждой изъ нихъ, а вторыя суммы замѣнивъ положительною величиною A, также большею каждой изъ нихъ, найдемъ, что вторая часть послѣдняго равенства будетъ меньше

$$\alpha(u_1 + u_2 + \dots + u_p) + A(u_{p+1} + \dots + u_n)$$

Но рядъ U сходящійся и, по условію, не теряетъ сходимости и послѣ замѣны его членовъ ихъ абсолютными значеніями, то сумма $u_1 + u_2 + \dots + u_p$, будучи меньше суммы абсолютныхъ значеній своихъ членовъ, будетъ меньше нѣкотораго конечнаго положительнаго количества B, а остатокъ этого ряда $u_{p+1} + \dots + u_n$ сдѣлается менѣе нѣкоторой положит. безконечно малой β. Итакъ, при достаточно большомъ n будетъ

$$W_n - U_pV_q < B\alpha + A\beta,$$

т.-е. наша разность м. б. сдѣлана какъ угодно малою; а потому въ предѣлѣ, при $n = \infty$, $\lim (W_n - U_pV_q) = 0$, или $W = UV$.

ГЛАВА XLVIII.

Распространеніе формулы бинома Ньютона для всякаго дѣйствительнаго показателя.—Остатокъ биноміальнаго ряда.—Приложенія.

770. Формула возвышенія бинома въ степень, доказанная для показателя цѣлаго положительнаго, можетъ быть распространена на каковъ угодно показатель. Замѣтивъ, что $(a + b)^m$ достаточно разсматривать только при неравныхъ a и b, потому что при $a = b$ эта степень приводится къ одночлену $2^m a^m$, преобразуемъ ее вынесеніемъ a за скобки въ биномѣ $a + b$; какъ показано въ § 714, найдемъ: $(a + b)^m = a^m(1 + x)^m$, полагая $\frac{b}{a} = x$. Вопросъ приводится такимъ образомъ къ разложенію $(1 + x)^m$.

Когда показатель m—число цѣлое и положительное, мы имѣли при всякомъ x конечный рядъ

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}x^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k}x^k + \dots + x^m,$$

содержащій $m + 1$ членовъ. Коэффиціенты при степеняхъ x представляютъ числа сочетаній изъ m элементовъ по 1, по 2, . . . , по k, ... Условившись обозначать эти числа буквою m съ индексами 1, 2, 3, . . . , т.-е.

$$\frac{m}{1} = (m)_1;\quad \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} = (m)_2;\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = (m)_3,\ \text{вообще}$$

$$\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k} = (m)_k \dots (1)$$

можемъ короче написать разложенie въ формѣ:

$$(1+x)^m = 1 + (m)_1x + (m)_2x^2 + (m)_3x^3 + \ldots + (m)_kx^k + \ldots + (m)_mx^m \ldots (2).$$

Спрашивается: если m не есть цѣлое положительное число то можно ли представить $(1+x)^m$ въ видѣ ряда, расположеннаго по восходящимъ степенямъ буквы x, съ коэффицiентами закона, выражаемаго формулою (1)?

Здѣсь прежде всего замѣчаемъ, что коэффицiентъ

$$(m)_k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} \ldots$$

при m цѣломъ положительномъ можетъ обратиться въ нуль, вслѣдствie чего рядъ (2) будетъ законченный. Но если m — число отрицательное или дробное, то число членовъ ряда будетъ безконечно. Дѣйствительно, при m отрицательномъ множители m, $m-1$, $m-2$, ... числителя выраженiя $(m)_k$ будутъ идти увеличиваясь по абсолютной величинѣ, и потому ни одинъ коэффицiентъ ряда не можетъ сдѣлаться нулемъ. Когда m — дробь, то и всѣ множители $m-1$, $m-2$, ... будутъ дроби, и не могутъ обратиться въ нуль, рядъ биномiальныхъ коэффицiентовъ будетъ безконеченъ. Слѣд., если только возможно разложенie въ рядъ закона (2) бинома $(1+x)^m$, гдѣ m не есть цѣлое положительное число, то такой рядъ долженъ быть безконечный. Это замѣчанie заставляетъ формулировать нашу задачу окончательно такъ: безконечный рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ буквы x, съ коэффицiентами закона (1), при m не цѣломъ и положительномъ, т.-е. рядъ

$$1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots + m_kx^k + \ldots (3)$$

можетъ ли представлять разложенie степени бинома $(1+x)^m$? Для рѣшенiя вопроса нужно найти *сумму* этого ряда; если окажется, что эта сумма $=(1+x)^m$, вопросъ будетъ рѣшенъ въ утвердительномъ смыслѣ; если окажется, что сумма не равна $(1+x)^m$,—въ отрицательномъ смыслѣ. Но о суммированiи безконечнаго ряда рѣчь можетъ быть только тогда, когда мы напередъ знаемъ, что это рядъ сходящiйся; поэтому прежде всего необходимо опредѣлить, при какихъ условiяхъ рядъ (3) будетъ сходящимся. Но изъ предыдущаго мы знаемъ, что (3) будетъ безусловно сходящимся рядомъ, если сходится рядъ, составленный изъ абсолютныхъ значенiй его членовъ. Итакъ, нужно взять предѣлъ отношенiя $m_{n+1}x^{n+1}$: m_nx^n при $n = \infty$. Имѣемъ:

$$\lim\left\{m_{n+1}x^{n+1} : m_nx^n\right\} = \lim\frac{m-n}{n+1}\cdot x = \lim\left\{-x + \frac{m+1}{n+1}x\right\}.$$

При $n = \infty$, при всѣхъ конечныхъ значенiяхъ m и x, второй членъ обращается въ нуль, и слѣд.

$$\lim\left\{m_{n+1}x^{n+1} : m_nx^n\right\} = -x.$$

Заключаемъ, что рядъ будетъ сходящимся, когда абсолютная величина $-x$ будетъ <1, т.-е. когда $-1 < x < +1$, или, короче, когда $x^2 < 1$. если же абсолютная величина количества $(-x)$ будетъ >1, рядъ — расходящiйся. При $x = \pm 1$ — сомнѣнie; рѣшенiя вопроса въ этомъ случаѣ мы касаться не будемъ, въ виду его сложности. Итакъ, полагая $-1 < x < +1$, найдемъ сумму ряда (3) Обозначивъ эту сумму чрезъ S_m, гдѣ значекъ m показываетъ, что эта сумма зависитъ отъ m, имѣемъ

$$S_m = 1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots$$

Перемѣнивъ m на другое дѣйствительное количество p, получимъ:

$$S_p = 1 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \ldots$$

Такъ какъ оба эти ряда сходятся безусловно при $x^2 < 1$, то можно приложить къ нимъ теорему о перемноженіи рядовъ; найдемъ:

$$S_m \cdot S_p = 1 + (m_1 + p_1)x + (m_2 + m_1 p_1 + p_2)x^2 + \ldots + (m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \ldots$$
$$\ldots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n)x^n + \ldots (4).$$

Докажемъ, что коэффиценты его составлены изъ $m + p$ по такому же закону, какъ коэффиценты рядовъ S_m и S_p составлены изъ m и p. Во-первыхъ, такъ какъ $m_1 = m$ и $p_1 = p$, то $m_1 + p_1 = m + p$. Затѣмъ:

$$m_2 + m_1 p_1 + p_2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + mp + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} = \frac{m(m-1)+mp}{1\,.\,2} + \frac{mp+p(p-1)}{1\,.\,2} =$$
$$= \frac{m(m+p-1)+p(m+p-1)}{1\,.\,2} = \frac{(m+p)(m+p-1)}{1\,.\,2},$$

а это есть ничто иное какъ $(m+p)_2$.

Чтобы доказать, что

$$m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \ldots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n = (m+p)_n \ldots (5)$$

допустимъ, что равенство (5) вѣрно, и докажемъ, что слѣдующій коэффицентъ есть $(m+p)_{n+1}$. Но этотъ слѣдующій коэффицентъ есть

$$m_{n+1} + m_n p_1 + m_{n-1}p_2 + \ldots + m_2 p_{n-1} + m_1 p_n + p_{n+1}$$

Чтобы онъ былъ равенъ $(m+p)_{n+1}$, нужно, чтобы онъ представлялъ произведеніе предыдущаго коэффицента, по допущенію, равнаго $(m+p)_n$, на $\frac{m+p-n}{n+1}$. Составляемъ это произведеніе:

$$(m_n + m_{n-1}p_1 + m_{n-2}p_2 + \ldots + m_2 p_{n-2} + m_1 p_{n-1} + p_n) \cdot \frac{m+p-n}{n+1} \ldots (6)$$

Члены этого произведенія имѣютъ видъ $m_h p_{n-h} \cdot \frac{m+p-n}{n+1}$, а это выраженіе можно представить въ формѣ

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m-h}{n+1} + m_h p_{n-h} \cdot \frac{p+h-n}{n+1};$$

но $m_h \cdot \frac{m-h}{h+1} = m_{h+1}$; это равенство можно представить въ видѣ

$$m_h(m-h) = m_{h+1}(h+1);$$

а на основаніи этого равенства имѣемъ

$$p_{n-h}(p+h-n) = p_{n-h+1}(n-h+1).$$

Слѣд.

$$m_h p_{n-h} \cdot \frac{m+p-n}{n+1} = m_h p_{n-h-1} \cdot \frac{n-h+1}{n+1} + m_{h+1} p_{n-h} \cdot \frac{h+1}{n+1}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $h = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, получимъ всѣ члены произведенія (6).

$$p_{n+1} + m_1 p_n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$+ \; m_1 p_n \cdot \frac{n}{n+1} + m_2 p_{n-1} \cdot \frac{2}{n+1}$$

$$+ m_2 p_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n+1} + m_3 p_{n-2} \cdot \frac{3}{n+1}$$

$$+ m_3 p_{n-2} \cdot \frac{n-2}{n+1} + \cdot \cdot \quad \cdot \cdot$$

$$+ \cdot \quad \cdot \cdot \quad \cdot \cdot + m_{n-2} p_3 \cdot \frac{n-2}{n+1}$$

$$+ m_{n-2} p_3 \cdot \frac{3}{n+1} + m_{n-1} p_2 \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

$$+ m_{n-1} p_2 \cdot \frac{2}{n+1} + m_n p_1 \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$+ m_n p_1 \cdot \frac{1}{n+1} + m_{n+1} \cdot$$

Суммируя по діагоналямъ, имѣемъ:

$$p_{n+1} + m_1 p_n + m_2 p_{n-1} + \cdot \cdot \cdot + m_{n-1} p_2 + m_n p_1 + m_{n+1};$$

а это есть не что иное, какъ $(m+p)_{n+1}$.

Итакъ, допустивъ, что коэффиціентъ при x^n есть $(m+p)_n$, мы доказали, что слѣдующій коэффиціентъ есть $(m+p)_{n+1}$. Но непосредственнымъ вычисленіемъ мы убѣдились, что третій коэффиціентъ $=(m+p)_2$; сл., по доказанному, четвертый $=(m+p)_3$, пятый $(m+p)_4$ и т. д. Такимъ образомъ, ур—ніе (4) принимаетъ видъ

$$S_m . S_p = 1 + (m+p)_1 x + (m+p)_2 x^2 + (m+p)_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot + (m+p)_n x^n + \cdot \cdot \cdot$$

то-есть

$$S_m . S_p = 1 + \frac{m+p}{1} . x + \frac{(m+p)(m+p-1)}{1 . 2} x^2 + \frac{(m+p)(m+p-1)(m+p-2)}{1 . 2 . 3} . x^3 + \cdot \cdot \cdot$$

Вторая часть представляетъ рядъ, составленный по тому же закону, какъ ряды S_m и S_p, съ тою разницею, что вмѣсто m или p находятся $m+p$; сл. рядъ этотъ мы можемъ обозначить тѣмъ же знакомъ S, но съ указателемъ $m+p$. Слѣд.

$$S_m . S_p = S_{m+p} \quad . \; . \; . \; (7).$$

Положивъ $m=p$, имѣемъ:

$$S_m . S_m = S_{2m}, \quad \text{или} \quad [S_m]^2 = S_{2m}.$$

Помноживъ обѣ части на S_m и примѣнивъ къ произведенію $S_{2m} . S_m$ формулу (7), имѣемъ

$$[S_m]^3 = S_{3m}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, получимъ для какого угодно цѣлаго числа k:

$$[S_m]^k = S_{km}.$$

Если теперь m есть положительная дробь $\frac{q}{r}$, гдѣ q и r — цѣлыя положительныя числа, то мы можемъ произвольное цѣлое k взять равнымъ знаменателю r, и получимъ

$$\left[S_{\frac{q}{r}}\right]^r = S_q.$$

Такъ какъ q есть цѣлое положительное число, то S_q представляетъ, какъ извѣстно, конечный рядъ, сумма котораго равна $(1+x)^q$; слѣд.

$$\left[S_{\frac{q}{r}}\right]^r = (1+x)^q;$$

извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка r, имѣемъ

$$S_{\frac{q}{r}} = (1+x)^{\frac{q}{r}};$$

этимъ и доказано, что $(1+x)^{\frac{q}{r}}$ разлагается въ безконечный рядъ того же закона, какъ и при цѣломъ показателѣ.

Если въ равенствѣ (7) положимъ, что m есть число отрицательное, цѣлое или дробное, и что $p = -m$, то равенство это дастъ

$$S_m \,.\, S_{-m} = S_{m-m} = S_0.$$

Но $S_0 = 1$: слѣд. и $S_m \,.\, S_{-m} = 1$, откуда

$$S_m = \frac{1}{S_{-m}}.$$

Здѣсь $-m > 0$, а для этого случая доказано, что $S_{-m} = (1+x)^{-m}$; сл.

$$S_m = \frac{1}{(1+x)^{-m}} = (1+x)^m:$$

этимъ формула бинома доказана для отрицательнаго показателя.

Итакъ, мы доказали справедливость формулы для всякаго соизмѣримаго показателя. Чтобы распространить это ур. на несоизмѣримое m*, пусть будетъ μ — соизмѣримое число, безконечно къ нему близкое, и α безконечно-малая разность $m - \mu$. Формула (7) даетъ:

$$S_m = S_{\mu+\alpha} = S_\mu \,.\, S_\alpha.$$

Но μ — число соизмѣримое, слѣд. $S_\mu = (1+x)^\mu$; затѣмъ, формула (3) даетъ

$$\begin{aligned} S_\alpha &= 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ &= 1 + \alpha \left\{ x + \frac{\alpha-1}{2} \cdot x^2 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\,.\,3} x^3 + \ldots \right\} \end{aligned}$$

Рядъ въ скобкахъ — сходящійся, потому что отношеніе каждаго члена къ предыдущему въ предѣлѣ даетъ $-x$, что по абсолютной величинѣ <1; слѣд. сумма этого ряда есть нѣкоторая конечная величина A, а потому

$$S_\alpha = 1 + \alpha A, \quad \text{и} \quad S_m = (1+x)^\mu (1 + \alpha A).$$

По мѣрѣ приближенія μ къ m, α приближается къ 0, слѣд. $1 + \alpha A$ — къ 1, а вторая часть къ $(1+x)^m$; а какъ эта часть всегда $= S_m$, то

$$S_m = (1+x)^m.$$

Итакъ, при всякомъ дѣйствительномъ m:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^3 + \ldots$$

причемъ, когда m — цѣлое положительное число, x можетъ быть какою угодно дѣйствительною величиною, если же m не есть цѣлое положит. число, то должно быть $-1 < x < 1$.

---

*) Опредѣленіе степени съ несоизмѣримымъ показателемъ см. далѣе, § 775.

Примѣчаніе 1. Идея вышеизложеннаго доказательства общности формулы бинома Ньютона принадлежитъ *Эйлеру*, а усовершенствованное доказательство — *Коши*.

Примѣчаніе 2. Теорема.— *Одна и таже функція разлагается въ сходящійся рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣннаго, единственнымъ способомъ.* — Въ самомъ дѣлѣ, пусть, если возможно, будутъ два различныя разложенія одной и той же функціи.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \text{ и } b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$$

сходящіяся то и другое при всѣхъ значеніяхъ x, меньшихъ X, по абс. значенію. Такъ какъ, по усл., оба эти разложенія должны имѣть равные предѣлы для всякаго $x < X$, то для этихъ значеній перемѣннаго должно быть

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots = \varepsilon_n,$$

гдѣ ε_n — разность остатковъ рядовъ, которая, какъ и эти остатки, д. б. безконечно малою при $n = \infty$, при всякомъ $x < X$. Какъ бы велико ни было значеніе, взятое для n, всегда можно взять x настолько малымъ, чтобы совокупность членовъ $(a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n$ была какъ угодно мала, а отсюда слѣдуетъ, что $a_0 - b_0$ равно разности двухъ безк. малыхъ. Слѣд., какъ $a_0 - b_0$ не зависитъ ни отъ n, ни отъ x, то оно строго равно нулю (на основаніи очевидной истины: постоянное, о которомъ можно доказать, что оно менѣе всякой данной величины, есть нуль, короче: постоянная безконечно малая есть не что иное какъ нуль). Такимъ образомъ $a_0 = b_0$ и равенство приводится къ

$$x[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-1}] = \varepsilon_n;$$

но чтобы первая часть была безконечно мала при всякомъ $x < X$, необходимо, чтобы скобки были безконечно малы, откуда, по предыдущему, заключаемъ, что $a_1 - b_1 = 0$, т. е. $a_1 = b_1$. Продолжая такимъ образомъ, убѣдимся что всѣ коэффиціенты равны каждый каждому.

Примѣчаніе 3. — Эту теорему (служащую основаніемъ способа неопредѣлен. коэф-въ для безконечныхъ строкъ) можно примѣнять къ разложенію функцій въ безконечные степенные ряды, но только въ такомъ случаѣ, когда напередъ м. б. доказано, что функція способна разлагаться въ сходящійся степенной рядъ: въ противномъ случаѣ способъ этотъ можетъ привести къ невѣрнымъ результатамъ, такъ какъ въ немъ не обращается вниманія на остатокъ ряда. Кромѣ того, по этому способу трудно бываетъ найти общую формулу для членовъ ряда. Въ виду того, какъ для бинома, такъ и для другихъ функцій у насъ указаны другіе, болѣе строгіе, пріемы разложенія въ ряды.

771. Остатокъ биноміальнаго ряда. — Разложимъ биноміальный рядъ на двѣ части, изъ которыхъ первая пусть содержитъ первые k членовъ, а вторая, которую мы назовемъ *остаткомъ ряда* и обозначимъ чрезъ R_k, остальные члены.

Итакъ, положимъ:

$$(1 + x)^m = 1 + m_1x + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots + m_{k-1}x^{k-1} + R_k \quad \ldots (1)$$

гдѣ остатокъ R_k будетъ

$$R_2 = m_kx^k + m_{k+1}x^{k+1} + m_{k+2}x^{k+2} + \ldots$$

здѣсь

$$m_k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k};$$

$$m_{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)}{1.2.3\ldots k(k+1)} = m_k\frac{m-k}{k+1};$$

$$m_{k+2} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)(m-k-1)}{1.2\ldots k(k+1)(k+2)} = m_k\frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)}; \text{ и т. д.}$$

Вынеся во всѣхъ членахъ за скобки $m_k\, x^k$, получимъ:

$$R_k = m_k x^k \left\{ 1 + \frac{m-k}{k+1} x + \frac{(m-k)(m-k-1)}{(k+1)(k+2)} x^2 + \ldots \right\} \ldots (2)$$

Различаемъ слѣдующіе случая.

1-й случай: m *цѣлое положительное число.*—Понятно, что въ этомъ случаѣ $k < m$, рядъ будетъ конечный объ $(m+1)$ членахъ, и если.

1. $x > 0$, то сумма въ скобкахъ (2) будетъ больше нуля. Съ другой стороны, если во множителяхъ числителей коэффицентовъ отбросимъ вычитаемыя, а во множителяхъ знаменателей вторые члены, то всѣ коэффиценты увеличатся, и рядъ въ скобкахъ будетъ меньше

$$1 + \frac{m}{k} \cdot x + \frac{m^2}{k^2} \cdot x^2 + \frac{m^3}{k^3} \cdot x^3 \ldots,$$

т.-е. конечной геометрической прогрессіи, которой знаменатель $= \frac{mx}{k}$, а послѣдній членъ $\left(\frac{m}{k} x\right)^{m-k}$; потому сумма ея $=$

$$\frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}}.$$

Такимъ образомъ остатокъ R_k, заключаясь между 0 и

$$m_k x^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}},$$

равенъ произведенію послѣдняго выраженія на нѣкоторую положительную правильную дробь ρ; т.-е.

$$\text{(I)}\ R_k = \rho \cdot m_k x^k \cdot \frac{1 - \left(\frac{mx}{k}\right)^{m-k+1}}{1 - \frac{mx}{k}},\ \text{гдѣ}\ 0 < \rho < 1.$$

2. $x < 0$. Нѣкоторые члены будутъ положительные, другіе отрицательные: и если условимся абсолютную величину количества z обозначать знакомъ $[z]$, то сумма въ скобкахъ (2) будетъ содержаться между

$$-\left\{1 + \left[\frac{mx}{k}\right] + \left[\frac{mx}{k}\right]^2 + \ldots\right\} \ \text{и}\ +\left\{1 + \left[\frac{mx}{k}\right] + \left[\frac{mx}{k}\right]^2 + \ldots\right\},$$

такъ что легко заключить, что въ этомъ случаѣ

$$\text{(II)}\ R_k = \rho \cdot m_k x^k \cdot \frac{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1}}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]},\ \text{гдѣ}\ -1 < \rho < +1,$$

т.-е. ρ есть положит. или отрицат. правильная дробь.

Формулы (I) и (II) можно соединить въ одну, одинаковаго вида съ послѣдней, замѣтивъ только, что при $x > 0$ должно быть и $\rho > 0$.

Въ частномъ случаѣ, когда $\frac{mx}{k}$ есть правильная дробь, будетъ и

$$1 - \left[\frac{mx}{k}\right]^{m-k+1} < 1;$$

произведеніе этой правильной дроби на дробь $\rho < 1$ дастъ также правильную дробь; назвавъ послѣднюю буквою ρ', получимъ для этого случая болѣе простую формулу:

$$(\mathrm{III})\ R_k = \frac{\rho' \cdot m_k x^k}{1 - \left[\frac{mx}{k}\right]},\ \text{гдѣ}\ -1 < \rho' < +1.$$

И здѣсь также при $x > 0$ будетъ $\rho' > 0$.

2-й случай: *m — дробное положительное число.* — Биноміальный рядъ будетъ безконечный и сходящійся при $-1 < x < +1$; тоже самое относится и къ ряду (2). Возьмемъ произвольное цѣлое положительное число $k > m$, и разсмотримъ опять два случая—положительнаго и отрицат. x, именно: $x = +\xi$, $x = -\xi$.

Въ первомъ случаѣ рядъ (2) будетъ

$$1 - \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 - \ldots (3)$$

во второмъ:

$$1 + \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi + \frac{(k-m)(k-m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \xi^2 + \ldots (4)$$

Такъ какъ факторы

$$\frac{k-m}{k+1},\ \frac{k-m+1}{k+2},\ \frac{k-m+2}{k+3}\ \ldots$$

суть положительныя правильныя дроби, ξ также < 1, то въ обоихъ рядахъ каждый членъ больше слѣдующаго; отсюда легко заключить, что сумма ряда (3) заключается между 1 и $1 - \frac{k-m}{k+1} \cdot \xi$ и потому положительна; также непосредственно видно, что и сумма (4) положительна. Затѣмъ, очевидно, что сумма перваго менѣе суммы второго, а эта послѣдняя меньше $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots = \frac{1}{1-\xi}$. Вообразивъ между ξ и 1 еще правильную дробь ($\xi < \varepsilon < 1$), имѣемъ

$$\frac{1}{1-\xi} < \frac{1}{1-\varepsilon};$$

сумма каждаго изъ рядовъ (3) и (4) содержится между 0 и $\frac{1}{1-\varepsilon}$; поэтому ту и другую можно представить подъ общимъ видомъ $\frac{\rho}{1-\varepsilon}$, гдѣ ρ положител. прав. дробь. Итакъ для остатка имѣемъ формулу

$$(\mathrm{IV})\ R_k = \frac{\rho \cdot m_k x^k}{1-\varepsilon},$$

въ которой: $[x] < \varepsilon < 1$, $k > m$, $0 < \rho < 1$, и $[x]$ означаетъ абсолютную величину x.

3-й случай: *m — отрицательное число*; пусть $m = -\lambda$. Рядъ (2) при $x > 0$ будетъ

$$1 - \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 - \ldots (5)$$

а при $x < 0$:

$$1 + \frac{k+\lambda}{k+1}\xi + \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\xi^2 + \ldots (6)$$

Въ виду того, что $\frac{k+\lambda}{k+1} \cdot \xi$ при неограниченномъ возрастаніи k приближается къ предѣлу ξ $\left[\text{ибо } \lim \frac{k+\lambda}{k+1}\xi = \lim \frac{1+\frac{\lambda}{k}}{1+\frac{1}{k}}\cdot\xi = \xi\right]$, и какъ $\xi<1$, то можно для k выбрать настолько большое значеніе, чтобы

$$\frac{k+\lambda}{k+1}\cdot\xi<\varepsilon,$$

гдѣ ε прав. дробь, лежащая между ξ и 1. Въ самомъ дѣлѣ, предыдущее неравенство даетъ

$$k>\frac{\lambda\xi-\varepsilon}{\varepsilon-\xi},$$

а это требованіе всегда м. б. выполнено. Какъ скоро для k выбрано такого рода значеніе, то тѣмъ въ большей мѣрѣ справедливы будутъ неравенства

$$k+1>\frac{\lambda\xi-\varepsilon}{\varepsilon-\xi},\quad k+2>\frac{\lambda\xi-\varepsilon}{\varepsilon-\xi},\ \dots$$

или

$$\frac{k+\lambda+1}{k+2}\cdot\xi<\varepsilon,\quad \frac{k+\lambda+2}{k+3}\cdot\xi<\varepsilon,\ \dots$$

слѣдовательно

$$\frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}\cdot\xi^2<\varepsilon^2,\quad \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1)(k+\lambda+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\xi^3<\varepsilon^3, \text{ и т. д.}$$

Суммы рядовъ (5) и (6) будутъ, слѣд., положительны и менѣе

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\dots=\frac{1}{1-\varepsilon},$$

и потому могутъ быть представлены подъ общимъ видомъ $\frac{\rho}{1-\varepsilon}$; и для остатка имѣемъ выраженіе

$$\text{(V)}\quad R_k=\frac{\rho\cdot m_k x^k}{1-\varepsilon},$$

гдѣ $[x]<\varepsilon<1$, $k>\frac{[mx]-\varepsilon}{\varepsilon-[x]}$, $0<\rho<1$.

Это изслѣдованіе можно резюмировать такъ:

Если m не есть цѣлое положительное число и $x^2<1$, то остатокъ Ньютонова ряда выражается общею формулою

$$R_k=\frac{\rho\cdot m_k x^k}{1-\varepsilon},$$

гдѣ

$$[x]<\varepsilon<1,\quad 0<\rho<1;$$

причемъ слѣдуетъ брать: $k>m$, если m положительно, и $k>\frac{[mx]-\varepsilon}{\varepsilon-[x]}$, если m отрицательно.

772. Примѣры.—Примѣняя формулу бинома, найдемъ:

1. $(1\pm x)^{\frac{3}{2}}=1\pm\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2\pm\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4\mp\dots$

2. $(1\pm y)^{\frac{1}{2}}=1\pm\frac{1}{2}y-\frac{1}{2.4}y^2\pm\frac{1.3}{2.4.6}y^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}y^4\pm\dots$

$$3. \quad (a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}\left\{1 \mp \frac{x^2}{2a^2} + \frac{1.3.x^4}{2.4.a^4} \mp \frac{1.3.5.x^6}{2.4.6.a^6} + \frac{1.3.5.7.x^8}{2.4.6.8.a^8} \mp \dots\right\}$$

и т. п.

773. Приложенія формулы бинома Ньютона.—Укажемъ нѣкоторыя приложенія формулы бинома.

I. *Извлеченіе корней.*—Пусть требуется извлечь корень порядка r изъ цѣлаго числа N. Разобьемъ N на двѣ части такъ, чтобы первая a^r представляла точную r-овую степень и была бы возможно больше по сравненію съ другою частью b, которую въ этихъ видахъ можно брать и отрицательною. Всегда можно взять $a^r > b$. Получимъ:

$$\sqrt[r]{N} = \sqrt[r]{a^r + b} = \sqrt[r]{a^r\left(1 + \frac{b}{a^r}\right)} = a\left(1 + \frac{b}{a^r}\right)^{\frac{1}{r}} = a(1+x)^{\frac{1}{r}}, \text{ полагая } \frac{b}{a^r} = x.$$

Примѣняя формулу бинома, найдемъ

$$\sqrt[r]{N} = a\left[1 + \frac{x}{r} - \frac{(r-1)}{1.2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{(r-1)(2r-1)}{1.2.3}\left(\frac{x}{r}\right)^3 - \dots\right]$$

Напр.

$$\sqrt[3]{129} = \sqrt[3]{125+4} = 5\left(1 + \frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{125} - \frac{2}{3.6}\left(\frac{4}{125}\right)^2 + \frac{2.5}{3.6.9}\left(\frac{4}{125}\right)^3 - \dots\right]$$

$$= u_0 + u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

$$u_0 + u_1 = 5 + \frac{16}{3.100} = 5{,}0533333333$$

$$u_2 = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{125}\cdot u_1 = \frac{32}{3.1000}u_1 = 0{,}0005688889\ (-)$$

$$5{,}0527644444$$

$$u_3 = \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{125}\cdot u_2 = \frac{16}{9.100}u_2 = 0{,}0000101136\ (+)$$

$$5{,}0527745580$$

$$u_4 = \frac{8}{12}\cdot\frac{4}{125}\cdot u_3 = \frac{64}{3.1000}u_3 = 0{,}0000002158\ (-)$$

$$5{,}0527743422$$

и т. д.

Вслѣдствіе чередованія знаковъ искомый корень всегда заключается между двумя смежными значеніями.

II. *Рѣшеніе уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, когда коэффиціентъ a весьма малъ.* Взявъ формулу корней, можемъ ей дать видъ

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a}\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Когда корни уравненія дѣйствительные неравные, мы имѣемъ: $b^2 - 4ac > 0$, откуда $\frac{4ac}{b^2} < 1$; но при a весьма маломъ дробь эта будетъ весьма мала и получится быстро-сходящійся рядъ; а именно

$$x = -\frac{b}{2a}\left\{1 \mp \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4ac}{b^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3 - \dots\right)\right\}.$$

III. *Раскрытіе неопредѣленностей.*—Приводимъ примѣры.

1. Дробь $\frac{x^m - a^m}{x^k - a^k}$, гдѣ m и k какія угодно числа, обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x = a$ Полагаемъ $x = a + h$ и разлагаемъ числителя и знаменателя по восходящимъ степенямъ h; затѣмъ полагаемъ $h = 0$; так. обр. находимъ:

$$\frac{x^m - a^m}{x^k - a^k} = \frac{(a+h)^m - a^m}{(a+h)^k - a^k} = \frac{a^m\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^m - 1\right]}{a^k\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^k - 1\right]} = a^{m-k}\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^m - 1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^k - 1} = \ldots$$

$$a^{m-k}\frac{m \cdot \frac{h}{a} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{h^2}{a^2} + \ldots}{k \cdot \frac{h}{a} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{h^2}{a^2} + \ldots}.$$

Всѣ члены числителя и знаменателя содержатъ множителя $\frac{h}{a}$; сокративъ на $\frac{h}{a}$ и положивъ $h = 0$ (чтобы имѣть величину дроби при $x = a$), находимъ, что всѣ члены числителя и знаменателя, кромѣ первыхъ, исчезаютъ, и получается $\frac{m}{k}a^{m-k}$.

2. Дробь $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ обращается въ $\frac{0}{0}$ при $x = a$. Положивъ $x = a + h$, даемъ ей видъ

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}} = \frac{\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{a} + \ldots\right) - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}};$$

сдѣлавъ приведеніе и раздѣливъ числит. и знам. на $\sqrt{h}$, имѣемъ

$$\frac{\frac{\sqrt{h}}{2a} + \ldots + 1}{\sqrt{2a+h}},$$

что при $h = 0$ обращается въ $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

IV. *Элементарный методъ Жоффруа для вывода рядовъ, служащихъ къ вычисленію π.*

1. Взявъ окружность радіуса R = 1, проведемъ къ точкѣ E касательную, затѣмъ на окружности возьмемъ нѣкоторую дугу AB и проведемъ радіусы OA, OB, продолженіе которыхъ пусть встрѣчаетъ касательную въ точкахъ C и D. Сравнимъ хорду AB съ дугою AB. Опустивъ изъ центра перпендикуляръ OI на AB, возьмемъ отношеніе площадей треугольниковъ OAB и OCD, имѣющихъ общій уголъ:

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCD} = \frac{OA \times OB}{OC \times OD} = \frac{AB \times OI}{CD \times OE}; \text{ или какъ } R = 1, \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OC \times OD \times OI}.$$

Замѣнивъ OI единицей и OD линіей OC, мы уменьшимъ вторую часть, и потому $\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2} \ldots$ (1) Съ другой стороны $\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2} \ldots$ (2). Доказательство неравенства (2) сводится къ доказательству, что $\frac{1}{OC \cdot OD \cdot OI} < \frac{1}{OD^2}$ или $\frac{1}{OC \cdot OI} < \frac{1}{OD}$, или $\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$; но, проведя AM параллельно CD (пусть V есть точка пересѣченія AM съ OI, а точка M съ OB), имѣемъ: $\frac{OA}{OC} = \frac{OM}{OD}$, а какъ $OA = 1$, и $OM < OV < OI$, то $\frac{1}{OC} < \frac{OI}{OD}$: этимъ неравенство (2) доказано. Итакъ

$$\frac{1}{OC^2} < \frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2} \cdot \cdot \cdot (3).$$

Если положимъ, что AB стремится къ нулю, то и CD будетъ приближаться къ нулю, и въ предѣлѣ: $\lim \frac{AB}{CD} = \frac{1}{OD^2}$, ибо OC и OD сливаются въ предѣлѣ.

Если на касательной возьмемъ часть $EP = 1$ и соединимъ P съ 0, то дуга $EH = \frac{\pi}{4}$. Для вычисленія этой дуги раздѣлимъ EP на n равныхъ частей и точки дѣленія F, D, C соединимъ съ центромъ. Эти прямыя дадутъ на окружности вершины неправильной ломаной, которой периметръ будетъ приближаться къ $\frac{\pi}{4}$ по мѣрѣ увеличенія n. Пусть будетъ AB одна изъ сторонъ этой ломаной, соотвѣтствующій элементъ CD касательной $= \frac{EP}{n} = \frac{1}{n}$. По доказанному, мы имѣемъ

$$\frac{AB}{CD} < \frac{1}{OD^2}; \text{ гдѣ } OD^2 = 1 + ED^2.$$

Пусть p будетъ число дѣленій отъ E до D: сл. $ED = p \cdot \frac{1}{n}$, $CD = \frac{1}{n}$; и

$$AB < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p^2}{n^2}}, \quad \text{или} \quad AB < \frac{n}{n^2 + p^2}.$$

Итакъ, периметръ P вписанной ломаной меньше суммы дробей вида $\frac{n}{n^2 + p^2}$, гдѣ p нужно измѣнять отъ 0 до $n - 1$. Слѣд.

$$P < n\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n^2 + (n - 1)^2}\right] \cdot \cdot \cdot (4).$$

Въ предѣлѣ, при $n = \infty$, P сливается съ дугою EH, слѣд.

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n^2 + (n - 1)^2}\right] \cdot \cdot \cdot (5).$$

Съ другой стороны, мы нашли, что

$$\frac{AB}{CD} > \frac{1}{OC^2}, \text{ гдѣ } OC^2 = 1 + EC^2 = 1 + \frac{(p + 1)^2}{n^2},$$

откуда

$$AB > \frac{n}{n^2 + (p + 1)^2}.$$

Взявъ сумму этихъ неравенствъ отъ $p = 0$ до $p = n - 1$, найдемъ

$$P > n\left[\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n^2 + n^2}\right] \cdot \cdot \cdot (6).$$

Сближая неравенства (4) и (6), найдемъ два значенія для P—одно по избытку, другое по недостатку. Эти два значенія разнятся на $n\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\right] = \frac{1}{2n}$; слѣдов оба они стремятся къ $\frac{\pi}{4}$. Взявъ n достаточно большимъ, можно вычислить π съ желаемою точностью.

Формула (5) послужитъ намъ для разложенія π въ сходящійся рядъ. Взявъ въ скобкахъ общій членъ $\frac{1}{n^2+p^2}$, или $(n^2+p^2)^{-1}$, разложимъ его по формулѣ бинома:

$$\frac{1}{n^2+p^2}=(n^2+p^2)^{-1}=\frac{1}{n^2}-\frac{p^2}{n^4}+\frac{p^4}{n^6}-\frac{p^6}{n^8}+\frac{p^8}{n^{10}}-\ldots$$

Полагая последовательно $p=0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, найдемъ

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^6}-\frac{1}{n^8}+\ldots$$

$$\frac{1}{n^2+2^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{2^2}{n^4}+\frac{2^4}{n^6}-\frac{2^6}{n^8}+\ldots$$

$$\frac{1}{n^2+3^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{3^2}{n^4}+\frac{3^4}{n^6}-\frac{3^6}{n^8}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^2+(n-1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{(n-1)^2}{n^4}+\frac{(n-1)^4}{n^6}-\frac{(n-1)^6}{n^8}+\ldots$$

Складывая по вертикальнымъ столбцамъ, умножая на n, и обозначая суммы вторыхъ, четвертыхъ, . . . степеней $n-1$ первыхъ цѣлыхъ чиселъ знаками S_2, S_4, . . . , находимъ:

$$\frac{\pi}{4}=\lim\left(1-\frac{S_2}{n^3}+\frac{S_4}{n^5}-\frac{S_6}{n^7}+\frac{S_8}{n^9}-\ldots\right).$$

Но $\lim\frac{S_2}{n^3}=\frac{1}{3}$, $\lim\frac{S_4}{n^5}=\frac{1}{5}$, и т. д. Потому

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots$$

одинъ изъ рядовъ, которые даетъ интегральное исчисленіе.

2. Взявъ четверть круга OAB, положимъ, что радіусъ OB = 1. Раздѣлимъ радіусъ OB на n равныхъ частей и изъ точекъ дѣленія проведемъ параллели другому радіусу OA. Такимъ обр. дуга AB $=\frac{\pi}{2}$ будетъ раздѣлена на n неравныхъ частей; хорды, какъ CD, стягивающія эти дуги, образуютъ вписанную ломаную длины P, предѣломъ которой при $n=\infty$, будетъ служить $\frac{\pi}{2}$. Пусть EF будетъ дѣленіе радіуса OB, соотвѣтствующее дугѣ CD. Проведя OI перпендикулярно къ хордѣ CD, IH перпендикулярно къ OA, и CG перпендикуляръ на DF, найдемъ изъ подобныхъ треугольниковъ CDG и OIH, что $\frac{CG}{CD}=\frac{OH}{OI}$. Но CG = EF, слѣд.

$$\lim\frac{EF}{CD}=\lim\frac{OH}{OI}=\frac{FD}{1};\text{ а потому }\lim CD=\lim\frac{EF}{FD}.$$

Далѣе. $EF = \frac{OB}{n} = \frac{1}{n}$, $FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$, если p означаетъ число дѣленій отъ 0 до F. Отсюда

$$\lim CD = \frac{1}{\lim n\sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}.$$

Но периметръ P есть сумма элементовъ, такихъ какъ CD, слѣд.

$$P = \Sigma_0^{n-1} CD = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}.$$

а какъ $\frac{\pi}{2} = \lim P$, то

$$\frac{\pi}{2} = \lim\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}\right].$$

Взявъ общій членъ, имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}} = (n^2 - p^2)^{-\frac{1}{2}} = n^{-1} + \frac{\frac{1}{2}}{1} p^2 n^{-3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} p^4 n^{-5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^6 n^{-7} + \cdot \cdot \cdot$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{p^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{p^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{p^0}{n^7} + \cdot \cdot \cdot$$

Полагая $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, имѣемъ отсюда:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^7} + \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{2^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2^6}{n^7} + \cdot \cdot \cdot$$

. . . .

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} = \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^3} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-1)^4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n-1)^6}{n^7} + \cdot \cdot \cdot$$

Суммируя, найдемъ въ предѣлѣ

$$\frac{\pi}{2} = \lim\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_2}{n^2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \frac{S_4}{n^5} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{S_6}{n^7} + \cdot \cdot \cdot\right],$$

или, подставляя $\lim \frac{S_2}{n^3}, \quad .$, окончательно

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \cdot \cdot \cdot$$

другой рядъ, предлагаемый въ курсахъ интеграловъ.

ГЛАВА XLIX.

Изслѣдованіе свойствъ показательной функціи. Общія свойства логариѳмовъ.—Системы логариѳмовъ.—Условія соизмѣримости логариѳмовъ.—Приложеніе къ десятичнымъ логариѳмамъ.

Изслѣдованіе свойствъ показательной функціи.

774. Опредѣленіе. Функція a^x, гдѣ a количество постоянное, а x — перемѣнное, называется *показательной функціей*. Изслѣдованіе свойствъ этой функціи служитъ основаніемъ теоріи логариѳмовъ.

Докажемъ, что если $a > 0$, то функція непрерывна на всемъ протяженіи дѣйствительныхъ значеній x, соизмѣримыхъ или несоизмѣримыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ. Изслѣдованіе это подраздѣляемъ на двѣ части: $a > 1$ и $a < 1$.

775. Теорема. *Если $a > 1$, функція a^x возрастаетъ непрерывно отъ 0 до $+\infty$, когда x возрастаетъ непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

I. Во-первыхъ, пусть x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, получая *соизмѣримыя* значенія.

1) Если эти значенія будутъ цѣлыя и положительныя, то въ леммѣ I, § 749, уже доказано, что если $m > n$, то и $a^m > a^n$.

2) Пусть x получаетъ соизмѣримыя дробныя значенія $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\alpha'}{\beta'}$, и пусть $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha'}{\beta'}$. Отсюда: $\alpha\beta' > \alpha'\beta$, и такъ какъ это — числа цѣлыя, то по предыдущему: $a^{\alpha\beta'} > a^{\alpha'\beta}$. Извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка $\beta\beta'$, мы не нарушимъ смысла неравенства, а потому $\sqrt[\beta\beta']{a^{\alpha\beta'}} > \sqrt[\beta\beta']{a^{\alpha'\beta}}$, или $a^{\frac{\alpha}{\beta}} > a^{\frac{\alpha'}{\beta'}}$, что и требовалось доказать.

3) Дадимъ показателю x отрицательныя значенія, цѣлыя или дробныя; пусть $-m > -n$, гдѣ m и n положительны. Изъ неравенства имѣемъ: $m < n$; а слѣд. $a^m < a^n$; раздѣливъ обѣ части на положит. количество $a^m \cdot a^n$, находимъ:

$$\frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^m}, \quad \text{или} \quad a^{-n} < a^{-m}.$$

то же заключеніе.

II. Наконецъ, даемъ x-су *несоизмѣримыя* значенія, и прежде всего *опредѣлимъ,* что слѣдуетъ разумѣть подъ степенью съ несоизмѣримымъ показателемъ; напр., что означаетъ $a^{\sqrt{3}}$?

Возьмемъ рядъ приближеній къ $\sqrt{3}$, по недостатку и по избытку, точныхъ до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots \frac{1}{10^n}$; получимъ два ряда

$$\begin{array}{cccc} 1{,}7 & 1{,}73 & 1{,}732 & \frac{\alpha}{10^n}, \\ 1{,}8 & 1{,}74 & 1{,}733 & \frac{\alpha+1}{10^n}, \end{array}$$

общимъ предѣломъ которыхъ, по опредѣленію. служитъ $\sqrt{3}$.

Затѣмъ, напишемъ два ряда степеней a съ этими показателями:

$$a^{1,7} \quad a^{1,73} \quad a^{1,732} \quad \ldots \quad a^{\frac{\alpha}{10^n}} \quad \ldots (1)$$

$$a^{1,8} \quad a^{1,74} \quad a^{1,733} \quad \ldots \quad a^{\frac{\alpha+1}{10^n}} \quad \ldots (2)$$

Такъ какъ эти показатели соизмѣримы, то, по вышедоказанному, степени (1) идутъ возрастая; но существуетъ безчисленное множество состояній величины, какихъ эти количества не могутъ достигнуть и превзойти: таковы, напр., соотвѣтствующія имъ числа ряда (2). Необходимо заключить, что числа (1) стремятся къ нѣкоторому предѣлу L. Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что числа ряда (2) стремятся, уменьшаясь, къ нѣкоторому предѣлу L'. Легко видѣть, что оба эти предѣла равны, ибо разность

$$a^{\frac{\alpha+1}{10^n}} - a^{\frac{\alpha}{10^n}}$$

стремится къ нулю, когда n приближается къ безконечности. Дѣйствительно, эта разность

$$a^{\frac{\alpha}{10^n}}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) = a^{\frac{\alpha}{10^n}}\left(\sqrt[10^n]{a} - 1\right),$$

но мы доказали, что предѣломъ для $\sqrt[10^n]{a}$ служитъ 1; слѣд. разсматриваемая разность имѣетъ предѣломъ нуль, ибо множитель $a^{\frac{\alpha}{10^n}}$ конеченъ (онъ, напр., меньше a^2).

Этотъ общій предѣлъ рядовъ (1) и (2) и представляютъ, по опредѣленію, въ видѣ $a^{\sqrt{3}}$. Итакъ:

Степень съ несоизмѣримымъ показателемъ m отъ положительнаго числа a есть предѣлъ, къ которому стремятся степени этого числа, коихъ показатель стремится къ m, увеличиваясь или уменьшаясь.

Докажемъ теперь, что большему несоизмѣримому показателю (при $a > 1$) соотвѣтствуетъ и большая степень; напр.

$$a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\frac{\alpha}{10^n}$ и $\frac{\beta}{10^n}$ суть приближенія къ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, точныя до $\frac{1}{10^n}$ по недостатку, то:

$$\frac{\alpha}{10^n} < \sqrt{2} < \frac{\alpha+1}{10^n} \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{10^n} < \sqrt{3} < \frac{\beta+1}{10^n}.$$

Слѣд., по предыдущему:

$$a^{\frac{\alpha}{10^n}} < a^{\frac{1}{10^n}};$$

а потому и предѣлы, *которые не равны*, не равны въ томъ же порядкѣ, ибо этотъ порядокъ не измѣняется, когда n неограниченно возрастаетъ.

III. *Измѣненія функціи a^x непрерывны на всемъ протяженіи измѣненій x.*

Дадимъ конечному x_0 нѣкоторое приращеніе h, и докажемъ, что если это приращеніе будетъ неограниченно приближаться къ нулю, то и приращеніе k функціи y_0 будетъ также неограниченно приближаться къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ:

$$y_0 = a^{x_0}, \quad y_0 + k = a^{x_0+h},$$

сл.

$$k = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

a^{x_0} — величина конечная; остается доказать, что h можно взять настолько близкимъ къ нулю, что a^h будетъ какъ угодно близко къ 1, т.-е. что a^h стремится къ предѣлу 1.

Пусть $h > 0$; всегда можно найти такое цѣлое положительное число α, чтобы

$$\alpha < \frac{1}{h} < \alpha + 1,$$

ибо α есть частное, точное до 1, отъ раздѣленія $1 : h$, и это частное будетъ неограниченно возрастать по мѣрѣ того, какъ h будетъ приближаться къ нулю. Изъ предыдущаго неравенства выводимъ

$$\frac{1}{\alpha+1} < h < \frac{1}{\alpha};$$

откуда, по вышедоказанному:

$$a^{\frac{1}{\alpha+1}} < a^h < a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Но крайнія количества — то же, что $\sqrt[\alpha+1]{a}$ и $\sqrt[\alpha]{a}$; а эти корни, въ силу леммы III § 751, имѣютъ общимъ предѣломъ единицу, когда α неограниченно возрастаетъ; а слѣд. и a^h, по теор. § 186, имѣетъ тотъ же предѣлъ, т.-е. 1, когда h стремится къ нулю. Заключаемъ, что въ формулѣ для k второй множитель стремится къ 0, а сл. и k приближается къ тому же предѣлу, по мѣрѣ приближенія h къ нулю.

IV. *Когда x приближается къ ∞ то и a^x стремится къ ∞.*

Это предложеніе было уже доказано въ леммѣ I, § 749, для показателя цѣлаго. Пусть теперь показатель m есть число дробное или несоизмѣримое; это число будетъ заключаться между двумя послѣдовательными цѣлыми числами p и $p+1$, такъ что

$$a^p < a^m < a^{p+1}.$$

Но, по упомянутой леммѣ, a^p и a^{p+1} стремятся къ ∞, когда p приближается къ ∞, слѣд. и a^m стремится къ ∞, когда m неограниченно возрастаетъ.

Итакъ: *a^x, при $a > 1$, есть функція непрерывная, возрастающая отъ 0 до $+\infty$, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$.*

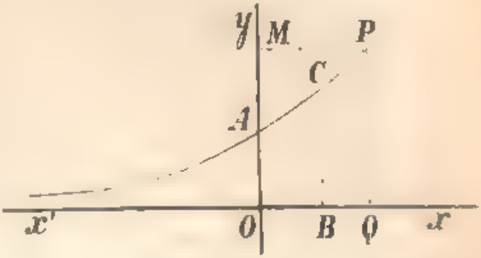
Этотъ результатъ можно представить въ формѣ слѣдующей таблицы:

Таблица A.

$$\begin{array}{ll} x & \infty \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdots 1 \cdots < \cdots +\infty \\ y = a^x & \underbrace{0 \cdots < \cdots}_{1} \underbrace{1 \cdots < \cdots a \cdots < \cdots +\infty}_{2} \end{array}$$

Изображая измѣненія **y** ординатами кривой, найдемъ кривую, которой Ox' служитъ ассимптотою, а ординаты растутъ неограниченно. Эта кривая пересѣкаетъ *ось* **y** въ такой точкѣ A, для которой OA = 1. Соотвѣтственно абсциссѣ OB = 1 имѣемъ ординату

$$y = BC = a.$$



Черт 153.

776. Теорема. *Если* $0 < a < 1$, *то при непрерывномъ измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$, *функція* a^x *непрерывно уменьшается отъ* $+\infty$ *до* 0.

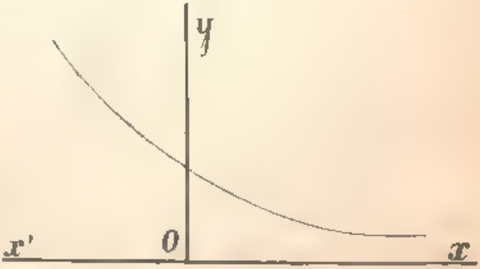
Въ самомъ дѣлѣ, когда $a < 1$, то можно положить $a = \frac{1}{a'}$, гдѣ $a' > 1$; слѣд. $a^x = \frac{1}{a'^x} = \frac{1}{a''}$. Если будемъ здѣсь увеличивать x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то, по предыдущей теоремѣ, a'' будетъ увеличиваться отъ 0 до $+\infty$, а слѣд. $\frac{1}{a''}$ будетъ уменьшаться отъ $\frac{1}{0}$ до $\frac{1}{\infty}$, т.-е. отъ ∞ до 0. Что и здѣсь измѣненія функціи a^x непрерывны — это непосредственно вытекаетъ изъ предыдущаго

Таблица измѣненій будетъ слѣдующая:

Таблица B.

$$\begin{array}{ll} x & -\infty \cdots < \cdots 0 \cdots < \cdot < \cdot\cdot 1 \cdot < \cdot +\infty \\ y = a^x & +\underbrace{\infty \cdots > \cdots}_{1} \underbrace{1 \cdots > \cdot\cdot > \cdot\cdot a \cdot\cdot > \cdot\cdot 0}_{2} \end{array}$$

Эти измѣненія наглядно изображены измѣненіями ординатъ кривой, для которой положительное направленіе Ox оси абсциссъ служитъ ассимптотою.



Черт. 154.

Логариѳмы.

777. Опредѣленіе.—Имѣя ур—ніе $y=a^x$, можно предложить себѣ три вопроса:

1. По даннымъ основанію a и показателю x вычислить степень a^x или y. Дѣйствіе это называется возвышеніемъ въ степень.

2. По даннымъ: степени y и ея показателю x найти основаніе a. Дѣйствіе это есть извлеченіе корня и выражается знакоположеніемъ: $a=\sqrt[x]{y}$.

3. По даннымъ: *степени* или *числу* y и основанію a найти показателя x. Показатель x называется *логариѳмомъ* числа y при основаніи a. Итакъ: *логариѳмомъ даннаго числа называется показатель степени, въ которую нужно возвысить основаніе, чтобы получить данное число.*

Слово логариѳмъ обозначается знакомъ log; такимъ образомъ, чтобы показать, что x есть логариѳмъ числа y при основаніи a, пишутъ: $x=\log_a y$. Напр. $\log_2 8=3$, потому что $2^3=8$; $\log_2\frac{1}{4}=-2$, ибо $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ и т. п.

778. Выборъ основанія.—Главное значеніе логариѳмовъ заключается въ томъ, что они служатъ могущественнымъ средствомъ для облегченія вычисленій. Но чтобы они могли служить для этой цѣли, необходимо имѣть для всѣхъ положительныхъ чиселъ дѣйствительные логариѳмы. Этому требованію удовлетворяетъ не всякое основаніе. И прежде всего легко видѣть, что *отрицательнаго числа нельзя брать за основаніе логариѳмовъ*, ибо при такомъ основаніи не для всѣхъ положительныхъ чиселъ получатся дѣйствительные логариѳмы. Такъ, ур—нію $(-2)^x=8$ нельзя удовлетворить никакимъ дѣйствительнымъ значеніемъ x.

Затѣмъ, 0 не можетъ быть принятъ за основаніе логариѳмовъ, потому что вторая часть ур—нія $0^x=y$ при положительномъ x всегда даетъ нуль; при $x=0$, $y=0^0=0^{m-m}=\frac{0^m}{0^m}=\frac{0}{0}$, т.-е. представляетъ неопредѣленность; а при отрицательномъ значеніи x, положивъ $x=-m$, получаемъ $y=0^{-m}=\frac{1}{0^m}=\frac{1}{0}=\infty$. Такимъ образомъ, различныя степени нуля не воспроизводятъ всевозможныхъ положительныхъ чиселъ.

Обращаясь къ положительнымъ числамъ, замѣчаемъ, что единица не можетъ быть принята за основаніе логариѳмовъ, потому что различныя степени единицы равны 1.

Взявъ за основаніе число, большее или меньшее 1, и возвышая его во всевозможныя дѣйствительныя степени отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы, какъ видно изъ таблицъ А и В, §§ 775 и 776, получимъ всевозможныя положительныя числа отъ 0 до $+\infty$, такъ что въ этихъ случаяхъ всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ. Итакъ: *за основаніе логариѳмовъ только и можно брать положительныя числа, большія или меньшія 1.*

779. Свойства логариѳмовъ при основаніи большемъ 1. 1. *Всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ, и только одинъ.* При изслѣдованіи функціи $y=a^x$ (см. таблицу А) мы видѣли, что если измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то y непрерывно возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$. Возьмемъ въ этой строкѣ значеній y-ка какое-нибудь число y': функція y (или a^x), будучи непрерывна и измѣняясь чрезъ всю область положительныхъ чиселъ, пройдетъ, по крайней мѣрѣ, разъ и чрезъ значеніе y', при нѣкоторомъ значеніи x перемѣннаго x; но функція эта постоянно возрастаетъ, и потому *только одинъ разъ* пройдетъ чрезъ это значеніе y'. Это наглядно обнаруживаетъ и кривая $y = a^x$ (черт. 153), въ самомъ дѣлѣ, пусть $y' = OM$; проведя параллель MP оси Ox, замѣчаемъ, что она встрѣтитъ кривую только въ одной точкѣ; логариѳмъ числа y' будетъ абсцисса OQ точки встрѣчи P.

Итакъ: всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ, и только одинъ. Высшая алгебра показываетъ, что кромѣ одного дѣйствительнаго логариѳма всякое положительное число имѣетъ безчисленное множество мнимыхъ логариѳмовъ.

2. *Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логариѳмовъ.* Дѣйствительно, на всемъ протяженіи строки чиселъ (таблица A) въ ней находятся одни положительныя числа.

3. *Логариѳмы чиселъ, большихъ 1, положительны;* въ самомъ дѣлѣ, числамъ отъ 1 до $+\infty$ строки y соотвѣтствуютъ въ строкѣ x числа отъ 0 до $+\infty$.

4. *Логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1, отрицательны;* и въ самомъ дѣлѣ, числамъ отъ 0 до 1 таблицы A соотвѣтствуютъ въ строкѣ логариѳмовъ значенія отъ $-\infty$ до 0.

5. *Логариѳмъ нуля равенъ $-\infty$.*

6. *Логариѳмъ единицы равенъ нулю.*

7. *Логариѳмъ основанія равенъ единицѣ.*

8. *Логариѳмъ $+\infty$ равенъ $+\infty$.*

780. Свойства логариѳмовъ при основаніи меньшемъ 1. Подобно предыдущему, изученіе таблицы B прямо даетъ слѣдующіе результаты:

1. *Всякое положительное число имѣетъ дѣйствительный логариѳмъ, и только одинъ.*

2. *Логариѳмы чиселъ, большихъ 1, отрицательны, а чиселъ меньшихъ единицы — положительны.*

3. *Логариѳмъ основанія равенъ единицѣ.*

4. *Логариѳмъ единицы равенъ нулю.*

5. *Логариѳмъ нуля равенъ $+\infty$.*

6. *Логариѳмъ $+\infty$ равенъ $-\infty$.*

7. *Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логариѳмовъ.*

781. Теоремы, на которыхъ основано употребленіе логариѳмовъ въ вычисленіяхъ.

1. *Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ производителей.* — Пусть имѣемъ числа N, N′, N″, имѣющія логариѳмами: x, x', x'' при одномъ и томъ же основаніи a.

Зависимость между числами и ихъ логариѳмами выражается уравненіями

$$N = a^{x}\;.\;.\;.\;(1)\quad N' = a^{x'}\;.\;.\;.\;(2)\quad N'' = a^{x''}\;.\;.\;.\;(3).$$

Перемноживъ ихъ, получаемъ уравненіе

$$NN'N'' = a^{x+x'+x''},$$

изъ котораго видно, что $x + x' + x''$ есть логариѳмъ числа $NN'N''$:

$$\lg(NN'N'') = x + x' + x'';$$

но изъ данныхъ ур—ній имѣемъ: $x = \lg N$, $x' = \lg N'$, $x'' = \lg N''$; подстановка въ предыдущее ур—ніе дастъ, такимъ образомъ:

$$\lg(NN'N'') = \lg N + \lg N' + \lg N'',$$

и теорема доказана.

II. *Логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя.*—Раздѣливъ ур—ніе (1) на (2), имѣемъ:

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'},$$

откуда, по опредѣленію логариѳма:

$$\lg\left(\frac{N}{N'}\right) = x - x' = \lg N - \lg N'.$$

Если $N = 1$, то $\lg N = 0$, и предыдущее равенство дастъ:

$$\lg\left(\frac{1}{N'}\right) = -\lg N',$$

т.-е. *логариѳмъ дроби, имѣющей числителемъ 1, равенъ отрицательному логариѳму знаменателя.*

III. *Логариѳмъ степени съ какимъ угодно показателемъ равенъ произведенію показателя на логариѳмъ возвышаемаго числа.*—Возвысивъ обѣ части ур—нія (1) въ степень m, имѣемъ

$$N^m = (a^x)^m = a^{xm}, \quad \text{откуда} \quad \lg(N^m) = mx = m . \lg N,$$

и теорема доказана.

IV. *Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкореннаго числа, раздѣленному на показателя корня.*—Извлекая изъ обѣихъ частей ур—нія (1) корень порядка p, имѣемъ:

$$\sqrt[p]{N} = \sqrt[p]{a^x} = a^{\frac{x}{p}}, \quad \text{откуда} \quad \lg(\sqrt[p]{N}) = \frac{x}{p} = \frac{\lg N}{p}.$$

Эти теоремы даютъ возможность значительно облегчать выполненіе болѣе трудныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Для этого должны быть построены таблицы, содержащія логариѳмы чиселъ. Имѣя такія таблицы, и зная, что логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ производителей, мы можемъ умноженіе чиселъ свести на простѣйшее дѣйствіе —сложеніе ихъ логариѳмовъ такимъ образомъ мы опредѣлимъ log произведенія, а для отысканія самаго произведенія останется взять изъ таблицъ число, соотвѣтствующее найденному логариѳму. Дѣленіе чиселъ, при помощи теоремы II, сводится къ простѣйшему дѣйствію —вычитанія логариѳмовъ; возвышеніе въ степень, при помощи теор. III, приводится къ умноженію, а извлеченіе корня, по теор. IV, къ дѣленію. Однимъ словомъ, при помощи логариѳмовъ, дѣйствія высшаго порядка надъ числами приводятся къ дѣйствіямъ низшаго порядка надъ ихъ логариѳмами.

782. Теорема. *Если числа составляютъ прогрессію геометрическую, то ихъ логариѳмы составятъ прогрессію ариѳметическую.*

Пусть имѣемъ геометрическую прогрессію

$$\because\!\because\ a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots : aq^n.$$

Взявъ логариѳмъ каждаго члена, имѣемъ:

$$\lg a;\ \lg a + \lg q;\ \lg a + 2\lg q;\ \lg a + 3\lg q;\ \ldots;\ \lg a + n\lg q:$$

а это есть рядъ, составляющій ариѳметическую прогрессію съ разностью, равною $\lg q$.

Свойство это было взято *Неперомъ* за исходный пунктъ въ теоріи логариѳмовъ.

783. Если надъ данными количествами, входящими въ составъ выраженія, подлежащаго вычисленію, указаны только дѣйствія дѣленія, умноженія, возведенія въ степень и извлеченія корня, то такое выраженіе м. б. вычислено съ помощію логариѳмовъ. Пусть напр.

$$x = \frac{a^6 \times \sqrt[5]{c^9}}{b^2 \times \sqrt[4]{d^3 f^5}}.$$

Примѣняя теоремы о логариѳмѣ дроби и т. д., послѣдовательно получаемъ:

$$\begin{aligned}\lg x &= \lg(a^6 \times \sqrt[5]{c^9}) - \lg(b^2 \times \sqrt[4]{d^3 f^5})\\ &= \lg a^6 + \lg\sqrt[5]{c^9} - (\lg b^2 + \lg\sqrt[4]{d^3 f^5})\\ &= 6\lg a + \frac{9}{5}\lg c - 2\lg b - \frac{1}{4}(3\lg d + 5\lg f).\end{aligned}$$

Такимъ образомъ $\lg x$ будетъ извѣстенъ; а по $\lg x$ опредѣлится и соотвѣтствующее число, какъ скоро будутъ даны численныя значенія a, b, c, d и f.

Дѣйствіе, имѣющее цѣлью составленіе выраженія для логариѳма по данному выраженію для числа, называется *логариѳмированіемъ*.

Обратно, по данному выраженію логариѳма можно составить выраженіе для соотвѣтствующаго числа, пользуясь тѣми же теоремами. Пусть, напр., дано

$$\lg x = \frac{3}{4}[\lg(a+b) + \lg(a-b) + \lg(a^2+b^2)] - \frac{1}{3}\lg(1+a^2).$$

Послѣдовательно имѣемъ:

$$\begin{aligned}\lg x &= \frac{3}{4}\lg(a+b)(a-b)(a^2+b^2) - \frac{1}{3}\lg(1+a^2)\\ &= \frac{3}{4}\lg[(a^2-b^2)(a^2+b^2)] - \frac{1}{3}\lg(1+a^2)\\ &= \frac{3}{4}\lg(a^4-b^4) - \frac{1}{3}\lg(1+a^2) = \lg\sqrt[4]{(a^4-b^4)^3} - \lg\sqrt[3]{1+a^2}\\ &= \lg\frac{\sqrt[4]{(a^4-b^4)^3}}{\sqrt[3]{1+a^2}}.\end{aligned}$$

Изъ равенства логариѳмовъ заключаемъ о равенствѣ соотвѣтствующихъ чиселъ; такимъ образомъ, находимъ

$$x=\frac{\sqrt[4]{(a^4-b^4)^3}}{\sqrt[3]{1-a^2}}.$$

784. Перемѣна основанія. — Пусть извѣстны логариѳмы чиселъ при нѣкоторомъ данномъ основаніи a, и предложимъ себѣ вычислить логариѳмы тѣхъ же чиселъ, взявъ другое основаніе b. Рѣшеніе этого вопроса основывается на слѣдующей теоремѣ:

Теорема. — *Отношеніе логариѳмовъ двухъ чиселъ* N *и* N' *не зависитъ отъ основанія,* т.-е. это отношеніе остается одинаково, каково бы ни было основаніе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть логариѳмы числа N при основаніяхъ a и b будутъ α и β; а логариѳмы числа N' при тѣхъ же основаніяхъ пусть будутъ α' и β'. По опредѣленію, имѣемъ

$$N=a^{\alpha}=b^{\beta},\quad N'=a^{\alpha'}=b^{\beta'}.$$

Отсюда:

$$a=b^{\frac{\beta}{\alpha}}=b^{\frac{\beta'}{\alpha'}},$$

и слѣдовательно, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha'}$, или $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\alpha}{\alpha'}$, или, наконецъ,

$$\frac{\lg_b N}{\lg_b N'}=\frac{\lg_a N}{\lg_a N'},$$

и теорема доказана. — Если положить здѣсь $N'=b$, то будетъ $\lg_b N'=\lg_b b=1$, и пропорція дастъ:

$$\lg_b N=(\lg_a N)\times\frac{1}{\lg_a b}\cdot\cdot\cdot(1)$$

т.-е. *если построена таблица логариѳмовъ при основаніи* a, *то изъ нея легко вывести логариѳмы по другому основанію* b: *стоитъ только старые логариѳмы помножить на дробь* $\frac{1}{\lg_a b}$, *равную единицѣ, дѣленной на* lg *новаго основанія, взятый по старому.* Этотъ постоянный множитель называется *модулемъ* перехода отъ старой системы къ новой.

Изобрѣтатель логариѳмовъ, *Неперъ*, взялъ за основаніе построенной имъ системы несоизмѣримое число, равное приблизительно 2,718281828459045... Это число обыкновенно обозначаютъ буквою e; а самые логариѳмы называютъ *неперовыми*, или *натуральными*, или *гиперболическими*: они имѣютъ важное значеніе въ высшемъ анализѣ. Но для практическихъ вычисленій они не удобны; поэтому уже самъ Неперъ посовѣтовалъ своему современнику *Бригу* вычислить новые логариѳмы, принявъ за основаніе число 10. Этими послѣдними логариѳмами и пользуются обыкновенно для практическихъ вычисленій, и называютъ *обыкновенными*, или *десятичными* логариѳмами.

Примѣчаніе. Если въ равенствѣ (1) положимъ $N=a$, то, какъ будетъ $\lg_a N=\lg_a a=1$, найдемъ соотношеніе

$$\lg_a b\times\lg_b a=1,$$

часто употребляемое въ вычисленіяхъ.

785 Условія соизмѣримости логариѳмовъ.—Замѣтивъ, что всякое число можно представить въ видѣ произведенія степеней его первоначальныхъ множителей, опредѣлимъ условія, при которыхъ логариѳмъ даннаго числа N будетъ соизмѣримымъ числомъ, ограничиваясь разсмотрѣніемъ случая, когда основаніе цѣлое положительное число.

1. Требуется опредѣлить условія, при которыхъ цѣлое число N имѣетъ соизмѣримый логариѳмъ $\frac{m}{n}$, т.-е. при какихъ условіяхъ возможно равенство $N=a^{\frac{m}{n}}$, или, по возвышеніи обѣихъ частей въ n-ую степень, равенство

$$N^n=a^m\ .\ .\ .\ (1).$$

Пусть основаніе a разлагается на первоначальные множители α, β, γ соотвѣтственно въ степеняхъ r, s, t, такъ что $a=\alpha^r\beta^s\gamma^t$; равенство (1) будетъ

$$N^n=\alpha^{mr}\beta^{ms}\gamma^{mt}\ .\ .\ .\ (2).$$

Такъ какъ вторая часть его дѣлится на α, β и γ, то и первая должна дѣлиться на тѣ же числа, иначе вышло бы, что дробь равна цѣлому. Сверхъ того N не можетъ содержать другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ α, β и γ, по той же причинѣ. Слѣд. должно положить $N=\alpha^{r_1}\beta^{s_1}\gamma^{t_1}$. Ур. (2) приметъ видъ:

$$\alpha^{nr_1}\beta^{ns_1}\gamma^{nt_1}=\alpha^{mr}\beta^{ms}\gamma^{mt}.$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы было $nr_1=mr$; $ns_1=ms$; $nt_1=mt$, откуда $\frac{r}{r_1}=\frac{s}{s_1}=\frac{t}{t_1}$; заключаемъ: *чтобы цѣлое число N при цѣломъ основаніи a имѣло соизмѣримый логариѳмъ, необходимо, чтобы a и N состояли изъ одинаковыхъ первоначальныхъ множителей, и чтобы показатели этихъ множителей были пропорціональны между собою.*

2. Пусть дана неправильная дробь $\frac{c}{d}$, гдѣ $c>d$. Пусть логариѳмъ (въ данномъ случаѣ—положительный) будетъ = соизмѣримой дроби $\frac{m}{n}$; имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}}=\frac{c}{d},\quad \text{или}\quad a^m=\frac{c^n}{d^n}.$$

Но n-ая степень несократимой дроби $\frac{c}{d}$ есть также дробь несократимая, и слѣд. не можетъ равняться цѣлому числу a^m: допущеніе невозможно, а потому заключаемъ: *при цѣломъ основаніи неправильная дробь не можетъ имѣть соизмѣримаго логариѳма.*

3. Пусть, наконецъ, данное число есть дробь правильная $\frac{c}{d}$, гдѣ, слѣдовательно, $c<d$. При $a>1$ логариѳмы правильныхъ дробей отрицательны; пусть этотъ отрицательный логариѳмъ есть $-\frac{m}{n}$. Въ такомъ случаѣ

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{c}{d},\quad \text{откуда}\quad a^m=\frac{d^n}{c^n}.$$

Такъ какъ a^m — число цѣлое, то предыдущее равенство возможно только при $c^n = 1$, или $c = 1$; но въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$a^m = d^n,$$

а такое равенство возможно только тогда, когда d и a состоятъ изъ одинаковыхъ первоначальныхъ множителей и показатели этихъ множителей пропорціональны. Итакъ:

При цѣломъ основаніи логариѳмы правильныхъ дробей несоизмѣримы, за исключеніемъ такихъ дробей, у которыхъ числитель $= 1$, а знаменатель состоитъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей какъ и основаніе, а показатели этихъ множителей пропорціональны.

786. *Приложеніе.* Приложимъ эти изысканія къ случаю обыкновенныхъ или бригговыхъ логариѳмовъ. Здѣсь основаніе равно $10 = 2 \cdot 5$. Слѣд., по доказанному, изъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ только тѣ имѣютъ соизмѣримые логариѳмы, которыя состоятъ изъ тѣхъ же первоначальныхъ множителей, какъ и основаніе, въ данномъ случаѣ, изъ 2 и 5, т.-е. числа вида $2^r . 5^s$. Притомъ, r и s должны быть пропорціональны показателямъ основанія, т.-е. должно быть: $r : 1 = s : 1$, или $r = s$. Такимъ образомъ, цѣлое число, имѣющее при основаніи $= 10$ соизмѣримый логариѳмъ, имѣетъ видъ $2^r . 5^r = (2 . 5)^r = 10^r$, т.-е. представляетъ точную степень 10-ти.

Затѣмъ, неправильныя дроби имѣютъ логариѳмы несоизмѣримые; а изъ правильныхъ дробей только тѣ имѣютъ соизмѣримые логариѳмы, у которыхъ числитель $= 1$, а знаменатель есть точная степень 10, т.-е. дроби $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, . . .

ГЛАВА L.

Вычисленіе логариѳмовъ.—Ряды для показательной функціи и логариѳмическіе.

787. Опредѣленіе предѣла $\left[\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^\omega\right]_{\omega=\infty}$.—Разсмотримъ сначала $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$, и пусть, во-первыхъ, ω проходитъ область натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, . . . до безконечности. Формула бинома для цѣлаго положительнаго n даетъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots (A)$$

Отсюда, во-первыхъ, видно, что каково бы ни было число $n > 1$, всегда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$. Во-вторыхъ, что по мѣрѣ того какъ n растетъ, каждый членъ разложенія замѣняется членомъ того же порядка, численно большимъ, и въ то же время число членовъ увеличивается: слѣд., $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ постоянно увеличивается вмѣстѣ съ n:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 < \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 < \ldots$$

Если въ каждомъ членѣ разложенія (A) откинуть дроби, стоящія въ скобкахъ $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{3}, \frac{3}{n}, \dots\right)$, то каждый членъ разложенія увеличится, и слѣд.,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1.2}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}.$$

Тѣмъ болѣе вѣрно будетъ неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда видно, что при $n=\infty$ будетъ

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] < \lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right),$$

и какъ $\lim\left(2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)_{n=\infty}=3$, то заключаемъ, что

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

каково бы ни было цѣлое положительное число n.

Такимъ образомъ, функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ постоянно возрастаетъ съ увеличеніемъ n, но всегда остается между 2 и 3, слѣд., стремится къ нѣкоторому предѣлу, лежащему между 2 и 3. Этотъ lim обыкновенно обозначаютъ буквою e. Итакъ, при цѣломъ положительномъ ω, приближающемся къ ∞:

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right]=e.$$

Если ω не есть цѣлое число, но положительно, то всегда можно дать два цѣлыя положительныя послѣдовательныя числа m и $m+1$, между которыми лежитъ ω; тогда очевидна справедливость неравенствъ

$$1+\frac{1}{m+1}<1+\frac{1}{\omega}<1+\frac{1}{m}.$$

Возвышая первый биномъ въ m-ую, второй въ степень ω третій въ степень $m+1$, не нарушимъ смысла неравенствъ, а потому

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m<\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Умноживъ и раздѣливъ первое на $1+\frac{1}{m+1}$, а третье разложивъ на множители, находимъ

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}<\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Переходя къ предѣлу, увеличиваемъ ω до ∞, тогда и m и $m+1$ будутъ приближаться къ ∞. По теоремѣ о предѣлѣ частнаго, имѣемъ

$$\lim\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}}\right\}_{m=\infty}=\frac{\lim\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\right]}{\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)}=e,$$

ибо, по доказанному, для m цѣлаго, $\lim\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\right]_{m=\infty}=e$; $\lim\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=1$, затѣмъ, $\lim\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]_{m=\infty}=e\cdot 1=e$.

Это означаетъ, что $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ заключается между двумя перемѣнными, имѣющими общій предѣлъ e, слѣд. и

$$\lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=e,$$

и въ томъ случаѣ, когда положительное число ω, приближающееся къ ∞, не есть цѣлое.

Если ω — число отрицательное, то можно положить $\omega=-(\rho+1)$, гдѣ ρ — положительное, неограниченно возрастающее цѣлое или дробное число. Имѣемъ:

$$\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1-\frac{1}{\rho+1}\right)^{-(\rho+1)}=\left[\frac{\rho}{\rho+1}\right]^{-(\rho+1)}=\left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^{\rho+1}=\left(1+\frac{1}{\rho}\right)^{\rho+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\rho}\right)^{\rho}\left(1+\frac{1}{\rho}\right).$$

Первый множитель приближается къ предѣлу e, второй къ 1, сл.

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]=e.$$

Такимъ образомъ, послѣднее равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ неограниченно-возрастающемъ дѣйствительномъ ω.

Нерѣдко этому равенству даютъ другой видъ, подставляя $\frac{1}{\omega}=\delta$; имѣемъ:

$$\lim\left[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]=e,$$

гдѣ δ означаетъ количество, приближающееся къ нулю.

Теперь легко уже опредѣлить предѣлъ общаго выраженія

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{\frac{\omega}{z}}\right)^{\omega},$$

гдѣ z — нѣкоторое дѣйствительное количество.

Дробь $\frac{\omega}{z}$ вмѣстѣ съ ω стремится къ ∞, и потому, положивъ $\frac{\omega}{z}=\omega'$, откуда $\omega=\omega' z$, имѣемъ

$$\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}=\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega' z}=\left[\left(1+\frac{1}{\omega'}\right)^{\omega'}\right]^{z}.$$

Но предѣлъ степени (z) перемѣннаго равенъ той же степени предѣла этого перемѣннаго, такъ что послѣднее выраженіе, въ предѣлѣ, даетъ e^{z}. Итакъ

$$\lim\left[\left(1+\frac{z}{\omega}\right)^{\omega}\right]_{\omega=\infty}=e^{z}\ldots(1).$$

788. Разложеніе e^{z} въ рядъ. — Послѣднее уравненіе показываетъ, что e^{z} есть предѣлъ, къ которому стремится $\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}$ при неограниченномъ увеличеніи m. Для нахожденія этого предѣла нужно разложить $\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}$ по формулѣ бинома и затѣмъ положить $m=\infty$.

По формулѣ (III) § 771, полагая m цѣлымъ и положительнымъ и $k > mx$, имѣемъ:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(k-2)]}{1.2.3\dots(k-1)}x^{k-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots[m-(k-1)]}{1.2.3\dots k}\cdot\rho\frac{x^k}{1-\left[\frac{mx}{k}\right]},$$

гдѣ ρ означаетъ положительную правильную дробь. Чтобы по этой формулѣ написать разложеніе для $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$, нужно, очевидно, положить $x = \frac{z}{m}$ и $k > z$. Найдемъ

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1 + z + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}z^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}z^3 + \dots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-2}{m}\right)}{1.2.3\dots(k-1)}z^{k-1} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1.2.3\dots k}\cdot\rho\frac{z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}.$$

Мы ищемъ предѣлъ $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ при $m = \infty$; для этого увеличиваемъ неограниченно m, не измѣняя произвольнаго цѣлаго числа k. Если перемѣнныя равны, то равны и предѣлы ихъ, а потому приравниваемъ предѣлы обѣихъ частей равенства. Предѣлъ лѣвой части есть e^z, а въ правой дроби $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{k-1}{m}$ имѣютъ общимъ предѣломъ нуль; слѣд.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots + \frac{z^{k-1}}{1.2.3\dots(k-1)} + \frac{1}{1.2.3\dots k}\cdot\frac{\rho z^k}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}. \quad (II)$$

причемъ $k > z$, $0 < \rho < 1$.

Такимъ образомъ, мы получили конечную строку для e^z, — съ остаточнымъ членомъ, но изъ нея уже легко вывести безконечный рядъ для e^z. Для этого переносимъ остаточный членъ въ первую часть:

$$e^z - \frac{\rho}{1-\left[\frac{z}{k}\right]}\cdot\frac{z^k}{1.2\dots k} = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots + \frac{z^{k-1}}{1.2\dots(k-1)} \dots (III)$$

и увеличиваемъ k, означающее число членовъ второй части, до безконечности. Выше мы доказали, что $\lim\left[\frac{z^k}{1.2.3\dots k}\right]_{k=\infty} = 0$, слѣд. предыдущее равенство обращается въ безконечный рядъ

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots (IV)$$

гдѣ z какая угодно конечная величина.

789. Рядъ для e; опредѣленіе числовой величины e; несоизмѣримость числа e.

Если, въ частности, положимъ $z = 1$, то ряды (II) и (IV) дадутъ.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots(k-1)} + \frac{1}{1.2.3\dots(k-1)}\cdot\frac{\rho}{k-1} \quad (V)$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots (VI)$$

Съ этими рядами связаны существенныя замѣчанія. Во-первыхъ, что касается формулы (V), то она служитъ для численнаго опредѣленія e, причемъ точность можетъ быть доведена до какой угодно степени выборомъ достаточно большого значенія для k. Такъ, при $k = 11$ найдемъ.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 2{,}7182818011,$$

причемъ остатокъ $= \frac{1}{1.2.3\ldots10} \cdot \frac{\rho}{10} = 0{,}0000000276\rho$, слѣд. если дадимъ ρ его наименьшее значеніе 0, а затѣмъ наибольшее его значеніе 1, то найдемъ

$$2{,}7182818011 < e < 2{,}7182818287;$$

откуда, взявъ $e = 2{,}7182818$, будемъ имѣть его величину точно до 7-го десятичнаго знака включительно. Это число было принято *Неперомъ* за основаніе предложенной имъ системы логариѳмовъ, по причинѣ, которая вскорѣ будетъ указана.

Съ помощію формулы (VI) рѣшается вопросъ о томъ, есть ли e число соизмѣримое или несоизмѣримое. Сумма ряда VI, начиная съ третьяго члена, т. е

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \cdots \text{(VII)}$$

менѣе суммы ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \frac{1}{2.2.2.2} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1;$$

слѣд. сумма (VII) есть *правильная* дробь. Допустимъ, что эта дробь соизмѣрима и $= \frac{p}{q}$, т.-е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots = \frac{p}{q},$$

гдѣ p и $q > p$ цѣлыя положительныя числа. Умноживъ обѣ части на $2.3.4\ldots q$, получимъ

$$3.4.5\ldots q + 4.5.6\ldots q + 5.6\ldots q + \ldots + 1$$

$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots = p.2.3.4\ldots(q-1)$$

Сумма членовъ до $\frac{1}{q+1}$ есть сумма цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, дающая нѣкоторое цѣлое положительное число M; вторая часть также есть цѣлое положительное число, котороe назовемъ N; сл.

$$M + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots = N$$

Но сумма $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$ меньше $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} \ldots = \frac{1}{q+1} : \left(1 - \frac{1}{q+1}\right) = \frac{1}{q}$, а какъ $q > 1$, то разсматриваемая сумма меньше 1. Такимъ образомъ, цѣлое число M, сложенное съ правильною дробью, должно давать цѣлое число N, но это невозможно, а потому сумма ряда (VI) не можетъ равняться никакой соизмѣримой дроби, а сл. и e есть число несоизмѣримое.

Приведенное доказательство несоизмѣримости числа e принадлежитъ *Стенвилю*.

790. Разложеніе a^x. Мы нашли разложеніе показательной функціи съ основаніемъ e; пусть основаніе будетъ какое угодно число a. Положивъ $e^z = a^x$, и взявъ отъ обѣихъ частей логариѳмъ по какому угодно основанію, получимъ

$$z\lg e = x.\lg a, \quad \text{откуда} \quad z = \frac{x.\lg a}{\lg e}.$$

Подставивъ въ формулу (IV) a^x вмѣсто e^z, и $\frac{x\lg a}{\lg e}$ вмѣсто z, найдемъ

$$a^x = 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{x.\lg a}{\lg e} + \frac{1}{1.2}\cdot\left(\frac{x.\lg a}{\lg e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x.\lg a}{\lg e}\right)^3 + \cdots \text{(VIII)}$$

Основаніе, по которому взяты логариѳмы, здѣсь совершенно произвольно; взявъ e за основаніе, и замѣтивъ, что въ такомъ случаѣ $\lg_e e = 1$, найдемъ (условившись обозначать Неперовы логариѳмы характеристикою l)

$$a^x = 1 + xla + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \cdots \text{(IX)}$$

Взявъ за основаніе a, найдемъ рядъ

$$a^x = 1 + \frac{1}{1}\cdot\left(\frac{x}{\lg_a e}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{\lg_a e}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{\lg_a e}\right)^3 + \cdots \text{(X)}$$

Послѣдній выводъ имѣетъ то значеніе, что даетъ возможность находить число по данному логариѳму; въ самомъ дѣлѣ, изъ ур—нія $a^x = y$ имѣемъ $x = \lg_a y$; слѣд.

$$y = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{\lg_a y}{\lg_a e}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\lg_a y}{\lg_a e}\right)^2 + \cdots \text{(XI)}$$

Въ случаѣ $a = e$ имѣемъ:

$$y = 1 + ly + \frac{1}{1.2}(ly)^2 + \frac{1}{1.2.3}(ly)^3 + \cdots \text{(XII)}$$

Отсюда и видно, что логариѳмическая система съ основаніемъ e есть простѣйшая, а потому наиболѣе естественная; вслѣдствіе этого она и названа *натуральною*.

791. Логариѳмическіе ряды. Исходнымъ пунктомъ послужитъ $\lim\left(\frac{a^\theta - 1}{\theta}\right)$ при $\theta = 0$.

Пусть θ означаетъ число, приближающееся къ нулю; тогда a^θ будетъ имѣть предѣломъ 1, а разность $a^\theta - 1$ нуль, поэтому можно положить $a^\theta - 1 = \delta$, гдѣ δ исчезаетъ вмѣстѣ съ θ. Написавъ это ур—ніе въ видѣ

$$a^\theta = 1 + \delta, \text{ заключаемъ, что } \theta = \lg_a(1 + \delta).$$

Раздѣливъ обѣ части ур—нія $a^\theta - 1 = \delta$ на θ, найдемъ выраженіе, предѣлъ котораго ищемъ, именно

$$\frac{a^\theta - 1}{\theta} = \frac{\delta}{\theta} = \frac{\delta}{\lg_a(1 + \delta)} = \frac{1}{\frac{1}{\delta}\lg_a(1 + \delta)} = \frac{1}{\lg_a\left[(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}\right]}.$$

Переходя къ предѣлу, полагаемъ $\theta = 0$; вмѣстѣ съ этимъ и $\delta = 0$; въ первой части получимъ неопредѣленность $\frac{0}{0}$, а послѣднее выраженіе раскроетъ истинное значеніе этой неопредѣленности; именно получимъ

$$\lim\frac{a^\theta - 1}{\theta} = \frac{1}{\lg_a e}\cdots(1)$$

Это равенство можно представить въ болѣе удобной формѣ, принявъ за основаніе логариѳмовъ число e. Логариѳмируя обѣ части равенства $a = e^{la}$ по основанію a, находимъ

$$1 = la.\lg_a e, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lg_a e} = la.$$

Подстановка въ (1) дастъ

$$\lim \frac{a^\delta - 1}{\delta} = la.$$

Положивъ $a = 1 + x$, имѣемъ

$$l(1+x) = \lim \frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta},$$

откуда видна возможность примѣненія биноміальнаго ряда для разложенія $l(1+x)$. При разложеніи $(1+x)^\delta$ будемъ разумѣть подъ δ нѣкоторую положительную правильную дробь; слѣд. x должны подчинить условію $-1 < x < +1$. Примѣняя формулу (V) остатка биноміальнаго ряда, т.-е. взявъ

$$k > \delta, \quad |x| < 1, \quad 0 < \theta < 1,$$

имѣемъ

$$(1+x)^\delta - 1 = \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta-1)}{1.2}x^2 + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{\delta(\delta-1)\ldots[\delta-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)}x^{k-1} + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)\ldots[\delta-(k-1)]}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\theta x^k}{1}.$$

Перенеся 1 въ первую часть и раздѣливъ уравненіе на δ, получимъ

$$\frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{1}x + \frac{\delta-1}{1.2}x^2 + \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots[\delta-(k-2)]}{1.2.3\ldots(k-1)}x^{k-1} + \frac{(\delta-1)(\delta-2)\ldots[\delta-(k-1)]}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{\theta x^k}{1-\theta}.$$

Переходя къ предѣлу, т.-е. полагая $\delta = 0$, и замѣчая, что равенство перемѣнныхъ ведетъ за собою равенство ихъ предѣловъ, причемъ предѣлъ первой части $= l(1+x)$, получаемъ:

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1}x^{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{\theta x^k}{1-\theta}.$$

Это — рядъ конечный; для полученія безконечнаго ряда переносимъ остатокъ въ первую часть:

$$l(1+x) - \frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{\theta x^k}{1-\theta} = x - \frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{k-2}}{k-1}\cdot x^{k-1},$$

и заставляемъ произвольное цѣлое k, означающее число членовъ, возрастать до безконечности. Такъ какъ x есть правильная дробь (положит. или отрицат.), то $\lim x^k = 0$, такъ что въ предѣлѣ первая часть обратится въ $l(1+x)$, а вторая дастъ безконечный рядъ; находимъ разложеніе

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \quad (2)$$

$$-1 < x < +1.$$

Рядъ этотъ впервые встрѣчается у *Меркатора* (1686). Если въ формулѣ (2) вмѣсто x подставимъ $-x$, то получимъ:

$$l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots \quad (3)$$

Такъ какъ въ рядахъ (2) и (3) x есть правильная дробь, то они могутъ служить только для вычисленія логариѳмовъ чиселъ, меньшихъ 2. Чтобы получить ряды для вычисленія логариѳмовъ какихъ угодно чиселъ, притомъ ряды съ сильнѣйшею сходимостью, вычтемъ формулу (3) изъ (2); получимъ

$$l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right] \dots (4)$$

рядъ, сходящійся при $-1 < x < +1$.

Положивъ $\frac{1+x}{1-x} = z$, откуда $x = \frac{z-1}{z+1}$, получимъ изъ ур. (4) слѣдующее

$$lz = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \dots\right] \dots (5)$$

имѣющее мѣсто при всякомъ положительномъ z, ибо въ такомъ случаѣ x всегда будетъ правильною дробью. При небольшомъ z формула (5) всего удобнѣе, такъ напр. при $z = 2$ получимъ:

$$l2 = 2\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right].$$

Если рядъ, заключенный въ скобки, прервать на членѣ $\frac{1}{m.3^m}$, гдѣ m нѣкоторое нечетное число, то остатокъ

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}} + \frac{1}{(m+4).3^{m+4}} + \frac{1}{(m+6).3^{m+6}} + \dots$$

будетъ меньше

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}}\left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots\right\} =$$

$$\frac{1}{(m+2).3^{m+2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{8(m+2).3^m}.$$

Такимъ образомъ, если ε будетъ неизвѣстная правильная положительная дробь, то

$$l2 = 2\left[\frac{1}{1.3^1} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots + \frac{1}{m.3^m}\right] + \frac{\varepsilon}{4(m+2).3^m}.$$

Послѣдовательнымъ нахожденіемъ степеней $\frac{1}{3}$ получимъ, что остатокъ $\frac{1}{4.17.3^{15}} = 0,000000001$, слѣд., положивъ $m = 15$, получимъ величину $l2$ вѣрно до 8 десятичныхъ знаковъ, именно: $l2 = 0,69314718$.

Если извѣстенъ la, то найдемъ $l(a+b)$ на основаніи замѣчанія, что

$$l(a+b) = l\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] = la + l\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

причемъ послѣдній l можно разложить по формулѣ (2), если только абсолютная величина b меньше a; найдемъ

$$l(a+b) = la + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \dots$$

рядъ сходящійся при $a^2 > b^2$.

Такимъ образомъ можно, напр., найти $l3$, положивъ $a = 2$, $b = 1$ и воспользовавшись уже вычисленною величиною $l2$.

Болѣе удобная формула для вычисленія $l(a + b)$ получается изъ замѣчанія, что

$$l(a+b) = la + l\left(1+\frac{b}{a}\right) = la + l\left[\frac{1+\frac{b}{2a+b}}{1-\frac{b}{2a+b}}\right].$$

разложивъ послѣдній l по формулѣ (4), получимъ

$$l(a+b) = la + 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^5 + \cdots\right\} \quad \ldots (6)$$

рядъ сходящійся при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ a и b, потому что тогда $\frac{b}{2a+b}$ будетъ правильною дробью. Положивъ $a = 2$, $b = 1$, получимъ

$$l3 = l2 + 2\left[\frac{2}{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^5 + \cdots\right].$$

Прервавъ рядъ на m-ой степени, можемъ опредѣлить остатокъ вышеуказаннымъ способомъ, и найдемъ, что онъ меньше

$$\frac{1}{24(m+2)}\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^m.$$

При $m = 9$ остатокъ будетъ такъ малъ, что не повліяетъ на 8-ое десятичное мѣсто; это дастъ: $l3 = 1,09861229$, и т. д.

Вычисленіе обыкновенныхъ логариѳмовъ. Модуль. — Построивъ указаннымъ путемъ таблицы натуральныхъ логариѳмовъ, можно изъ нихъ безъ труда вывести логариѳмы по какой угодно системѣ. Для этого надо натуральные логариѳмы помножить на модуль, равный, какъ извѣстно, $\frac{1}{la}$, его обозначаютъ чрезъ M_a. Для обыкновенныхъ логариѳмовъ $a = 10$; $l10 = l2 + l5 = 2,30258509$; слѣдовательно $M_{10} = \frac{1}{l10} = 0,43429448$. На это число и нужно множить натуральные логариѳмы для вычисленія обыкновенныхъ.

792. ТЕОРЕМА, *на которой основано употребленіе табличекъ пропорціональныхъ частей.*

Изъ формулы (6) предыдущаго § имѣемъ

$$l(a+b) - la = l\left(\frac{a+b}{a}\right) = 2\left\{\frac{b}{2a+b} + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \cdots\right\}.$$

Для полученія логариѳма по другой системѣ, напр. по десятичной, надо этотъ логариѳмъ помножить на модуль M_{10}. Умножая обѣ части на M_{10}, получимъ

$$M_{10}\, l\left(\frac{a+b}{a}\right), \text{ или } \lg_{10}\left(\frac{a+b}{a}\right) = 2M_{10}\left\{\frac{b}{2a+b} + \cdots\right\}$$

Удержавъ здѣсь только первый членъ $\frac{b}{2a+b}$ и обративъ его дѣленіемъ въ $\frac{b}{2a} - \frac{b^2}{2a(2a+b)}$, получимъ приблизительную формулу

$$\lg(a+b) - \lg a = \frac{b \cdot M_{10}}{a} - \frac{b^2 \cdot M_{10}}{a(2a+b)}.$$

При $b < 1$ и $a > 1000$ второй членъ меньше 0,000000002, а потому можно имъ пренебречь; отъ этого получимъ:

$$\lg(a+b)-\lg a=\frac{b.M_{10}}{a}.$$

Подставивъ въ эту формулу вмѣсто b другое число $b'<1$, будемъ имѣть

$$\lg(a+b')-\lg a=\frac{b'.M_{10}}{a}.$$

Раздѣливъ это равенство на предыдущее, имѣемъ пропорцію

$$\frac{\lg(a+b')-\lg a}{\lg(a+b)-\lg a}=\frac{b'}{b}.$$

Слѣд. *разности между логариѳмами пропорціональны разностямъ между числами*, если только разности чиселъ не превышаютъ 1, а числа не менѣе 1000, ибо только при этихъ условіяхъ и могла быть установлена послѣдняя пропорція

ГЛАВА LI.

О десятичныхъ логариѳмахъ.—Ихъ отличительныя свойства.—Расположеніе и употребленіе таблицъ. Вычисленія при помощи логариѳмовъ.

Отличительныя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

793. Въ этихъ логариѳмахъ число N связано съ своимъ логариѳмомъ x показательнымъ уравненіемъ $10^x=N$. Такъ какъ здѣсь основаніе больше единицы, то логариѳмы чиселъ, большихъ 1, положительны, логариѳмы же чиселъ, меньшихъ 1, отрицательны; затѣмъ, логариѳмъ основанія равенъ 1, а $\lg 1=0$.

794. Логариѳмы чиселъ, большихъ 1. Возвышая 10 въ цѣлыя положительныя степени, имѣемъ:

$$10^0=1;\ 10^1=10;\ 10^2=100;\ 10^3=1000;\ 10^4=10000;\ .\ .\ .\ ;\ 10^n=10^n.$$

Отсюда, замѣчая, что показатели основанія 10 суть логариѳмы вторыхъ частей, имѣемъ:

$$\lg 1=0;\ \lg 10=1;\ \lg 100=2;\ \lg 1000=3,\ \lg 10000=4;\ \ .\ .\ .\ ;\ \lg 10^n=n.$$

Заключаемъ, что *логариѳмъ числа, состоящаго изъ 1 съ нулями, т.-е. точной степени 10, равенъ числу нулей при единицѣ*. Эти точныя степени 10 суть единственныя числа, большія 1, которыхъ логариѳмы *соизмѣримы*; всѣ остальныя числа большія 1 (цѣлыя и неправильныя дроби), какъ мы уже знаемъ, имѣютъ логариѳмы *несоизмѣримые*, которые вычислить можно только приблизительно. Ихъ обыкновенно выражаютъ десятичными дробями.

Пусть, напр., имѣемъ число 452,48. Число это больше 100, но меньше 1000, слѣд. его логариѳмъ содержится между lg 100 и lg 1000, т.-е. между 2 и 3, а потому равенъ 2 + несоизмѣримая прав. дробь. Цѣлое число 2 называется *характеристикою*, дробь — *мантиссою*. Изъ предыдущаго примѣра заключаемъ, что *характеристика логариѳма числа большаго 1, равна числу цифръ безъ 1 въ цѣлой части даннаго числа.*

Докажемъ, что это правило для опредѣленія характеристики логариѳма даннаго числа — общее. Пусть число A содержитъ въ своей цѣлой части n цифръ; въ такомъ случаѣ

$$10^{n-1} \leqq A < 10^n,$$

ибо 10^{n-1} и 10^n суть наименьшія числа о n и $n+1$ цифрахъ.

Отсюда

$$n - 1 \leqq \lg A < n,$$

такъ какъ большему числу соотвѣтствуетъ и большій логариѳмъ. Итакъ, цѣлая часть $\lg A$ равна $n - 1$, т.-е. числу цифръ безъ единицы въ цѣлой части числа.

795. Логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1. Возвышая 10 въ цѣлыя отрицательныя степени, находимъ:

$$10^{-1} = \frac{1}{10};\quad 10^{-2} = \frac{1}{100};\quad 10^{-3} = \frac{1}{1000};\ \ldots;\quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n}.$$

Отсюда:

$$\lg\frac{1}{10} = -1;\ \lg\frac{1}{100} = -2;\ \lg\frac{1}{1000} = -3;\ \ldots;\ \lg\frac{1}{10^n} = -n.$$

Слѣд. логариѳмъ дроби, которой числитель = 1, а знаменатель есть точная степень 10, соизмѣримъ и *равенъ отрицательному числу нулей знаменателя.* Всѣ остальныя числа, меньшія 1, какъ доказано, имѣютъ логариѳмы несоизмѣримые и отрицательные.

Эти отрицательные логариѳмы представляютъ въ видѣ бинома, котораго цѣлый членъ отрицателенъ, а дробный положителенъ. Пусть, напр., данъ отрицательный логариѳмъ

$$-3{,}4827129.$$

Разбивъ его на два члена: $-3 - 0{,}4827129$, вычтемъ и придадимъ 1; дадимъ логариѳму видъ:

$$-4 + (1 - 0{,}4827129), \text{ или } -4 + 0{,}5172871.$$

Очевидно, разность между 1 и десятичною дробью получимъ, вычтя всѣ десятичныя цифры изъ 9, исключая послѣднюю значащую цифру справа, которую вычитаемъ изъ 10. Преобразованный биномъ условились писать въ видѣ 4,5172871, помѣщая знакъ (—) надъ цѣлою частью, къ которой онъ относится; цѣлая часть называется *отрицательною характеристикою.*

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ мантисса есть положительная десятичная часть логариѳма, а характеристика всегда цѣлое число, положительное, либо отрицательное, смотря по тому, больше данное число единицы, или меньше ея.

Примѣчаніе. Разность между 1 и дробью 0,4827129 называется *дополненіемъ* этой дроби до 1. Вообще дополненіемъ числа до 1, 2, 3 . . . . 10 называется разность между 1, 2, 3, ... 10 и даннымъ числомъ. Чтобы получить дополненіе логариѳма, надо послѣднюю цифру мантиссы вычесть изъ 10, а остальныя ея цифры изъ 9. Употребленіе дополненій даетъ возможность избѣгать вычитанія логариѳмовъ, замѣняя это дѣйствіе прида765іемъ ихъ дополненій: это особенно выгодно въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится дѣлать нѣсколько вычитаній.

Отрицательная характеристика логариѳма положительнаго числа, меньшаго 1, содержитъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько находится нулей слѣва отъ первой значущей цифры числа, включая сюда и 0 цѣлыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ число A, имѣющее слѣва отъ первой значущей цифры n нулей, имѣемъ:

$$\frac{1}{10^n} \leqq A < \frac{1}{10^{n-1}},$$

ибо значущія цифры числа начинаются съ десятичнаго знака порядка n. Отсюда

$$-n \leqq \lg A < -(n-1),$$

ибо большему числу принадлежитъ и большій логариѳмъ.

Заключаемъ, что $\lg A$ равенъ $(-n)$, или этому числу, увеличенному положительною правильною дробью, ибо этотъ логариѳмъ меньше $-n+1$; иначе говоря,

$$\lg A = -n + k, \quad \text{гдѣ} \quad 0 < k < 1;$$

слѣд. $(-n)$, по опредѣленію, и есть *отрицательная характеристика* $\lg A$. Такъ, логариѳмы чиселъ 0,529 и 0,00743 имѣютъ отрицательныя характеристики: -1 и -3.

796. *Если число увеличимъ въ 10, 100, 1000, . . . , вообще въ 10^p разъ, то характеристика логариѳма его увеличивается на 1, на 2, ... вообще, на p единицъ, мантисса же останется безъ перемѣны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\lg A = k + m, \quad 0 < m < 1,$$

гдѣ k — характеристика, положительная или отрицательная, а m — мантисса логариѳма A. Имѣемъ

$$\lg (A \cdot 10^p) = \lg A + p = k + m + p = (k + p) + m;$$

но p — число цѣлое, слѣд. и $(k+p)$ есть цѣлое, положительное или отрицательное, число; и какъ $0 < m < 1$, то $(k+p)$ есть характеристика, а m — мантисса логариѳма числа $A \cdot 10^p$. Итакъ, мантисса осталась безъ перемѣны, а характеристика увеличилась p единицами.

797. *Если число уменьшимъ въ 10, 100, 1000, . . . , вообще, въ 10^p разъ, то характеристика логариѳма уменьшится на 1, на 2, на 3, . . . , вообще, на p единицъ, мантисса же останется безъ перемѣны.*

Въ самомъ дѣлѣ, $\lg\frac{A}{10^p} = \lg A - \lg 10^p = k + m - p = (k - p) + m$, т.-е. характеристика уменьшилась p единицами.

Отсюда слѣдуетъ, что обѣ части логариѳма, *характеристика* и *мантисса*, суть функціи, рѣзко отличающіяся между собою. Мантисса зависитъ отъ абсолютнаго значенія цифръ и отъ порядка, въ которомъ онѣ слѣдуютъ одна за другою; характеристика же зависитъ только отъ положенія запятой, т.-е. отъ относительнаго значенія цифръ. Отъ перемѣщенія запятой мантисса не измѣняется; измѣняется только характеристика.

Расположеніе и употребленіе таблицъ логариѳмовъ.

798. Разсмотримъ употребленіе таблицъ логариѳмовъ *Бремикера.* Эти таблицы содержатъ логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100009, вычисленные съ семью десятичными знаками; такимъ образомъ изъ этихъ таблицъ можно прямо брать логариѳмы чиселъ одно-, дву-, . . . , пятизначныхъ.

799. Расположеніе таблицъ. —Страницы отъ второй до пятой включительно содержатъ логариѳмы чиселъ отъ 1 до 1000, причемъ въ таблицахъ (какъ и далѣе) помѣщены только мантиссы, такъ какъ характеристику легко опредѣлить по числу цифръ числа. Колонны подъ литерою N содержатъ числа, противъ которыхъ подъ знакомъ lg находятся мантиссы соотвѣтствующихъ логариѳмовъ. Съ шестой до 185 страницы расположеніе таблицъ таково: въ колоннѣ подъ литерою N находятся первыя четыре цифры чиселъ, пятыя же цифры помѣщены въ первой горизонтальной строкѣ: 0, 1, 2, ... 9; мантиссы же расположены такимъ образомъ: такъ какъ первыя три цифры мантиссы одинаковы для нѣсколькихъ послѣдовательныхъ логариѳмовъ чиселъ, то онѣ написаны одинъ разъ для всѣхъ этихъ чиселъ, противъ наименьшаго числа колонны N, къ которой онѣ принадлежатъ, и въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 0. Послѣдніе четыре знака мантиссы помѣщены противъ четырехъ первыхъ цифръ числа и въ вертикальной колоннѣ, имѣющей въ заголовкѣ пятую цифру числа. Сверхъ того, всѣ страницы, начиная съ 6-й, содержатъ таблички подъ литерами P. P.: это — *таблички пропорціональныхъ частей*, употребленіе которыхъ будетъ указано въ своемъ мѣстѣ.

800. Употребленіе таблицъ. Помощію таблицъ рѣшаются два вопроса: 1) о нахожденіи логариѳма даннаго числа и 2) о нахожденіи числа, соотвѣтствующаго данному логариѳму.

Первый вопросъ.

Нахожденіе логариѳма цѣлаго числа.

801. Первый случай: *данное число находится въ таблицахъ.* Пусть требуется найти lg 36459. На стр. 58 находимъ первыя три цифры мантиссы: 561; послѣднія же четыре цифры ея помѣщены въ горизонтальной строкѣ противъ числа 3645 и въ вертикальной колоннѣ подъ цифрою 9, именно: 8048; характеристика же логариѳма, по § 794, равна 4, слѣд. lg 36459 = 4,5618048.

Пусть еще требуется найти lg 48868; первыя три цифры мантиссы (стр. 83) суть 688; для послѣднихъ четырехъ, на пересѣченіи горизонт. строки противъ числа 4886 съ вертик. колонною подъ цифрою 8, находимъ $\overline{0}246$; черта надъ первою изъ этихъ цифръ показываетъ, что предшествующая цифра (8) мантиссы должна быть увеличена на 1. Такимъ образомъ имѣемъ: lg 48868 = 4,6890246.

Когда за пятью значущими цифрами числа слѣдуютъ нули, напр. 48868000, то, замѣчая, что это число больше 48868 въ 1000 разъ, на основаніи § 796, заключаемъ, что его логариѳмъ больше логариѳма 48868 на 3 единицы, такъ что lg 48868000 = 7,6890246.

802 Второй случай: *данное число не содержится въ таблицахъ.* Пусть требуется найти lg числа, содержащаго болѣе пяти цифръ, напр. числа 41592687. Такъ какъ логариѳма этого числа нѣтъ въ таблицахъ, то отдѣляемъ отъ правой руки къ лѣвой столько десятичныхъ цифръ, чтобы слѣва отъ запятой получилось пятизначное число; такимъ образомъ имѣемъ 41592,687. Это число, будучи въ 1000 разъ меньше даннаго, имѣетъ логариѳмъ съ тою же мантиссою, какъ и заданное число. Находимъ мантиссу логариѳма числа 41592,687. Число это заключается между 41592 и 41593, откуда изъ таблицъ имѣемъ, что логариѳмъ его содержится между

$$\lg 41592 = 4,6190098 \quad \text{и} \quad \lg 41593 = 4,6190202.$$

Разность между числами 41592 и 41593 равна 1, а между соотвѣтствующими логариѳмами — составляетъ 0,0000104. Отсюда видно, что если къ ближайшему меньшему числу придадимъ 1, то къ соотвѣтствующему логариѳму слѣдуетъ придать 0,0000104. Но намъ нужно ближайшее м. ч. увеличить не на цѣлую единицу, а на 0,687; спрашивается: на сколько соотвѣтственно этому придется увеличить ближ. меньш. логар. 4,6190098? Для рѣшенія вопроса замѣчаемъ, что по § 792: если разности между числами не превышаютъ 1 (что у насъ и есть), то разности между логариѳмами соотвѣтствующихъ чиселъ, большихъ 10000, пропорціональны разностямъ между числами. Основываясь на этомъ и называя искомую разность между lg 41592,687 и lg 41592 буквою *x*, имѣемъ пропорцію

$$x : 0,0000104 = 0,687 : 1, \quad \text{откуда} \quad x = 0,0000104 \times 0,687.$$

Умноженіе этихъ дробей дѣлается сокращенно при помощи слѣдующей таблички пропорціональныхъ частей (стр. 69).

	104
1	10.4
2	20.8
3	31.2
4	41.6
5	52.0
6	62.4
7	72.8
8	83.2
9	93.6

Въ ней помѣщены сокращенно, для сбереженія мѣста, произведенія 104 десятимилліонныхъ на 0,1; 0,2; . . . 0,9; причемъ точками въ этихъ произведеніяхъ отдѣлены десятимилліонныя доли отъ стомилліонныхъ долей. Такимъ образомъ эта табличка поставлена вмѣсто слѣдующей:

	0,0000104
0,1	0,00000104
0,2	0,00000208
0,3	0,00000312
0,4	0,00000416
0,5	0,00000520
0,6	0,00000624
0,7	0,00000728
0,8	0,00000832
0,9	0,00000936

При помощи ея можно прямо выписать частныя произведенія дроби 0,0000104 на 0,6, затѣмъ на 0,08 и наконецъ на 0,007. Первое изъ этихъ произведеній прямо беремъ изъ таблички, отдѣливъ стомилліонныя доли точкою, что даетъ 0,0000062.4. Уменьшивъ произведеніе 0,0000104 на 0,8, т.-е. 0,00000832 въ 10 разъ, имѣемъ произведеніе табличной разности на 0,08 или 0,0000008.32. Наконецъ, уменьшивъ произведеніе табл. разн. на 0,7 во сто разъ, имѣемъ произведеніе ея на 0,007, именно 0,0000000.728. Сложивъ эти частныя произведенія, имѣемъ

$$0{,}0000104 \times 0{,}687 = 0{,}0000071.448.$$

Это-то произведеніе и нужно придать къ логариѳму ближ. мен. числа, для полученія lg 41592,687; имѣемъ

$$\lg 41592{,}628 = 4{,}6190169.448.$$

Цифры 448, слѣдующія за десятимилліонными, откидываемъ, такъ какъ табличныя мантиссы имѣютъ только 7 десятичн. знаковъ; притомъ, если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ произведенія меньше 5, какъ въ нашемъ случаѣ, то послѣднюю сохраненную цифру произведенія оставляемъ безъ перемѣны; въ противномъ случаѣ, послѣднюю сохраненную цифру произведенія увеличиваютъ на 1. Такимъ образомъ:

$$\lg 41592{,}687 = 4{,}6190169.$$

Такъ какъ данное число въ 1000 разъ больше 41592,687, то, оставивъ мантиссу найденнаго логариѳма безъ перемѣны, увеличиваемъ характеристику на 3 единицы; такимъ образомъ:

$$\lg 41592687 = 7{,}6190169.$$

На практикѣ вычисленіе располагаютъ такъ:

$$\lg 41592 = 4{,}6190098$$

пропорц. часть для . . . . 0,6 . . . 62,4
» » » . . . . 0,08 . . . 8,32
» » » . . . . 0,007 . . . 0,728

$$\lg 41592{,}687 = 4{,}6190169{,}448.$$

Наконецъ

$$\lg 41592687 = 7{,}6190169.$$

803. *Примѣчаніе.* Пусть требуется найти lg числа, содержащаго болѣе 8 цифръ, напр. 7254689254 8. Характеристика логариѳма равна 10, а мантисса та же, что у логариѳма дроби 72546,892548. Опредѣляемъ мантиссу вышеизложеннымъ способомъ:

lg 72546 = 10,8606135
0,8 . . . . . 48.0
9 . . . . 5.40
2 . . . . 0.12
5 . . . . 0.030
4 . . . 0.0024
8 . . . 0.00048

$$\lg 72546892548 = 10{,}8606189.$$

Изъ этого примѣра видно, что уже 8-я цифра даннаго числа увеличиваетъ мантиссу только на 0,12, а потому не оказываетъ вліянія на 7-ю десятичную цифру мантиссы; поэтому, при отыскиваніи lg числа, содержащаго болѣе 8 цифръ, употребляютъ только первыя 8 цифръ, остальныя же, какъ не вліяющія на семизначную мантиссу, замѣняютъ нулями, или просто не пользуются ими при опредѣленіи поправки. Въ самомъ дѣлѣ, наибольшая табличная разность = 0,0000435, а потому девятая цифра числа, даже если она имѣетъ наиб. величину, т.-е. = 9, измѣнитъ мантиссу только на $0{,}0000435 \times 0{,}0009 = 0{,}00000003915$, т.-е. менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$ единицы 7-го десятичнаго мѣста: и это — въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ, когда и табл. разн. и девятая цифра числа имѣютъ наибольшія величины.

Изъ сказаннаго выводимъ *правило: если число имѣетъ болѣе 5 цифръ, то, отдѣливъ слѣва запятою 5 цифръ, подыскиваютъ логариѳмъ полученнаго пятизначнаго числа и придаютъ къ нему произведеніе табличной разности на три первые десятичные знака, составленное вышеуказаннымъ способомъ.*

Опредѣленіе логариѳма дроби.

804. Сначала разсмотримъ нахожденіе логариѳмовъ десятичныхъ дробей. Пусть требуется найти lg 347,84762. Замѣтивъ, что характеристика искомаго логариѳма = 2, а мантисса та же, что и у логариѳма числа 34784,762, имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} \lg 34784 & = 2{,}5413795 \\ \quad 0{,}7 & \qquad\quad 87.5 \\ \quad 0{,}06 & \qquad\quad\ \ 7.5 \\ \quad 0{,}002 & \qquad\quad\ \ 0.25 \end{array}$$

Откуда $\lg 347{,}84762 = 2{,}5413890.$

Для второго примѣра пусть требуется найти логариѳмъ десятичной дроби, меньшей 1, напр. lg 0,0076806. Имѣемъ:

$$\lg 0{,}0076806 = \lg \frac{76806}{10000000} = \lg 76806 - \lg 10000000$$

$$= 4{,}8853951 - 7.$$

Вычитая 7 изъ 4, чтобы мантиссу оставить положительною, получимъ отрицательную характеристику — 3, такъ что

$$\lg 0{,}0076806 = \overline{3}{,}8853951;$$

знакъ минусъ ставится *надъ* характеристикою для указанія, что только характеристика отрицательна.

Отсюда *правило: для нахожденія логариѳма десятичной дроби меньшей 1, беремъ мантиссу логариѳма числителя дроби, а въ характеристикѣ ставимъ столько отрицательныхъ единицъ, сколько въ лѣвой части дроби находится нулей, включая сюда и 0 цѣлыхъ.*

805. Пусть требуется найти lg обыкновенной дроби, напр. $\frac{8}{11}$. Имѣемъ:

$$\lg\frac{8}{11}=\lg 8-\lg 11=0{,}9030900-1{,}0413927=-0{,}1383027;$$

чтобы сдѣлать мантиссу положительною, поступаемъ по указаніямъ § 795 и находимъ: **1,8616973.**

Тотъ же результатъ получимъ, обращая $\frac{8}{11}$ въ десятичную дробь и ограничиваясь восемью цифрами въ числителѣ; находимъ 0,72727272. Слѣд.

$$\begin{array}{llr}
\lg\frac{8}{11}=\lg 0{,}72727272 & & =\bar{1}{,}8616957 \\
 & \text{для } 0{,}2 & 11.8 \\
 & \phantom{\text{для }} 0{,}07 & 4.13 \\
 & \phantom{\text{для }} 0{,}002 & 0.118 \\
\lg\frac{8}{11} & & =\bar{1}{,}8616973.
\end{array}$$

Второй вопросъ.

Нахожденіе числа, соотвѣтствующаго данному логариѳму.

806. Первый случай: *мантисса даннаго логариѳма находится въ таблицахъ.* Пусть $\lg x=3{,}7592749$; найти x? Находимъ прежде всего число 759, образуемое первыми тремя цифрами мантиссы: оно находится въ колоннѣ 0 на стр. 100; опускаясь въ этой же колоннѣ, доходимъ до числа 2144 — ближайшаго, меньшаго по сравненію съ 2749; наконецъ, въ горизонтальной строкѣ, начинающейся съ 2144, находимъ число 2749 въ колоннѣ подъ цифрою 8. Такъ какъ 2749 находится въ горизонт. строкѣ противъ числа 5744, то выписываемъ это число и приписавъ къ нему справа цифру 8, получаемъ 57448, а какъ характеристика даннаго логариѳма равна 3, то въ цѣлой части искомаго числа должно быть четыре цифры; а потому $x=5744{,}8$.

807. Второй случай: *данная мантисса не содержится въ таблицахъ.* Пусть $\lg x=3,\ 4592786$; найти x? Замѣнивъ характеристику 3 четырьмя, замѣчаемъ, что логариѳмъ 4,4592786 содержится между логариѳмами

4.4592869, которому соотвѣтствуетъ число 28793.

и

4.4592718, » » » 28792.

Разность этихъ логариѳмовъ = 0,0000151, а разность соотвѣтствующихъ чиселъ = 1. Заключаемъ, что если ближайшую меньшую мантиссу увеличить на 0,0000151, то бл. м. ч. 28792 надо увеличить на 1; но мантисса логариѳма 4,4592786 превышаетъ меньшую мантиссу только на 0,0000068; спрашивается, на какое число y, соотвѣтственно этому, искомое число x превышаетъ 28792? Зная теорему, что разности между числами пропорціональны разностямъ между логариѳмами, если первыя не превышаютъ 1, какъ и есть въ данномъ случаѣ, заключаемъ, что y во столько разъ меньше 1, во сколько 0,0000068 меньше 0,0000151, откуда пропорція

$y : 1 = 0{,}0000068 : 0{,}0000151$, или по умноженіи обоихъ членовъ второго отношенія на 10000000:

$$y : 1 = 68 : 151, \text{ откуда } y = 68 : 151.$$

Это частное вычисляемъ съ 2 десятичными знаками, такъ какъ остальные будутъ невѣрны; а для вычисленія пользуемся табличкой пропорціональныхъ частей для числа 151 (стр. 43), въ которой числа 15,1, 30,2, . . . , 135,9 суть произведенія изъ 151 на 0,1, 0,2, ... 0,9. Намъ нужно найти, на сколько слѣдуетъ помножить 151 для полученія 68. Табличка показываетъ, что, умноживъ 151 на 0,4, находимъ 60,4 — число ближ. меньшее къ 68, итакъ, въ частномъ имѣемъ, во-первыхъ, 0,4; вычтя произведеніе 60,4 изъ дѣлимаго, находимъ остатокъ 7,6. Наша табличка показываетъ далѣе, что, умноживъ 151 на 0,5, находимъ 75,5; а слѣд., умноживъ 151 на 0,05, найдемъ произведеніе 7,55 — ближ. м. къ остатку 7,6. Итакъ, въ частномъ имѣемъ еще 5 сотыхъ долей. Окончательно $y = 0{,}45$. Прибавивъ эту дробь къ 28792, имѣемъ 28792,45 — число, соотвѣтствующее логариѳму 4,4592786; а уменьшивъ это число въ 10 разъ, найдемъ число, соотвѣтствующее данному логариѳму. Итакъ $x = 2879{,}245$.

На практикѣ вычисленіе располагается такъ:

$\lg x = 3{,}4592786$
для 28792 . . . 2718
68
4 . . . 60,4
7,6
5 . . . 7,55
$x = 2879{,}245$

Еще примѣръ. Укажемъ нахожденіе числа, соотвѣтствующаго логариѳму съ отрицательною характеристикою (къ этому виду всегда слѣдуетъ приводить отрицательный логариѳмъ, такъ какъ въ таблицахъ нѣтъ отрицательныхъ мантиссъ). Пусть $\lg x = 2.4832107$, найти x? Придавая 6 къ данному lg, чтобы сдѣлать характеристику равную 4, и вычитая 6, имѣемъ

$$\lg x = 4{,}4832107 - 6 = 4{,}4832107 - \lg 1000000.$$

Находимъ число, соотвѣтствующее логариѳму $= 4.4832107$.

$\lg y = 4{,}4832107$
30423 . . . 020
87
6 . . . 85,8
1,2
1 . . . 1,43
$y = 30423{,}61$

Итакъ: $\lg x = \lg 30423{,}61 - \lg 1000000 = \lg \frac{30423{,}61}{1000000} = \lg 0{,}03042361$, откуда $x = 0{,}03042361$.

Отсюда *правило: для нахожденія числа, соотвѣтствующаго логариѳму съ отрицательною характеристикою, опредѣляемъ число, соотвѣтствующее положительной мантиссѣ, приписываемъ съ лѣвой стороны его столько нулей, сколько единицъ въ характеристикѣ, и первый слѣва нуль отдѣляемъ запятою.*

Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательною характеристикою.

808. Сложеніе. — Сложеніе мантиссъ, какъ чиселъ положительныхъ, не представляетъ никакихъ затрудненій: что касается характеристикъ, то ихъ соединяютъ по правилу приведенія подобныхъ членовъ. Напр.:

$$\begin{array}{r} 3,2173980 \\ \bar{7},8239172 \\ 2,3758630 \\ \hline -2+1,4171782,\ \text{или}\ \ \bar{1},4171782. \end{array}$$

809. Вычитаніе. — Пусть требуется сдѣлать вычитаніе:

$$\begin{array}{r} \bar{5},4567895 \\ \bar{2},6356789 \\ \hline 4,8211106 \end{array}$$

Прибавляя къ мантиссѣ уменьшаемаго 1, а къ характеристикѣ — 1, по вычитаніи мантиссъ находимъ 0,8211106; затѣмъ, вычтя изъ — 6 характеристику — 2 вычитаемаго, находимъ въ остаткѣ — 4; полный остатокъ 4,8211106.

810. Умноженіе. — Пусть требуется 2.4367894 × 5. Имѣемъ:

$$(-2+0,4367894)\times 5 \quad -10+2,1839470 \quad 8,1839470.$$

811. Дѣленіе. — Пусть требуется раздѣлить 6,2466724 на 2. Имѣемъ:

$$(-6+0,2466724):2 \quad 3+0,1233362=3,1233362.$$

Если бы тотъ же логариѳмъ требовалось раздѣлить на 5, то, чтобы характеристика дѣлилась на-цѣло на 5, слѣдуетъ къ ней придать — 4, а потому къ мантиссѣ надо придать + 4: такимъ образомъ имѣемъ:

$$6,2466724:5-(-10+4,2466724):5=-2+0,8493345=2,8493345.$$

Когда встрѣчается случай дѣленія логариѳмовъ съ отрицательными характеристиками, слѣдуетъ мантиссы ихъ дѣлать отрицательными. Напр., при раздѣленіи 2,3142890 : 1,3156782 замѣчаемъ, что дѣлимое = — 1,6857110, а потому частное приводится къ — 1,6857110 : 1,3156782.

812. Употреленіе дополненій. — Когда въ выраженіи содержится нѣсколько вычитаемыхъ логариѳмовъ, удобнѣе замѣнять ихъ дополненіями, такъ какъ притомъ оба дѣйствія — сложенія и вычитанія логариѳмовъ приводятся къ одному дѣйствію — сложенія ихъ. Такъ, употребляя дополненія до 10, замѣняемъ выраженіе

$$\lg a - \lg b + \lg c - \lg d - \lg e$$

равнымъ ему выраженіемъ

$$\lg a + (10 - \lg b) + \lg c + (10 - \lg d) + (10 - \lg e) - 30$$

или

$$\lg a + \mathrm{Co} \lg b + \lg c + \mathrm{Co} \lg d + \mathrm{Co} \lg e - 30$$

причемъ Co есть сокращеніе слова complementum — дополненіе.

813. Примѣры вычисленій съ логариѳмами.—I. *Вычислить* $x = \frac{\pi}{173}$. Логариѳмируя, имѣемъ: $\lg x = \lg \pi - \lg 173 = 0{,}4971499 - 2{,}2380461$, или, замѣнивъ вычитаемый lg его дополненіемъ до 3:

$$\lg x = 0{,}4971499 + (3 - 2{,}2380461) - 3 = 0{,}4971499 + 0{,}7619539 - 3$$
$$= \bar{2}{,}2591038.$$

Отсюда $x = 0{,}0181595$.

II. *Вычислить* $x = \frac{\pi}{0{,}00569}$. Логариѳмируя и употребляя дополненіе логариѳма знаменателя до 1, послѣдовательно имѣемъ:

$$\lg x = 0{,}4971499 - 3{,}7551123 = 0{,}4971499 + (1 - 3{,}7551123) - 1 =$$
$$= 0{,}4971499 + 2{,}2448877 = 2{,}7420376.$$

Отсюда $x = 552{,}125$.

III. *Вычислить* $x = \dfrac{0{,}0084321 \times \sqrt[3]{\frac{2}{15}}}{\sqrt{8{,}37}}$.

$$\lg x = \lg 0{,}0084321 + \frac{1}{3}(\lg 2 + \text{доп.} \lg 15 - 2) + \text{доп.} \frac{1}{2} \lg 8{,}37 - 1$$

$$\lg 0{,}0084321 = \bar{3}{,}9259357$$
$$\lg 2 = 0{,}3010300$$
$$\text{доп.} \lg 15 = 0{,}8239087 - 2$$
$$\bar{1}{,}1249387$$

по раздѣленіи на 3:

$$\bar{1}{,}7083129$$
$$\lg 8{,}37 = 0{,}9227255$$
$$\frac{1}{2} \lg 8{,}37 = 0{,}4613627$$
$$\text{доп.} \frac{1}{2} \lg 8{,}37 = 0{,}5386373 - 1.$$

Вычисленіе x.

$$\bar{3}{,}9259357$$
$$\bar{1}{,}7083129$$
$$1{,}5386373$$
$$\lg x = \bar{3}{,}1728859$$
$$x = 0{,}00148897.$$

IV. *Вычислить* $x = \sqrt{\frac{\sqrt[7]{15{,}92} \times \sqrt[3]{0{,}0182}}{0{,}00526 \times (196)^5}}$,

$$\begin{array}{rl|rl}
\lg 15{,}92 = & 1{,}2019431 & & 0{,}1717062 \\
\frac{1}{7}\lg 15{,}92 = & 0{,}1717062 & & 1{,}4200238 \\
\lg 0{,}0182 = & \bar{2}{,}2600714 & & 2{,}2790143 \\
\frac{1}{3}\lg 0{,}0182 = & 1{,}4200238 & & \overline{12}{,}5387195 \\
\text{доп. } \lg 0{,}00526 = & 2{,}2790143 & \lg x = & 10{,}4094638 : 2 \\
\lg 196 = & 2{,}2922561 & & 5{,}2047319 \\
\lg 196^5 = & 11{,}4612805 & x = & 0{,}00001602256.
\end{array}$$

ГЛАВА LII.

Приложенія логариѳмовъ. Рѣшеніе показательныхъ и логариѳмическихъ уравненій.— Финансовыя операціи: сложные проценты, срочные вклады, срочныя уплаты и т. д.

Рѣшеніе показательныхъ и логариѳмическихъ уравненій.

814. *Логариѳмическими уравненіями* называются такія, въ которыхъ неизвѣстныя входятъ своими логариѳмами, а ***показательными*** уравненіями называютъ такія, въ которыхъ неизвѣстныя входятъ показателями. Элементарная алгебра даетъ средства рѣшать такія ур—нія только въ случаяхъ, когда въ ур—ніе неизвѣстное входитъ исключительно только своими логариѳмами, или исключительно въ показателяхъ, и не можетъ рѣшать ур—ній смѣшаннаго типа. Напр. ур—нія

$$x + 3\lg x = 5, \quad x^2 + 8^x = 12.$$

неразрѣшимы средствами элементарной алгебры.

При рѣшеніи этого рода ур—ній нерѣдко приходится пользоваться тѣмъ принципомъ, что всякое положительное число имѣетъ лишь одинъ, вполнѣ опредѣленный, логариѳмъ, и обратно. Это обыкновенно выражаютъ, говоря: „*Если два числа равны, то и логариѳмы ихъ равны;* и обратно, *если два логариѳма равны, то и соотвѣтственныя имъ числа равны*".

815. Рѣшеніе уравненія $a^x = b$. — a есть положительное число, отличное отъ 1. Если $b < 0$, ур—ніе не имѣетъ рѣшеній. Итакъ, полагаемъ $b > 0$. Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей: $x \lg a = \lg b$, находимъ отсюда

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $0{,}06971^x = 0{,}00856$.

Логариѳмируя, находимъ

$$x \lg 0{,}06971 = \lg 0{,}00856,$$

откуда

$$x = \frac{\lg 0{,}00856}{\lg 0{,}06971} = \frac{\bar{3}{,}9324738}{\bar{2}{,}8432951},$$

или, замѣчая, что $\bar{3}{,}9324738 = -3 + 0{,}9324738 = -2{,}0675262$ и такимъ же образомъ $\bar{2}{,}8432951 = -1{,}1567049$, имѣемъ

$$x = 2{,}0675262 : 1{,}1567049.$$

Выполнивъ дѣленіе, находимъ $x = 1{,}787$, съ точн. до 0,001.

Подобнымъ же образомъ рѣшаемъ ур—ніе $a^{b^x} = c$, гдѣ a, b и c — три положительныя числа, а числа a и b, кромѣ того, отличны отъ 1. Положивъ $b^x = y$, имѣемъ: $a^y = c$, откуда, по предыдущему,

$$y = \frac{\lg c}{\lg a} \; . \; . \; . \; (1).$$

Найдя y, изъ ур—нія $b^x = y$ находимъ

$$x = \frac{\lg y}{\lg b} = \frac{\lg \left[\frac{\lg c}{\lg a}\right]}{\lg b}.$$

Такъ какъ приходилось брать $\lg y$, то, очевидно, должно быть $y > 0$, сл., какъ видно изъ (1), логариѳмы чиселъ c и a должны быть одинаковаго знака, а сл. числа a и c должны быть или оба < 1, или оба > 1, что можно выразить такъ:

$$(a-1)(c-1) > 0 \; . \; . \; . \; (2).$$

Заключаемъ, что если a, b, c суть три положительныя числа, отличныя отъ 1, если, сверхъ того, удовлетворяется неравенство (2), то наше ур—ніе имѣетъ одно, и только одно, рѣшеніе; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ оно не имѣетъ, рѣшенія.

Пусть еще требуется рѣшить ур—ніе $a^{b^{c^x}} = d^{\frac{m}{n}}$.

Положивъ $c^x = y$, $b^y = z$, имѣемъ ур—ніе $a^z = d^{\frac{m}{n}}$.
Взявъ логариѳмы, найдемъ

$$x \lg c = \lg y, \quad y \lg b = \lg z, \quad z \lg a = \frac{m}{n} \lg d,$$

откуда

$$x = \frac{\lg \left(\frac{\lg z}{\lg b}\right)}{\lg c} = \frac{\lg \left[\frac{\lg \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a}\right)}{\lg b}\right]}{\lg c}.$$

Отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствит. логариѳмовъ, сл. всѣ числа, отъ которыхъ берутся логариѳмы, д. б. > 0; т.-е. во-первыхъ, числа a, b, c, d д. б. > 0; во-вторыхъ, д. б.

$$\frac{\lg \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{\lg d}{\lg a}\right)}{\lg b} > 0 \; . \; . \; . \; (1).$$

Различаемъ два случая: полож. число $b<1$, и $b>1$.

Когда $b<1$, то $\lg b<0$, и нер. (1) даетъ

$$\lg\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\lg d}{\lg a}\right)<0,\quad\text{или}\quad 0<\frac{m}{n}\cdot\frac{\lg d}{\lg a}<1,$$

или, раздѣляя на $\frac{\lg d}{\lg a}$, имѣемъ:

когда $\frac{\lg d}{\lg a}>0$, то $0<\frac{m}{n}<\frac{\lg a}{\lg d}$;

когда $\frac{\lg d}{\lg a}<0$, то $0>\frac{m}{n}>\frac{\lg a}{\lg d}$.

Если $b>1$, то $\lg b>0$, и нер. (1) даетъ

$$\lg\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\lg d}{\lg a}\right)>0,\quad\text{или}\quad \frac{m}{n}\cdot\frac{\lg d}{\lg a}>1,$$

откуда

либо $\frac{m}{n}>\frac{\lg a}{\lg d}>0$, либо $\frac{m}{n}<\frac{\lg a}{\lg d}<0$.

Итакъ, отн. $\frac{m}{n}$ д. б. одного знака съ $\frac{\lg a}{\lg d}$, и смотря по тому, будетъ ли абсолютное значеніе $\frac{m}{n}$ меньше или больше абсолютнаго значенія $\frac{\lg a}{\lg d}$, b должно быть $<$ или >1.

816. Рѣшеніе уравненія $a\alpha^{2x}+b\alpha^x+c=0$. — Положивъ $\alpha^x=y$ (1), имѣемъ $ay^2+by+c=0$ . . . (2).

Квадратное ур. (2) даетъ y, а для всякаго значенія y находимъ изъ (1) соотвѣтственное значеніе x. Но для x получится дѣйствительное значеніе только тогда, когда y будетъ дѣйствительно и положительно. Отсюда, при $\alpha>0$, данное ур. будетъ имѣть *два дѣйствительныхъ корня* только тогда, когда удовлетворяются условія:

$$b^2-4ac>0,\quad ac>0,\quad ab<0.$$

Пусть эти положительныя значенія y будутъ y_1 и y_2. Остается рѣшить два показательныхъ ур—нія: $\alpha^x=y_1$ и $\alpha^x=y_2$, откуда

$$x_1=\frac{\lg y_1}{\lg\alpha}\quad\text{и}\quad x_2=\frac{\lg y_2}{\lg\alpha}.$$

Примѣръ. *Рѣшить уравненіе* $5^{x+1}+\frac{125}{5^x}=626$.

Освободивъ отъ знаменателя, имѣемъ

$$5^{2x+1}-626\times5^x+125=0;$$

положивъ $5^x=y$, даемъ ур—нію видъ $5y^2-626y-125=0$, откуда $y'=125$.

$y''=\frac{1}{5}$. Такимъ образомъ получимъ два ур—нія: $5^x=125$, откуда $x'=3$, и $5^x=\frac{1}{5}$, откуда $x''=-1$.

817. *Рѣшить уравненіе* $\frac{\lg(2-x^3)}{\lg(1-x)}=3$.

Такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ дѣйствительныхъ логариѳмовъ, то необходимо, чтобы было $2-x^3>0$ и $1-x>0$, или $x<\sqrt[3]{2}$ и $x<1$, или, наконецъ, $x<1$.

Исключая знаменатель, получаемъ ур.: $\lg(2-x^3)=3\lg(1-x)=\lg(1-x)^3$, откуда $2-x^3=(1-x)^3$, или $3x^2-3x-1=0$.

Корни этого ур—нія дѣйствительны, одинъ <0, другой >0. Первый, какъ меньшій 1, удовлетворяетъ задачѣ; чтобы и второй отвѣчалъ, необходимо, чтобы онъ былъ <1. Подстановка 1 въ первую часть ур—нія даетъ результатъ -1, т.-е. со знакомъ, противоположнымъ 1-му коэффиціенту, сл. $+1$ содержится между корнями: $x' \ldots +1 \ldots x''$, т.-е. положительный корень >1, а потому долженъ быть отброшенъ. Итакъ

$$x=\frac{-\sqrt{21}+3}{6}$$

есть единственное рѣшеніе даннаго уравненія.

818. Рѣшеніе системы: $\lg x+\lg y=m$ и $ax+by=c$.

Первое ур—ніе можетъ быть представлено въ видѣ $\lg xy=m$, откуда $xy=10^m \ldots (1)$; такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію системы: $xy=10^m$ и $ax+by=c$. Исключеніе y даетъ ур—ніе $ax^2-cx+b\times10^m=0$. Рѣшивъ это ур—ніе, найдемъ значенія y, соотвѣтствующія каждой величинѣ x, изъ уравненія $y=\frac{c-ax}{b}$.

Примѣръ I. *Рѣшить систему:*

$$\lg x+\lg y=3\ \ldots (1), \qquad 5x^2-3y^2=11300\ \ldots (2).$$

Первое уравненіе можно представить въ видѣ $\lg xy=\lg 1000$, или $xy=1000\ \ldots (3)$.

Исключеніе y изъ (2) и (3) даетъ, по упрощеніи, уравненіе

$$x^4-2260x^2-600000=0,$$

имѣющее два мнимыхъ корня и два дѣйствительныхъ; дѣйствительный положительный корень

$$x=\sqrt{1130+\sqrt{1130^2+600000}},$$

или $x=50$, и сл. $y=20$.

Примѣръ II. *Рѣшить систему:*

$$2\lg y-\lg x=0{,}1249387; \qquad \lg 3+2\lg x+\lg y=1{,}7323939.$$

$2\lg y - \lg x = \lg\frac{y^2}{x}$; $0{,}1249387 = \lg 1{,}333\ldots = \lg\frac{4}{3}$; слѣд. первое ур. приводится къ $\frac{y^2}{x} = \frac{4}{3}$, откуда $x = \frac{3}{4}y^2$. Съ другой стороны $\lg 3 + 2\lg x + \lg y = \lg 3x^2y$; $1{,}7323939 = \lg 54$; сл. второе ур. приводится къ $3x^2y = 54$. Исключая x, находимъ ур. $y^5 = 32$, откуда $y = 2$; и наконецъ $x = 3$.

ФИНАНСОВЫЯ ОПЕРАЦІИ.

Сложные проценты.

I. Сложные проценты для цѣлаго числа лѣтъ.

819. Опредѣленіе.—Говорятъ, что капиталъ помѣщенъ на *сложные проценты*, когда въ концѣ каждаго года процентныя деньги прибавляются къ капиталу, или, какъ говорятъ, *капитализируются*, и наращеніе процентными деньгами въ теченіе слѣдующихъ лѣтъ идетъ не только на капиталъ, но и на причисляемыя къ нему процентныя деньги.

820. Основной вопросъ.—*Вычислить, во что обратится капиталъ a руб., отданный на сложные проценты по p со ста, въ t лѣтъ.*

100 руб. приносятъ въ годъ p руб. прибыли; слѣд. 1 руб. принесетъ въ это время $\frac{p}{100}$ р., а потому 1 р. къ концу перваго года обратится въ $1 + \frac{p}{100}$, или, обозначая $\frac{p}{100}$ буквою r, въ $1 + r$ (сумма $1 + r$ наз. *годовымъ оборотомъ рубля*), а слѣд. a руб. въ концѣ года составятъ сумму $a(1 + r)$. Каждый рубль этой суммы въ концѣ второго года обратится опять въ $1 + r$, а слѣд. вся сумма $a(1 + r)$ обратится къ этому сроку въ $a(1 + r)(1 + r)$, или $a(1 + r)^2$. Къ концу 3-го года каждый рубль этой новой суммы обратится въ $1 + r$, а потому вся сумма въ $a(1 + r)^2(1 + r)$ или въ $a(1 + r)^3$ и т. д. По аналогіи заключаемъ, что въ концѣ t-го года составится сумма $a(1 + r)^t$; называя эту сумму буквою A, имѣемъ ур—ніе

$$A = a(1 + r)^t \quad . \ . \ . \ (1).$$

821. Формула (1) содержитъ четыре количества: a, A, t и p (заключается въ r); сл. когда три изъ нихъ будутъ даны, то можно опредѣлить четвертое. Отсюда четыре задачи.

822. Основная задача.—*Опредѣленіе* A *по даннымъ* a, p *и* t прямо рѣшается ур—мъ (1); логариѳмируя его, имѣемъ

$$\lg A = \lg a + t\,.\,\lg(1 + r) \quad . \ . \ . \ (2).$$

Примѣръ: $a = 20000$, $p = 4{,}5$ и $t = 10$.

$$r = \frac{4{,}5}{100} = 0{,}045. \qquad \begin{aligned} \lg a &= 4{,}3010300 \\ 10\lg(1 + r) &= 0{,}1911629 \\ \lg A &= 4{,}4921929 \\ A &= 31059,\ 38 \text{ руб.} \end{aligned}$$

823. *Какой капиталъ a нужно помѣстить на сложные проценты по p со ста, чтобы въ концѣ t лѣтъ составилась сумма* A?

Ур—ніе (2), рѣшенное относительно $\lg a$, даетъ

$$\lg a = \lg A + \text{доп. } t \lg(1+r) \; . \; . \; . \; (3).$$

Примѣръ. $A = 40324$, $t = 21$, $p = 4$.

$$\lg(1+r) = 0{,}0170333 \qquad\qquad \lg A = 4{,}6055630$$

$$t \lg(1+r) = 0{,}3576993 \qquad \text{доп. } t.\ \lg(1+r) = 1{,}6423007$$

$$\lg a = 4{,}2478643$$

$$a = 17695{,}56.$$

824. *На сколько лѣтъ нужно помѣстить капиталъ a, чтобы, при сложныхъ процентахъ по p со ста, составилась сумма* A? *Прибыль на 1 руб. равна r.*

Рѣшая ур. (2) относительно t, имѣемъ

$$t = \frac{\lg A - \lg a}{\lg(1+r)}.$$

Примѣръ. $A = 40324$; $a = 17695{,}56$; $p = 4$.

$$t = \frac{4{,}6055636 - 4{,}2478643}{0{,}0170333} = \frac{0{,}3576993}{0{,}0170333} = 21.$$

825. *При какихъ процентахъ капиталъ a дастъ, по истеченіи t лѣтъ, сумму* A?

Рѣшая ур. (2) относительно $\lg(1+r)$, имѣемъ

$$\lg(1+r) = \frac{\lg A - \lg a}{t}.$$

Найдя отсюда $1+r$, легко опредѣлить и p.

Примѣръ. $a = 21319$, $A = 42327$, $n = 15$.

$$\lg A = 4{,}6266237$$

$$\lg a = 4{,}3287668$$

$$\lg(1+r) = \frac{0{,}2978569}{15} = 0{,}0198571$$

$$1 + r = 1{,}04678.$$

Отсюда r или $\frac{p}{100} = 0{,}04678$, а слѣд. $p = 4{,}678$ или приблизительно въ цѣлыхъ копейкахъ, $p = 4$ руб. 68 коп.

II. Время помѣщенія капитала—дробное.

826. Обыкновенно время, въ теченіе котораго капиталъ находится подъ процентами, слагается изъ цѣлаго числа лѣтъ и нѣкоторой доли года, которую условимся обозначать буквою f; цѣлое же число лѣтъ, по-прежнему, обозначимъ буквою t. Если, напр., доля года равна 3 мѣсяцамъ 25 днямъ, то

$$f=\frac{3\times30+25}{360}=\frac{23}{72},$$

принимая каждый мѣсяцъ въ 30 дней.

827. Основной вопросъ. *Какая сумма A составится, если капиталъ a, отданный на сложные %, по p, находится въ оборотѣ t лѣтъ и долю f года?*

По истеченіи t лѣтъ капиталъ a обратится въ $a(1+r)^t$. Каждый рубль этой суммы, получая въ годъ приращеніе r, въ теченіе доли f года дастъ приращеніе fr; полное же приращеніе суммы $a(1+r)^t$ будетъ $a(1+r)^t.fr$. Такимъ образомъ къ концу $t+f$ лѣтъ составится сумма $a(1+r)^t+a(1+r)^t.fr$, или

$$A=a(1+r)^t(1+fr)\ .\ .\ .\ (1).$$

Примѣръ. $a=41524,75$, $p=5$, $t=7$ и $f=10$ мѣс.

$$1+fr=1+\frac{10}{12}\times0,05 \qquad\qquad \lg a=4,6183070$$

$$=1+\frac{0,25}{6} \qquad\qquad t\lg(1+r)=0,1483251$$

$$=1,0416667 \qquad\qquad \lg(1+fr)=0,0177288$$

$$\lg A=4,7843609$$

$$A=60863,05 \text{ руб.}$$

828. *Какой капиталъ, помѣщенный на сложные %, по 5 со 100, дастъ въ 18 лѣтъ и 3 мѣсяца сумму 48731,05 руб?*

Логариѳмируя ур. (1) и опредѣляя $\lg a$, имѣемъ

$$\lg a=\lg A+\text{доп. }t\lg(1+r)+\text{доп. }\lg(1+fr)\ .\ .\ .\ (2)$$

$$\lg 1,05=0,0211893 \qquad\qquad \lg A=4,6878325$$

$$18\lg 1,05=0,3814074 \qquad\qquad \text{доп. }t\lg(1+r)=1,6185926$$

$$fr=\frac{0,05}{4}=0,0125 \qquad\qquad \text{доп. }\lg(1+fr)=1,9946050$$

$$1+fr=1,0125 \qquad\qquad \lg a=4,3010301$$

$$a=20000 \text{ руб.}$$

829. *Какое время сумма a должна находиться подъ сложными %, считая по p со ста, чтобы образовать капиталъ A?*

Нужно опредѣлить t и f. Рѣшая ур. (2) относительно t, имѣемъ:

$$t=\frac{\lg A-\lg a}{\lg(1+r)}-\frac{\lg(1+fr)}{\lg(1+r)}$$

Пусть частное дѣленія, указаннаго въ первомъ членѣ, будетъ Q, а остатокъ R; имѣемъ:

$$t = Q + \frac{R}{\lg(1+r)} - \frac{\lg(1+fr)}{\lg(1+r)} \quad \ldots (3)$$

Первая часть ур—нія есть число цѣлое, слѣд. и вторая должна быть цѣлымъ числомъ. Но Q есть цѣлое число, слѣд. и разность дробей должна быть цѣлою. R, какъ остатокъ, меньше дѣлителя $\lg(1+r)$, слѣд. первая дробь меньше 1. Затѣмъ, $f < 1$, слѣд. $fr < r$, откуда $1+fr < 1+r$, а потому и $\lg(1+fr) < \lg(1+r)$, такъ что и вторая дробь меньше 1. Но разность двухъ правильныхъ дробей только тогда м. б. цѣлою, когда она равна нулю, откуда: $R = \lg(1+fr)$, и ур—ніе (3) даетъ $t = Q$. Такимъ образомъ, для опредѣленія времени имѣемъ два ур—нія

$$t = Q \ldots (4) \quad \text{и} \quad \lg(1+fr) = R \ldots (5),$$

показывающія, что для нахожденія цѣлаго числа лѣтъ надо взять цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія $\lg A - \lg a$ на $\lg(1+r)$, а для опредѣленія доли года — приравнять $\lg(1+fr)$ остатку указаннаго дѣленія и рѣшить полученное ур. относительно f.

Переходя въ ур—ніи (5) отъ логариѳма къ числу, найдемъ: $1+fr = m$, откуда $f = \frac{m-1}{r}$.

Примѣръ I. $A = 48734{,}04$; $a = 20000$; $r = 0{,}05$.

$$\lg A = 4{,}6878324$$
$$\lg a = 4{,}3010300$$
$$\lg A - \lg a = 0{,}3868024$$
$$\frac{\lg A - \lg a}{\lg 1{,}05} = \frac{0{,}3868024}{0{,}0211893} = 18 + \frac{0{,}0053950}{0{,}0211893}$$
$$\lg(1+fr) = 0{,}0053950$$
$$1+fr = 1{,}0125$$
$$f = \frac{0{,}0125}{0{,}05} = 0{,}25.$$

Итакъ, $t = 18$ г. и $f = \frac{1}{4}$ года.

Примѣръ II. *Населеніе страны возрастаетъ ежегодно на нѣкоторую долю α своей величины, какую оно имѣетъ въ началѣ года. По истеченіи какого времени оно будетъ находиться въ данномъ отношеніи k къ первоначальной своей величинѣ?*

Пусть первоначальное населеніе равно a; населеніе въ концѣ t лѣтъ и доли f года пусть будетъ A. Имѣемъ: $A = a(1+\alpha)^t(1+f\alpha)$; но, по условію, $A = ka$; слѣд.

$$k = (1+\alpha)^t(1+f\alpha).$$

Пусть, напр., требуется узнать, черезъ сколько времени удвоится населеніе, возрастая на 5%?

Въ данномъ вопросѣ $k = 2$, $\alpha = 0{,}05$; ур—ніе будетъ

$$2 = 1{,}05^t(1+0{,}05f).$$

Частное, подлежащее вычисленію, будетъ

$$\frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14 + \frac{0{,}0043798}{0{,}0211893}.$$

$$\lg(1 + 0{,}05f) = 0{,}0043798$$
$$1 + 0{,}05f = 1{,}010136$$

$$f = \frac{0{,}010136}{0{,}05} = \frac{1{,}0136}{5} = \frac{\overset{\text{дн}}{365} \times 1{,}0136}{5} = 74 \text{ дн.}$$

Итакъ, населеніе удвоится черезъ 14 лѣтъ и 74 дня.

830. ***На какіе проценты нужно помѣстить капиталъ a, чтобы въ $t+f$ лѣтъ онъ обратился въ A?***

Вопросъ приводится къ рѣшенію относительно r ур—нія

$$A = a(1+r)^t(1+fr);$$

по раскрытіи $(1+r)^t$, получимъ ур—ніе $t+1$-й степени въ r: сл. не можетъ быть рѣчи о рѣшеніи его въ этомъ общемъ случаѣ обыкновенными пріемами; но оно м. б. рѣшено *по способу послѣдовательныхъ приближеній.*

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей ур—нія, выводимъ

$$\lg(1+r) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1+fr)}{t} \quad \ldots (1)$$

Откинувъ второй членъ (обыкновенно r содержится между 0,03 и 0,06, а $f < 1$, такъ что $1+fr$ близко къ 1, а $\frac{\lg(1+fr)}{t}$ весьма малое число), найдемъ первое приближеніе r_1 числа r, по избытку, изъ ур—нія

$$\lg(1+r_1) = \frac{\lg A - \lg a}{t} \quad \ldots (2)$$

гдѣ $r_1 > r$.

Затѣмъ полагаемъ

$$\lg(1+r_2) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1+fr_1)}{t} \quad \ldots (3)$$

второй членъ 2-й части больше второго члена 2-й части ур—нія (1), и потому r_2 нѣсколько меньше r. Итакъ, r_1 и r_2 суть два приближенія къ r, первое по избытку, второе по недостатку. Взявъ то или другое вмѣсто r, сдѣлаемъ ошибку меньшую $r_1 - r_2$. Взявъ для r ариѳметич. средину $\frac{r_1+r_2}{2}$, сдѣлаемъ ошибку меньшую даже $\frac{r_1-r_2}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$r_1 = r + \alpha_1, \quad r_2 = r - \alpha_2,$$

гдѣ α_1 и α_2 положительны; отсюда

$$\frac{r_1+r_2}{2} - r = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}, \quad \text{и} \quad \frac{r_1-r_2}{2} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}.$$

Взявъ $\frac{r_1 + r_2}{2}$ за r, сдѣлаемъ ошибку, равную $\frac{a_1 - a_2}{2}$: но абсолютная величина $\frac{a_1 - a_2}{2} < \frac{a_1 + a_2}{2}$, и сл. $< \frac{r_1 - r_2}{2}$.

Если приближеніе r_2 недостаточно, опредѣляемъ два новыя приближ. значенія, r_3 и r_4, по формуламъ

$$\lg(1 + r_3) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 + fr_2)}{t} \quad . \, (4)$$

$$\lg(1 + r_4) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 + fr_3)}{t} \, . \, . \, . \quad (5)$$

Изъ того, что $r_2 < r$, очевидно, что вторая часть (4) больше второй части (1), но она меньше второй части (2): слѣд. $r_1 > r_3 > r$. Слѣд. r_3 есть новое избыточное приближеніе числа r, и менѣе ошибочное, чѣмъ r_1.

Затѣмъ, такъ какъ $r_3 > r$, то вторая часть (5) меньше второй части (1), слѣд. $r_4 < r$; а какъ $r_3 < r_1$, то вторая часть (5) больше второй части (3): слѣд. $r_4 > r_2$.

Отсюда видно, что r_4 есть приближеніе по недостатку, менѣе ошибочное чѣмъ r_2; слѣд. $r_3 > r > r_4$, причемъ промежутокъ отъ r_3 до r_4 меньше промежутка отъ r_1 до r_2.

Такимъ образомъ, имѣемъ рядъ значеній для r:

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4, \, . \, . \, .$$

попеременно приближенныхъ по избытку (прибл. четнаго пор.) и по недостатку (прибл. нечетн. пор.), причемъ ихъ точность идетъ возрастая.

Остается доказать, что числа $r_1, r_2, \ldots \ldots r_{2p}, r_{2p+1}, \ldots \ldots$ имѣютъ общимъ предѣломъ r. Для этого достаточно доказать, что абсол. велич. разности между r_k и r, при неограниченномъ возрастаніи k, стремится къ нулю. Имѣемъ

$$\lg(1 + r) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 + fr)}{t}$$

$$\lg(1 + r_{2p+1}) = \frac{\lg A - \lg a}{t} - \frac{\lg(1 + fr_{2p})}{t},$$

откуда

$$\lg(1 + r_{2p+1}) - \lg(1 + r) = \frac{\lg(1 + fr) - \lg(1 + fr_{2p})}{t}.$$

Но

$$\frac{1 + fr}{1 + fr_{2p}} < \frac{1 + r}{1 + r_{2p}};$$

въ самомъ дѣлѣ, приводя къ общему знаменателю, который положителенъ, и сравнивая числителей: $1 + frr_{2p} + r_{2p} + fr$ и $1 + frr_{2p} + r + fr_{2p}$, или $f(r - r_{2p})$ и $r - r_{2p}$, замѣчая, что $f < 1$ и $r - r_{2p} > 0$, имѣемъ $f(r - r_{2p}) < r - r_{2p}$, что и требовалось доказать. Итакъ

$$\lg(1 + r_{2p+1}) - \lg(1 + r) < \frac{\lg(1 + r) - \lg(1 + r_{2p})}{t};$$

а слѣд., обозначая буквами

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_{2p},\quad \alpha_{2p+1},\ldots$$

абсолютныя значенія разностей между

$$\lg(1+r)\quad \text{и}\quad \lg(1+r_1),\quad \lg(1+r_2),\ldots$$

имѣемъ:

$$\alpha_2<\frac{\alpha_1}{t},\quad \alpha_3<\frac{\alpha_2}{t},\ldots,\quad \alpha_{2p+1}<\frac{\alpha_{2p}}{t}.$$

Перемножая эти неравенства, получаемъ

$$\alpha_{2p+1}<\frac{\alpha_1}{t^{2p}}.$$

Но t —число цѣлое, $2p$—число положительное, возрастающее неограниченно, слѣд. и t^{2p} возрастаетъ неограниченно, а потому можно взять $2p$ настолько большимъ, чтобы α_{2p+1} было какъ угодно близко къ нулю; слѣд. разность

$$\lg(1+r_{2p+1})-\lg(1+r)$$

стремится къ нулю, а слѣд. r_{2p+1} къ r: это и нужно было доказать.

831. Примѣръ. *На какіе проценты (сложные) помѣщенъ былъ капиталъ 7300 руб., если въ концѣ 6 лѣтъ 8 мѣсяц. 10 дней онъ обратился въ 10418 руб. 10 коп. (проценты капитализируются въ концѣ каждаго года)?*

Примѣняя указанный методъ, имѣемъ

$$\lg(1+r)=\frac{\lg 10418.1-\lg 7300}{6}-\frac{\lg\left(1+\frac{25}{36}r\right)}{6}$$

или $$\lg(1+r)=0,02595240+0,25938375-\frac{\lg(36+25r)}{6}.$$

Первое приближеніе для r получимъ, откинувъ два послѣдніе члена:

$$\lg(1+r_1)=0,02595240,$$

откуда

$$r_1=0,0615791,\quad \text{причемъ}\ r_1>r.$$

Второе приближеніе вычисляемъ изъ уравненія

$$\lg(1+r_2)=0,28533615-\frac{\lg(36+25r_1)}{6},$$

откуда, замѣчая, что $36+25r_1=37.53947$, и $\frac{\lg(36+25r_1)}{6}=0,26241435$, имѣемъ:

$$\lg(1+r_2)=0,02292180.$$

слѣд.

$$r_2=0,05419706,\quad \text{причемъ}\ r_2<r.$$

Третье приближеніе находимъ изъ уравненія

$$\lg(1+r_3)=0,28533615-\frac{\lg(36+25r_2)}{6}$$

замѣчая, что $36+25r_2=37,354926$, и $\frac{\lg(36+25r_2)}{6}=0,26205796$, находимъ:

$$\lg(1+r_3)=0,02327819,$$

откуда

$$r_3=0,0550625,\quad \text{причемъ } r_3>r.$$

Четвертое приближеніе.

$$\lg(1+r_4)=0,28533615-\frac{\lg(36+25r_3)}{6},$$

гдѣ $36+25r_3=37,376756$, и $\frac{\lg(36+25r_3)}{6}=0,26213321$; слѣд.

$$\lg(1+r_4)=0,02320294,$$

откуда

$$r_4=0,0548797,\quad \text{причемъ } r_4<r.$$

Разность $r_3-r_4=0,0001828$, слѣдов. каждое изъ приближеній r_3 и r_4 представляетъ r съ ошибкою, меньшею 0,0002. Итакъ

$$\frac{r_3+r_4}{2}=0,0549711$$

представляетъ r съ ошибкою меньшею 0,0001; отсюда, умножая на 100, находимъ проценты $p=5,49711$, съ ошибкою, меньшею 0,01 p. Слѣд. приблизительно беремъ $p=5,497$.

Примѣчаніе. Обыкновенно же на практикѣ, для вычисленія времени и процентовъ берутъ формулу, выведенную для цѣлаго числа лѣтъ $A=a(1+r)^t$, подставляя въ нее вмѣсто t данное дробное число лѣтъ. Примѣняя эту формулу къ данной задачѣ, имѣемъ

$$\lg(1+r)=\frac{\lg 10448,1-\lg 7300}{6\frac{25}{36}}=\frac{36\times 0,15571442}{241}$$

$$=0,02326024;$$

отсюда

$$1+r=1,0550189,\quad \text{и}\quad r=0,0550189;$$

наконецъ

$$p=5,50189,$$

результатъ, мало разнящійся отъ прежде найденнаго.

Срочные вклады.

832. Основной вопросъ. *Въ теченіе t лѣтъ вносятся въ банкъ въ началѣ каждаго года послѣдовательно капиталы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_t$. Какая сумма накопится къ концу срока, если считать сложные проценты по $p\%$?*

Первый *срочный вкладъ* a_1, находясь подъ процентами t лѣтъ, обратится къ концу этого срока въ $a_1(1+r)^t$, или, полагая для краткости $1+r=q$, въ a_1q^t.

Второй вкладъ, находясь въ банкѣ $t-1$ лѣтъ, обратится къ концу срока въ a_2q^{t-1}.

Третій взносъ къ концу того же срока обратится въ a_3q^{t-2} и т. д.

Послѣдній вкладъ, находясь подъ процентами 1 годъ, даетъ a_tq.

Сложивъ эти суммы, получимъ накопившійся капиталъ

$$A = a_1q^t + a_2q^{t-1} + a_3q^{t-2} + \cdot\cdot\cdot + a_tq \;.\;.\;. (1)$$

Когда вклады различны, формула (1) не допускаетъ упрощеній; если же ежегодные взносы равны, то, обозначивъ каждый изъ нихъ буквою a и вынеся за скобки общій множитель aq, найдемъ:

$$A = aq\,(q^{t-1} + q^{t-2} + \cdots + q + 1).$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ сумму членовъ геометрич. прогрессіи первый членъ которой $=1$, а знаменатель q; по формулѣ суммы имѣемъ

$$A = aq\cdot\frac{q^t-1}{q-1} \;.\;.\;. (2)$$

Примѣчаніе. Если бы сумма a была вносима *въ концѣ* каждаго года, то первый вкладъ находился бы въ банкѣ $t-1$ лѣтъ, второй $t-2,\ldots$, послѣдній 0 лѣтъ, и получили бы

$$A' = aq^{t-1} + aq^{t-2} \ldots + aq + a$$

или

$$A' = a\cdot\frac{q^t-1}{q-1}.$$

833. Ур. (2) содержитъ 4 количества; A, a, p и t, и позволяетъ найти одно изъ нихъ, когда остальныя три будутъ даны. Отсюда 4 задачи:

1. Для опредѣленія A непосредственно служитъ ур. (2).

2. Опредѣляя a, имѣемъ

$$a = \frac{A(q-1)}{q(q^t-1)}.$$

3. Для нахожденія t, освобождая ур. (2) отъ знаменателя, имѣемъ:

$$A(q-1) = aq(q^t-1),\quad \text{откуда}\quad q^t = 1 + \frac{A(q-1)}{aq};$$

ур—ніе показательное.

4. Опредѣленіе p приводится къ нахожденію q. Изъ послѣдняго ур—нія прямо находимъ

$$aq^{t+1} - (A+a)\,q + A = 0,$$

ур—ніе $t+1$-й степени относительно q.

Численный примѣръ. $a = 2000$, $t = 20$, $p = 5$; найти A?

$$A = 2000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}05} = 42000(1{,}05^{20} - 1).$$

Такъ какъ lg разности $1{,}05^{20} - 1$ нельзя найти непосредственно, то предварительно вычисляемъ $1{,}05^{20}$.

Вспомогат. вычисл.

$y = 1{,}05^{20}$

$\lg y = 20 \lg 1{,}05 = 0{,}4237860$

26532 7700

9 160 : 164

147 . 6

7 12 . 4

$y - 1 = 1{,}653297$

Вычисленіе A.

$\lg 42000 = 4{,}6232493$

$\lg (1{,}05^{20} - 1) = 0{,}2183510$

$\lg A = 4{,}8416003$

$A = 69438{,}5.$

834. Приводимъ еще нѣсколько упражненій на срочные вклады.

1. *Какой капиталъ накопится чрезъ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго полугодія вносить по $\frac{a}{2}$ руб., или по $\frac{a}{4}$ въ концѣ каждой четверти года, или по $\frac{a}{12}$ въ концѣ каждаго мѣсяца?*

Внося $\frac{a}{2}$ р. въ концѣ каждаго полугодія, составимъ капиталъ

$$C = \frac{a}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n} - 1\right]$$

если $\frac{r}{2}$ означаетъ прибыль на 1 р. въ полугодіе.

Внося $\frac{a}{4}$ въ концѣ каждой четверти года, составимъ капиталъ

$$C' = \frac{a}{r}\left[\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4n} - 1\right].$$

гдѣ $\frac{r}{4}$ означаетъ прибыль на 1 р. въ четверть года.

Наконецъ, вклады въ концѣ каждаго мѣсяца дадутъ

$$C'' = \frac{a}{r}\left[\left(1 - \frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right].$$

Примѣчаніе. Принимая $\frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{12}$ за полугодичные, трехмѣсячные и мѣсячные проценты, получаемъ въ концѣ года прибыль, нѣсколько большую r. Чтобы годичные проценты составляли въ точности r, надо вести вычисленіе такъ Пусть процентныя деньги капитализируются по истеченіи доли $\frac{1}{k}$ года; чтобы 1 руб. въ концѣ года обратился въ $1 + r$, надо, чтобы проценты были

$$r_1 = \sqrt[k]{1 + r} - 1,$$

ибо, прибавляя 1 къ r_1 и возвышая результатъ въ степень k, имѣемъ:

$$(1+r_1)^k = (\sqrt[k]{1+r})^k = 1+r.$$

Такимъ образомъ, въ вышеприведенныхъ задачахъ получимъ

$$C_1 = \frac{a}{2}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{\sqrt{1+r}-1};\ C'_1 = \frac{a}{4}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{\sqrt[4]{1+r}-1};\ C''_1 = \frac{a}{12}\cdot\frac{(1+r)^n-1}{\sqrt[12]{1+r}-1}$$

результаты, весьма мало разнящіеся отъ прежнихъ.

II. *Какой капиталъ составится въ концѣ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить суммы, измѣняющіяся въ ариѳметической прогрессіи?*

Пусть a есть первый вкладъ; $a+b$, $a+2b$, . . . , $a+(n-1)b$ слѣдующіе. Искомый капиталъ X будетъ

$$X = a(1+r)^{n-1} + (a+b)(1+r)^{n-2} + \dots + a + (n-1)b;$$

полагая $\frac{1}{1+r} = q$, имѣемъ

$$(1+r)^n\{aq + (a+b)q^2 + (a+2b)q^3 + \dots + [a+(n-1)b]q^n\}.$$

Выраженіе въ скобкахъ можно представить въ видѣ

$$a(q+q^2+\dots+q^n) + b[q^2+2q^3+\dots+(n-1)q^n],$$

гдѣ $q+q^2+\dots+q^n = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$; положивъ

$$S = q^2+2q^3+3q^4+\dots+(n-1)q^n,\ \text{имѣемъ}$$

$$Sq = q^3+2q^4+\dots+(n-2)q^n+(n-1)q^{n+1},\ \text{откуда}$$

$$S(1-q) = q^2+q^3+q^4+\dots+q^n-(n-1)q^{n+1},\ \text{или}$$

$$S(1-q) = \frac{q^{n+2}-q^2}{q-1} - nq^{n+1},\ \text{откуда}\ S = -\frac{q^2(q^n-1)}{(q-1)^2} + \frac{nq^{n+1}}{q-1}.$$

Подстановка въ формулу X и замѣна q дробью $\frac{1}{1+r}$, даетъ

$$X = \frac{(1+r)^n-1}{r}\left(a+\frac{b}{r}\right) - \frac{nb}{r}.$$

III. *Какой капиталъ накопится чрезъ n лѣтъ, если въ концѣ каждаго года вносить суммы, измѣняющіяся въ геометрической прогрессіи?*

Пусть будутъ a, ak, ak^2, . . . , ak^{n-1} послѣдовательные взносы.

Къ концу срока они обратятся въ

$$a(1+r)^{n-1},\ ak(1+r)^{n-2},\ \dots,\ ak^{n-1}.$$

Сумма членовъ этой прогрессіи, знаменатель которой $= \frac{k}{1+r}$, будетъ

$$Y = a\,\frac{(1+r)^n - k^n}{(1+r) - k}.$$

IV. *Цѣнностью въ настоящее время долга* A, *подлежащаго уплатѣ черезъ n лѣтъ, называется сумма, которую нужно бы было тотчасъ положить въ банкъ на сложные %, чтобы спустя n лѣтъ получить A руб.*

Слѣд., если цѣнность въ настоящее вр. суммы A назовемъ A_1, то $A_1(1+r)^n = A$, откуда

$$A_1 = \frac{A}{(1+r)^n}.$$

V. *Учетъ при сложныхъ процентахъ. Учетомъ* наз. разность между номинальною величиною долга и его дѣйствительною величиною; поэтому, формула учета будетъ

$$e = A - \frac{A}{(1+r)^n} = A\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

Положивъ для краткости $\frac{1}{1+r} = q$, предыдущія формулы представимъ въ сокращенномъ видѣ

$$A_1 = Aq^n,\ e = A(1 - q^n).$$

VI. Задача. *Нѣкто долженъ уплатить суммы* A, A', A'', ... *соотвѣтственно черезъ* t, t', t''.... *лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ онъ можетъ погасить долгъ единовременнымъ взносомъ* **B** *рублей?*

Пусть x будетъ искомое число лѣтъ; цѣнность въ настоящее время капитала B д. б. равна суммѣ цѣнностей въ настоящее время капиталовъ A, A', A'', ...; потому ур—ніе задачи будетъ:

$$\frac{A}{(1+r)^t} + \frac{A'}{(1+r)^{t'}} + \frac{A''}{(1+r)^{t''}} + \ldots = \frac{B}{(1+r)^x}.$$

Частный случай. Если имѣются только два платежа, и притомъ B = 2A, предыдущее ур. приводится къ

$$q^x = \frac{1}{2}(q^t + q^{t'}).$$

Легко видѣть, что *искомое время всегда короче средняго изъ сроковъ обѣихъ уплатъ*. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $t' = t + 2d$ и вынеся множителя q^{t+d}, найдемъ

$$q^x = q^{t+d}\cdot\frac{1}{2}\left(q^d + \frac{1}{q^d}\right).$$

Но количество, сложенное съ своею обратною величиною, даетъ всегда сумму, большую 2; слѣд. $q^x > q^{t+d}$; а какъ $q < 1$, то необходимо $x < t + d$.

Примѣръ. *Уплатѣ подлежатъ 12500 р. чрезъ 7 лѣтъ и 12500 р. чрезъ 13 года. Чрезъ сколько лѣтъ можно погасить долгъ однимъ взносомъ въ 25000 р., полагая сложные % по 4,5 со ста?*

Вопросъ рѣшается ур—мъ

$$2\left(\frac{1}{1,045}\right)^x=\left(\frac{1}{1,045}\right)^7+\left(\frac{1}{1,045}\right)^{43};$$

при помощи логариѳмовъ находимъ

$$\left(\frac{1}{1,045}\right)^7=0,7348283$$

$$\left(\frac{1}{1,045}\right)^{43}=0,1506605$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{1,045}\right)^x=0,8854888$$

$$x=\frac{\lg 0,4427444}{\lg\dfrac{1}{1,045}}=\frac{1,6461531}{\bar{1},9808837}=\frac{3538569}{191163}$$

$$=18 \text{ лѣтъ } 6 \text{ мѣс.}$$

Срочныя уплаты.

835. Опредѣленіе. *Срочною уплатою называется постоянная сумма, которую слѣдуетъ вносить въ концѣ каждаго года для погашенія долга вмѣстѣ съ его сложными процентами.*

836. Основной вопросъ.— *Занять въ банкѣ капиталъ a по p $^0/_0$ въ годъ* (считая сложные $^0/_0$) *на t лѣтъ. Какую сумму x нужно вносить въ концѣ каждаго года, чтобы долгъ былъ погашенъ?*

Долгъ a въ концѣ 1-го года обращается въ aq; по внесеніи же срочной уплаты x онъ обращается въ $aq-x$: таковъ долгъ въ началѣ 2-го года.

Въ теченіе года эта сумма обращается въ $(aq-x)q$ или въ aq^2-xq; по уплатѣ же въ концѣ 2-го года x руб., долгъ въ началѣ 3-го года будетъ aq^2-xq-x.

Такимъ же образомъ въ началѣ 4-го года долгъ будетъ aq^3-xq^2-xq-x, и т. д.

По аналогіи съ этими формулами заключаемъ, что по истеченіи t лѣтъ долгъ банку будетъ

$$aq^t-xq^{t-1}-xq^{t-2}-\cdots-xq-x\ \ldots\ (A)$$

По условію, черезъ t лѣтъ долгъ д. б. погашенъ; отсюда ур.

$$aq^t-xq^{t-1}-xq^{t-2}-\cdots-xq-x=0,$$

или

$$aq^t-x(q^{t-1}+q^{t-2}+\cdots+q+1)=0,$$

или, наконецъ:

$$aq^t-x\cdot\frac{q^t-1}{q-1}=0\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (1)$$

Другой способъ вывода. Если бы должникъ ничего не вноситъ ранѣе окончанія срока, то въ концѣ t-го года онъ долженъ бы быть внести aq^t.

Но въ концѣ 1-го года онъ вноситъ x руб.; если бы онъ удержалъ эту сумму и помѣстилъ ее на сложные %, то въ $t-1$ лѣтъ, оставшихся до срока, эта сумма обратилась бы въ xq^{t-1}. Слѣд., 1-я уплата этою величиною и должна войти при окончательномъ расчетѣ. Такимъ же образомъ:

2-ая срочная уплата, при окончат. расчетѣ, эквивалентна xq^{t-2} рублямъ;
3-ья » » » » » » xq^{t-3} »
4-ая » » » » » » xq^{t-4} »
. . . .
Предпослѣдняя уплата равновелика суммѣ . . . xq, »
вносимой въ концѣ t-го года.
Наконецъ, послѣдняя, » » . . . . x »

Всѣ эти суммы, образуя геом. прогр. въ t членовъ съ первымъ членомъ x и съ знаменателемъ q, даютъ вмѣстѣ $\frac{x(q^t-1)}{q-1}$, каковая сумма и должна погашать долгъ aq^t; откуда ур—ніе

$$aq^t = \frac{x(q^t-1)}{q-1}.$$

По прежнему имѣемъ 4 задачи.

837. Опредѣленіе срочной уплаты. Рѣшая ур. (1) отн. x, имѣемъ

$$x = \frac{aq^t(q-1)}{q^t-1}.$$

Частный случай. Если срокъ займа неограниченно великъ, то, положивъ $t = \infty$ и замѣтивъ, что q^t, при $q > 1$ и $t = \infty$, обращается въ ∞, находимъ $x = \frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытія неопредѣленности дѣлимъ числителя и знамен. на q^t; находимъ

$$\lim x = \left[\frac{a(q-1)}{1-\frac{1}{q^t}}\right]_{t=\infty} = a(q-1) = ar,$$

гдѣ $r = \frac{p}{100}$.

Легко истолковать этотъ результатъ, замѣтивъ, что ar или $\frac{ap}{100}$ есть формула простыхъ годовыхъ процентовъ долга a. Итакъ, предѣлъ срочной уплаты при неогранич. срокѣ займа равенъ простымъ годовымъ процентамъ занятаго капитала, — результатъ, который не трудно было предвидѣть заранѣе. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что срокъ займа м. б. безконечно великъ только тогда, когда срочная уплата погашаетъ одни простые проценты, оставляя капиталъ безъ измѣненія. На такихъ условіяхъ въ большинствѣ случаевъ дѣлаются *государственные займы*; государство ограничивается уплатою, въ опредѣленные сроки, простыхъ процентовъ своего долга, такъ что срочныя уплаты, вносимыя государствомъ, не могутъ служить къ погашенію долга, которое достигается другими средствами, когда это дозволяетъ финансовое положеніе страны. Сказанная уплата называется, поэтому, *непрерывною рентою*.

Заемъ, совершаемый государствомъ на такихъ условіяхъ, называется *консолидированнымъ долгомъ*.

Обыкновенно же срочная уплата бываетъ больше *непрерывной ренты*, и разность между ними выражается такъ:

$$x - ar = \frac{ar}{q^t - 1}.$$

Этотъ избытокъ срочной уплаты надъ непрерывною рентою, которую слѣдовало бы уплачивать въ случаѣ неограниченнаго срока займа, и составляетъ *фондъ погашенія*.

838. Опредѣленіе займа. Изъ ур—ія (1) прямо имѣемъ

$$a = \frac{x(q^t - 1)}{q^t (q - 1)}.$$

839. Опредѣленіе процентовъ приводится къ опредѣленію q. Освобождая ур. (1) отъ знаменателя и приводя въ порядокъ члены, находимъ ур—ніе

$$aq^{t+1} - (a + x)q^t + x = 0,$$

$t+1$-й степени относительно q; вообще, оно неразрѣшимо обычными пріемами элементарной алгебры. Но можно найти численную величину q помощію методическихъ попытокъ (значительно облегчаемыхъ таблицами сложныхъ %). Раздѣливъ уравненіе (1) на aq^t, можно представить его въ видѣ

$$r - \frac{x}{a}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^t}\right] = 0 \;.\;.\;.\; (2)$$

Замѣняя r послѣдовательно числами 0,03, 0,04, 0,05, 0,06 . . . т.-е. наиболѣе употребительными процентами, смотримъ на результатъ подстановокъ. Если этотъ результатъ будетъ 0, r въ точности равно взятому числу; вообще же первая часть ур—нія будетъ отлична отъ нуля. Численная величина и знакъ этой разницы укажутъ степень точности испытуемаго числа и смыслъ приближенія.

1. *Смыслъ полученнаго приближенія.* Если дать r значеніе, *большее* настоящаго, первая часть ур—нія будетъ *положительна*; для r слишкомъ *малаго*, она будетъ *отрицательна*. Для доказательства беремъ выраженіе (А):

$$aq^t - (xq^{t-1} + xq^{t-2} + \cdots + x),$$

въ которомъ первый членъ есть долгъ съ процентами, а выраженіе въ скобкахъ есть сумма, необходимая для покрытія долга. Если за прибыль на 1 р. взять число R, большее истинной величины r, то данная уплата будетъ недостаточна для погашенія долга: въ самомъ дѣлѣ, таблицы, вычисленныя при помощи формулы § 838, показываютъ, что при a и t постоянныхъ, x возрастаетъ вмѣстѣ съ r; слѣд.

$$a(1 + \mathrm{R})^t > x(1 + \mathrm{R})^{t-1} + x(1 + \mathrm{R})^{t-2} + \cdots + x$$

или

$$a(1 - \mathrm{R})^t > x \cdot \frac{(1 + \mathrm{R})^t - 1}{\mathrm{R}}.$$

или

$$\mathrm{R} > \frac{x}{a}\left[1 - \frac{1}{(1 + \mathrm{R})^t}\right].$$

Если же вм. r взять меньшую величину R', то данная уплата будетъ слишкомъ велика для покрытія долга; слѣд. будетъ

$$R' < \frac{x}{a}\left[1 - \frac{1}{(1+R')^t}\right].$$

2. *Выборъ перваго приближенія.*—Если t весьма велико (больше 30), $\frac{1}{(1+r)^t}$ будетъ мало; пренебрегая этимъ членомъ, найдемъ для r приближенную *по избытку* величину

$$R = \frac{x}{a}.$$

Но это приближеніе весьма грубо, когда t содержится между 15 и 30, а если $t < 15$, оно не дастъ полезнаго указанія.

Вмѣсто того, чтобы пренебрегать въ ур—ніи уплатъ членомъ $\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{(1+r)^t}$, замѣнимъ знаменателя $(1+r)^t$ биномъ $1+tr$, меньшимъ $(1+r)^t$; получимъ

$$\frac{1}{(1+r)^t} < \frac{1}{1+tr}$$

и слѣд.

$$r > \frac{x}{a} - \frac{x}{a}\cdot\frac{1}{1+tr}, \quad \text{или} \quad r > \frac{x}{a} - \frac{1}{t}.$$

Слѣд. приближеніе *по недостатку* для r будетъ

$$r' = \frac{x}{a} - \frac{1}{t}.$$

3. *Приближеніе точное до 0,01.* Сначала испытываемъ r'; затѣмъ подставляемъ

$$r_2 = r' + 0{,}01; \quad r_3 = r' + 0{,}02; \quad r_4 = r' + 0{,}03;$$

и первое изъ этихъ чиселъ, которое сдѣлаетъ первую часть ур—нія (2) положительною, и будетъ значеніемъ r, точнымъ до 0,01 по *избытку*; а предыдущее будетъ точно до 0,01 по *недостатку*. Такимъ образомъ найдемъ два значенія для r: r_2 и r_3, напр., приближенныя въ противоположномъ смыслѣ съ точностью до 0,01.

4. *Слѣдующія приближенія, получаемыя интерполированіемъ.* Пусть e_2 есть величина первой части ур—нія (2) для $r = r_2$; e_3 ея величина для $r = r_3$; можно принять, съ малою погрѣшностью, что въ интервалѣ $r_3 - r_2$ измѣненія первой части пропорціональны приращеніямъ r.

Пусть будетъ y — поправка для r_2; говоримъ: когда r измѣняется отъ r_2 до r_3, первая часть измѣняется отъ e_2 до e_3; на сколько r должно измѣниться начиная отъ r_2, чтобы разница уменьшилась отъ e_2 до 0? Это сводится къ пропорціи

$$\frac{e_2 + e_3}{e_2} = \frac{0{,}01}{y},$$

изъ которой

$$y = \frac{0{,}01 \times e_2}{e_2 + e_3};$$

къ y достаточно ограничиться цифрою тысячныхъ: приближеніе r_2+y *всегда* будетъ по недостатку. Вычисляемъ разницы первой части для

$$r=r_2+y \quad \text{и} \quad r=r_2+y+0{,}001,$$

и если послѣднее значеніе положительно,

$$r_2+y \quad \text{и} \quad r_2+y+0{,}001$$

будутъ два приближенія — одно по недостатку, другое по избытку, точныя до 0,001.

Выходя отъ этихъ двухъ результатовъ, получимъ такимъ же путемъ цифру десятитысячныхъ, и т. д.

Численный примѣръ. Вычислить проценты, если $a = 10000$, $x = 1202{,}41$ р., $t = 10$.

Прежде всего находимъ:

$$\frac{x}{a} = 0{,}12024, \quad \frac{x}{a}-\frac{1}{t} = 0{,}0202 \text{ (по недостатку).}$$

Испытаніе 0,03.

$$(1{,}03)^{-10} = 0{,}744074; \quad 1-(1{,}03)^{-10} = 0{,}255926;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}255926 = 0{,}0307728.$$

Уклоненіе $= -0{,}0007728$, слѣд. 0,03 есть приближеніе *по недостатку*.

Испытаніе 0,04.

$$(1{,}04)^{-10} = 0{,}6755642; \quad 1-(1{,}04)^{-10} = 0{,}3244358;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}3244358 = 0{,}0390105;$$

уклоненіе $= +0{,}0009895$; слѣд. 0,04 — приближеніе *по избытку*.

Интерполированіе пропорціональными частями.

Сумма абсолютныхъ значеній уклоненій =

$$0{,}0007728+0{,}0009895 = 0{,}0017623,$$

$$y=0{,}01\times\frac{0{,}0007728}{0{,}0017623} = 0{,}004,$$

и новое приближеніе есть 0,034.

Испытаніе 0,034.

$$(1{,}034)^{-10} = 0{,}715805; \quad 1-(1{,}034)^{-10} = 0{,}284195;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}284195 = 0{,}0341719;$$

уклоненіе $= -0{,}0001719$, слѣд. 0,034 — приближеніе *по недостатку*.

Это уклоненіе составляетъ приблизительно четверть перваго: потому увеличиваемъ проценты на 0,001 и испытываемъ 0,035

Испытаніе 0,035.

$$(1{,}035)^{-10} = 0{,}708919;\quad 1-(1{,}035)^{-10} = 0{,}291081;$$

$$\frac{x}{a}\times 0{,}291081 = 0{,}0349999;$$

уклоненіе равно нулю, сл. 0,035 есть точная прибыль на 1 рубль.
Такимъ образомъ $p = 3{,}5$.

840 Опредѣленіе времени. Изъ ур. (1) имѣемъ

$$q^t = \frac{x}{x - ar},$$

откуда, взявъ логариѳмы обѣихъ частей,

$$t = \frac{\lg x - \lg(x - ar)}{\lg(1 + r)}.$$

Изслѣдованіе. Неизвѣстное t должно быть числомъ дѣйствительнымъ, положительнымъ и цѣлымъ.

Но формула времени содержитъ $\lg(x - ar)$, который не всегда можетъ быть взятъ, такъ какъ отрицат. число не имѣетъ дѣйствительнаго логариѳма. Отсюда необходимость различать три случая:

1. $x < ar$; $\lg(x - ar)$ будетъ мнимый, и задача невозможна. Это легко видѣть a priori. Въ самомъ дѣлѣ, ar представляетъ простые $^0/_0$ долга, и какъ срочная уплата меньше этихъ проц. денегъ, то ея недостаточно даже для уплаты процентовъ, такъ что долгъ съ теченіемъ времени будетъ увеличиваться.

2. $x = ar$. Въ этомъ случаѣ $x - ar = 0$, $\lg(x - ar) = -\infty$, и $t = \infty$. Это означаетъ опять, что долгъ не можетъ быть погашенъ. Въ самомъ дѣлѣ, a priori видно, что когда сроч. упл. x равна простымъ процентн. деньгамъ, то она будетъ погашать только эти деньги, и долгъ всегда будетъ оставаться одинаковымъ. Это и есть *непрерывная рента*, о которой было говорено выше.

3. $x > ar$: обыкновенный случай возможности задачи, такъ какъ срочная уплата, будучи больше годовыхъ процентовъ на капиталъ, будетъ погашать не только эти послѣдніе, но и часть капитала; такъ что черезъ нѣсколько лѣтъ долгъ будетъ погашенъ.

Самая формула даетъ положительное значеніе для t; но еще нужно, чтобы это значеніе было и *цѣлое*. Но если для t получается число дробное, то это означаетъ, что данною срочною уплатою долгъ не м. б. погашенъ, и что по истеченіи времени, равнаго цѣлой части t, остается часть долга, меньшая срочной уплаты. Пусть цѣлая часть t будетъ T; замѣтивъ, что долгъ выражается первою частью уравненія (1), заключаемъ, что по истеченіи T лѣтъ остатокъ долга будетъ

$$R = aq^T - \frac{x(q^T - 1)}{q - 1}.$$

Примѣръ. *Во сколько лѣтъ можно погасить долгъ въ 5000000 р., уплачивая ежегодно по 600000, если платится по 5%?*

$$ar = 250000 \text{ р.} \qquad \lg x = 5,7781513$$

$$x - ar = 350000 \text{ р.} \qquad \lg(x - ar) = 5,5440680$$

$$0,2340833$$

$$t = \frac{0,2340633}{0,02119} = 11. \;.\;.\;.$$

Такъ какъ для t получилось число дробное, то вычисляемъ остатокъ R долга.

$$1,05^{11} = 1,710339 \qquad \lg 5.10^6 \quad 6,6989700$$

$$1,05^{11} - 1 = 0,710339 \qquad \lg 1,05^{11} = 0,2330822$$

$$\lg 1,05^{11} = 0,2330822 \qquad 6,9320522$$

$$aq^T = 8552700$$

$$\lg 6.10^5 = 5.7781513$$

$$\lg 0,710339 = \overline{1},8514658$$

$$\text{доп. } \lg 0,05 = 1,3010300$$

$$6,9306471$$

$$\frac{x(q^t - 1)}{q - 1} = 8524072$$

$$R = 8552700 - 8524072 = 28628 \text{ р.}$$

841. Займы посредствомъ облигацій.— Большія промышленныя общества, напр. желѣзнодорожныя компаніи и т. п., дѣлаютъ займы, пуская въ обращеніе *облигаціи*, приносящія опредѣленный годовой или полугодовой процентъ; облигаціи погашаются, по извѣстной цѣнѣ, при помощи тиражей, въ теченіе извѣстнаго числа лѣтъ.

Ежегодно компанія отчисляетъ изъ барышей предпріятія опредѣленную сумму для уплаты процентовъ и для погашенія возможно большаго числа облигацій.

Пусть число выпущенныхъ облигацій будетъ N; *номинальная цѣна* каждой, т.-е. цѣна, по которой облигація д. б. выкуплена, пусть будетъ K; пусть погашеніе продолжается n лѣтъ; наконецъ, прибыль на 1 рубль въ 1 годъ пусть будетъ r.

Такимъ образомъ весь подлежащій погашенію заемъ $= NK$, а по истеченіи n лѣтъ этотъ долгъ обратится въ $NK(1 + r)^n$.

Если отчисляемая ежегодно на погашеніе долга сумма будетъ a, то цѣнность этихъ уплатъ къ концу срока будетъ

$$a(1 + r)^{n-1} + a(1 + r)^{n-2} + \ldots + a = \frac{a[(1 + r)^n - 1]}{r}.$$

Такъ какъ эта сумма должна погашать накопившійся къ концу n лѣтъ долгъ, то

$$\frac{a[(1 + r)^n - 1]}{r} = NK(1 + r)^n.$$

откуда и находимъ, какова должна быть ежегодная уплата a, погашающая долгъ; найдемъ

$$a = \frac{NV(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1}.$$

Часть этой суммы a идетъ на уплату процентовъ на *непогашенныя облигаціи*, а другая часть на выкупъ возможно-большаго числа облигацій.

При выпускѣ облигацій компанія составляетъ предварительно такъ наз. *таблицу погашенія* займа, т.-е. таблицу ежегодныхъ уплатъ, a, чтобы заранѣе знать, сколько облигацій должно быть ежегодно погашено.

Примѣръ. *Компанія выпускаетъ 600.000 облигацій, по 500 р. каждая, дающихъ ежегодно* $3^0/_0$ *прибыли. Выкупъ долженъ быть оконченъ въ 92 года. Какова д. б. срочная уплата, погашающая долгъ, и по сколько облигацій каждый годъ д. б. погашено?*

Вычисляя a, найдемъ

$$a = 9.635.083 \text{ р.}$$

Составимъ теперь таблицу погашенія.

1-й годъ. Въ концѣ 1-го года общество должно уплатить по 15 р. прибыли на каждую облигацію, всего 9.000.000 р. На погашеніе остается 9.635.083 — 9.000.000 = 635.083 р. Этою суммою можно погасить $\frac{635.083}{500} = 1.270$ облигаціи, и останется 83 р., которые прибавляютъ къ слѣдующей срочной уплатѣ.

2-й годъ. Осталось 600.000 — 1.270 = 598.730 облигацій. На нихъ нужно уплатить процентовъ 598.730 × 15 = 8.980.950 р. Срочная уплата, съ остаткомъ въ 83 р., составитъ 9.635.166 р. Вычитая отсюда проценты на облигаціи, найдемъ, что на погашеніе облигацій останется 9.635.166 — 8.980.950 = 654.216 р., что дозволяетъ погасить

$$\frac{654.216}{500} = 1.308 \text{ облигацій},$$

съ остаткомъ въ 216 р., которые присоединяютъ къ третьей уплатѣ.

Продолжая такимъ обр., найдемъ, что въ концѣ 3-го года будетъ погашено 1.347 обл. и останется 469 р.; что въ концѣ 4-го года погасится 1.388 обл.; въ концѣ 5-го — 1.432 обл., въ концѣ 6-го — 1.475, въ концѣ 7-го — 1.519, въ концѣ 8-го — 1.564, въ концѣ 9-го — 1.610, въ концѣ 10-го — 1.660 и т. д. Ежегодныя срочныя уплаты, вообще, какъ видимъ, изъ года въ годъ измѣняются.

842. *Пожизненныя ренты.* Такъ называются срочныя уплаты, выплачиваемыя ежегодно вкладчику, въ теченіе всей его жизни, банкиромъ или заемщикомъ. Капиталъ, отданный вкладчикомъ, д. б. таковъ, чтобы, при сложныхъ процентахъ, онъ могъ дать сумму, равную суммѣ всѣхъ выплатъ, которыя банкиръ обязуется выдавать вкладчику въ концѣ каждаго года, въ продолженіе всей его жизни.

Пусть извѣстны лѣта вкладчика, внесенный имъ банкиру капиталъ и норма процентовъ; пользуясь *таблицами смертности*, можно опредѣлить вѣроятное число лѣтъ, которое осталось прожить вкладчику.

Такимъ образомъ задача о пожизненныхъ рентахъ есть ничто иное, какъ частный случай задачи о срочныхъ уплатахъ.

Страхованіе жизни, *пожизненныя ренты*, *сберегательныя кассы*, — все это основано на вѣроятной продолжительности человѣческой жизни и на быстротѣ наростанія капитала, помѣщеннаго на сложные проценты.

843. Задача. *Нѣкто для покупки своей женѣ ежегодной пенсіи въ b руб., платитъ ежегодно во вдовью кассу a руб. По истеченіи n лѣтъ умираетъ вкладчикъ, а m лѣтъ спустя и его жена. Сколько пріобрѣла или потеряла касса, если проценты считались тою и другою стороною по p въ годъ?*

Пусть плата тою и другою стороною совершается въ *началѣ* каждаго года, а заключеніе счетовъ по истеченіи $n+m$ лѣтъ: въ такомъ случаѣ 1-й взносъ приноситъ проценты $n+m$ лѣтъ, и слѣд., достигаетъ величины aq^{n+m}; второй годомъ меньше и достигаетъ величины aq^{n+m-1} и т. д. Послѣдній вкладъ находится подъ % $m+1$ годъ, и цѣнность его $= aq^{m+1}$. Такимъ же образомъ, цѣнности первой пенсіи b черезъ m лѣтъ равна bq^m, послѣдней $= bq$. Прибыль (положит. или отриц.) кассы будетъ

$$(aq^{n+m} + aq^{n+m-1} + \dots + aq^{m+1}) - (bq^m + bq^{m-1} + \dots + bq)$$

или

$$\frac{aq^{m+1}(q^n-1) - bq(q^m-1)}{q-1}.$$

Примѣръ. Если $a = 50$ р., $b = 200$ р., $m = 8$, $n = 20$ и $p = 4$ р., то касса имѣетъ прибыль $= 202$ р.

844. Задача. *v лицъ составили общество. Какой капиталъ A каждое изъ нихъ должно дать банкиру, чтобы получать отъ него пожизненную ренту, равную a рублямъ?*

Расчетъ ведется такъ: v лицъ, по истеченіи 1 года, составятъ товарищество изъ v' лицъ; банкиръ долженъ имъ выдать av' руб. Въ концѣ 2-го года оставшимся въ живыхъ онъ долженъ выплатить av'' и т. д.

Но ренты a, которыя банкиръ долженъ выплатить v', v'', v''' . . . оставшимся въ живыхъ вкладчикамъ, обращаются въ концѣ 1-го, 2-го, 3-го . . . годовъ въ

$$a(1+r),\quad a(1+r)^2,\quad a(1+r)^3,\ \dots$$

v' вкладчиковъ, которые въ концѣ 1-го года должны получить ренты по a руб каждый, должны бы были внести $\frac{v'a}{1+r}$ р. въ началѣ 1-го года; v'' вкладчиковъ, которые въ концѣ 2-го года должны получить по a руб., должны бы были въ началѣ 1-го года внести $\frac{v''a}{(1+r)^2}$ руб. и т. д. Такъ что v вкладчиковъ должны бы были внести въ началѣ 1-го года сумму

$$\frac{v'a}{1+r} + \frac{v''a}{(1+r)^2} + \dots$$

Такимъ образомъ капиталъ A, внесенный каждымъ, равенъ

$$A = \frac{a}{v}\left[\frac{v'}{1+r} + \frac{v''}{(1+r)^2} + \dots\right]$$

или, положивъ $\frac{1}{1+r} = q$:

$$A = \frac{aq}{v}\left[v' + v''q + v'''q^2 + \dots\right]$$

Если принять гипотетическій законъ *Моавра*, что, начиная съ извѣстнаго возраста число смертей составляетъ величину постоянную, то, назвавъ это число для каждаго года буквою d, можно предыдущей формулѣ дать видъ

$$A = \frac{aq}{v}[(v-d) + (v-2d)q + (v-3d)q^2 + \dots + (v-nd)q^{n-1}],$$

гдѣ n — число лѣтъ періода.

Послѣднюю формулу можно написать въ видѣ

$$A = aq(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}) - \frac{aqd}{v}(1+2q+3q^2+4q^3+\dots+nq^{n-1})$$

или, замѣчая, что

$$1+2q+3q^2+\dots+nq^{n-1} = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q},$$

въ видѣ:

$$A = aq\left\{\frac{1-q^n}{1-q} - \frac{d}{v}\left[\frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}\right]\right\}.$$

845. Историческое примѣчаніе. — Еще въ 1544 г. *Михаилъ Стифель* открылъ, въ нѣкоторомъ родѣ, теорію логариѳмовъ; однако же изъ своего открытія онъ не сдѣлалъ примѣненія къ упрощенію вычисленій. Позднѣе, когда *Джонъ Неперъ*, шотландскій баронъ, примѣнилъ теорію логариѳмовъ къ практикѣ вычисленій, опубликовавъ свое открытіе въ 1614 г. въ сочиненіи Mirific. Logarithmorum canonis descriptio. Но онъ принялъ для своихъ логариѳмовъ основаніе ($e = 2,71828\ldots$), т. е. неудобное для вычисленій надъ числами десятичной системы нумераціи. Его другъ *Бриггъ* (1556—1630), оксфордскій профессоръ, устранилъ этотъ недостатокъ, взявъ за основаніе системы логариѳмовъ число 10 по указанію самого Непера. Теорія логариѳмовъ въ той формѣ, какъ она изложена у насъ, дана *Эйлеромъ* въ 1748 г.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

НЕПРЕРЫВНЫЯ ДРОБИ И ИХЪ ПРИЛОЖЕНІЯ.

ГЛАВА LIII.

Непрерывныя дроби.

Опредѣленіе.—Происхожденіе непрерывныхъ дробей.—Свойства приближеній.—Періодическія непрерывныя дроби.—Приложенія.

846. Непрерывною дробью наз. выраженіе, состоящее изъ цѣлаго числа (которое, въ частности, м. б. нулемъ), сложеннаго съ дробью, у которой знаменатель есть опять цѣлое съ дробью, и т. д.; однимъ словомъ, выраженіе вида

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \ldots}}$$

Элементарная алгебра изучаетъ частный видъ такихъ дробей, а именно случаи, когда числители b, d,... равны $+1$, а знаменатели c, e,... суть цѣлыя положительныя числа; слѣд., элементарная алгебра имѣетъ дѣло съ дробями вида

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$$

Количества a_1, a_2, a_3,... наз. *неполными частными*. a_n называютъ n-мъ *неполнымъ частнымъ*; *полнымъ* же частнымъ на этой ступени называютъ $a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ldots}$. Дроби $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, $\frac{1}{a_4}$, ... называютъ *членами*, или *звеньями* непрерывной дроби. Если число членовъ непрерывной дроби ограничено, дробь наз. *конечною*; при неограниченномъ числѣ членовъ она наз. *безконечною*.

Сокращенно непрерывную дробь пишутъ въ видѣ:

$$a_1 \mid a_2, a_3, \ldots \mid \quad \text{или} \quad \mid a_1;\ a_2,\ a_3 \ldots \mid$$

гдѣ a_1 — цѣлое число.

847. Происхожденіе непрерывныхъ дробей.—Этого рода дроби совершенно натурально являются въ анализѣ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ нѣкоторое количество x, соизмѣримое или несоизмѣримое, оно необходимо содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами: a_1 и a_1+1. Слѣд. можно положить

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} \ldots (1)$$

если $x_1 > 1$. Изъ равенства (1) выводимъ

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1}.$$

Количество $\frac{1}{x - a_1}$ также содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a_2 и a_2+1, гдѣ a_2 по меньшей мѣрѣ равно 1, что ясно изъ (1). Такимъ образомъ можно написать

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

гдѣ $x_2 > 1$. Продолжая такимъ образомъ, имѣемъ для опредѣленія x формулу

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}$$

Это — непрерывная дробь въ вышеуказанномъ тѣсномъ и обычномъ смыслѣ слова; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — числа цѣлыя и положительныя; изъ нихъ одно только a_1 м. б. нулемъ, когда $x < 1$.

848. Теорема. *Всякая конечная непрерывная дробь представляетъ нѣкоторое соизмѣримое число.*

Пусть
$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}};$$

отсюда
$$\frac{1}{x - a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}.$$

Перенося a_2 въ лѣвую часть равенства, находимъ

$$\frac{x - a_1}{1 + a_1 a_2 - a_2 x} = a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}.$$

Продолжая такимъ же образомъ, будемъ получать въ лѣвой части всегда частное двухъ линейныхъ относительно x выраженій. Наконецъ, получимъ

$$\frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x + \beta'} = a_n.$$

откуда

$$x = \frac{a_0}{2} - \frac{\ldots}{2a_1} -$$

количество соизмѣримое (не равное ни 0, ни ∞, ибо x содержится между a_1 и $a_1 + 1$).

849. Теорема обратная. — *Всякое соизмѣримое число можетъ быть представлено подъ видомъ конечной непрерывной дроби.*

Пусть данное соизмѣримое число будетъ $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b — цѣлыя, первыя между собою, числа; и пусть, во-первыхъ, будетъ $a > b$. Совершая дѣленіе, указываемое дробью, получаемъ въ частномъ q_1 и въ остаткѣ r_1; такъ что

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}};$$

совершая дѣленіе $\frac{b}{r_1}$ (пусть частное $= q_2$, остатокъ r_2) находимъ

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}};$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, самымъ ходомъ дѣйствія мы вынуждены выполнять надъ a и b такія же дѣйствія, какія пришлось бы совершать надъ этими числами при нахожденіи ихъ о. н. д.; и какъ a и b — числа первыя между собою, то необходимо дойдемъ до остатка $r_n = 1$. Такимъ образомъ дѣйствіе закончится и получится *конечная* непрерывная дробь

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{r_{n-1}}}}}$$

Если $a < b$ и дробь $\frac{a}{b}$ — правильная, то, раздѣливъ оба ея числа на a, находимъ

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{\cfrac{b}{a}},$$

гдѣ $\frac{b}{a}$ развертывается, по предыдущему, въ конечную непрерывную дробь.

850. Теорема. — *Развертываніе соизмѣримаго числа въ непрерывную дробь возможно единственнымъ способомъ.*

Пусть предложенное число будетъ x, и пусть, по обращеніи въ непрерывную дробь вышеуказаннымъ способомъ, оно даетъ результатъ

$$x = (a_1;\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n) \quad \ldots (1).$$

Допустимъ, что какимъ либо инымъ способомъ оказалось возможнымъ найти для x другое разложеніе въ непрерывную дробь

$$x = | \alpha_1; \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p | \quad \ldots (2)$$

Докажемъ, что оба результата тождественны. Равенство (1) доказываетъ, что x содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a_1 и $a_1 + 1$; равенство (2) доказываетъ, что x заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми числами α_1 и $\alpha_1 + 1$. Сближая эти два заключенія, видимъ, что $a_1 = \alpha_1$.

Затѣмъ равенства (1) и (2) можно представить такъ:

$$\frac{1}{x - a_1} = | a_2; a_3, \ldots, a_n |, \quad \frac{1}{x - \alpha_1} = | \alpha_2; \alpha_3, \ldots, \alpha_p |$$

Разсуждая какъ выше указано, выводимъ, что $a_2 = \alpha_2$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что $a_3 = \alpha_3$ и т. д.

851. Приближенія или подходящія дроби. — Соединеніе нѣсколькихъ членовъ непрерывной дроби

$$x = a_1 | a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots |$$

съ включеніемъ всегда цѣлой части, т.-е. выраженія

$$\frac{a_1}{1};\ a_1 + \frac{1}{a_2};\ a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}};\ \ldots$$

представляющія величину непрер. дроби x приближенно, называются *приближеніями* или *подходящими дробями*. Займемся изученіемъ свойствъ этихъ величинъ.

852. I. *Законъ составленія приближеній.* Первое приближеніе получимъ, сохранивъ только цѣлую часть и отбросивъ дробную часть непрерывной дроби; такимъ образомъ *первое приближеніе* $= \frac{a_1}{1}$.

Второе приближеніе найдемъ, придавъ къ a_1 дробь $\frac{1}{a_2}$ и откинувъ все остальное: *второе приближеніе* будетъ поэтому: $a_1 + \frac{1}{a_2}$, или $\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$.

Третье приближеніе получается изъ второго прибавленіемъ къ его знаменателю звена $\frac{1}{a_3}$; поэтому 3-е приближеніе будетъ

$$\frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1(a_2 a_3 + 1) + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

Замѣчаемъ, что числитель этого приближенія получается умноженіемъ числителя $a_1 a_2 + 1$ предшествующаго приближенія на неполное частное a_3 составляемаго, и придаваніемъ къ произведенію числителя a_1 предпредыдущаго приближенія. Точно такъ же знаменатель 3-го приближенія получается умноженіемъ знаменателя предшествующаго прибл. на неполное частное составляемаго, и прибавленіемъ къ этому произведенію знаменателя предыдущаго приближенія. Докажемъ, что законъ этотъ имѣетъ мѣсто для составленія приближенія какого угодно порядка. Пусть будутъ

$$\frac{P_{p-2}}{Q_{p-2}},\quad \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}},\quad \frac{P_p}{Q_p}\quad \text{и}\quad \frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$$

четыре рядомъ стоящія приближенія; a_p — неполное частное, соотвѣтствующее приближенію $\frac{P_p}{Q_p}$ и a_{p+1} — соотвѣтствующее приближенію $\frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$. Допустивъ, что законъ, замѣченный нами на третьемъ приближеніи, справедливъ для приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$, докажемъ, что онъ будетъ имѣть мѣсто и для приближенія $\frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$.

По допущенію, имѣемъ:

$$\frac{P_p}{Q_p}=\frac{P_{p-1}a_p+P_{p-2}}{Q_{p-1}a_p+Q_{p-2}}. \qquad (1)$$

Для образованія слѣдующаго приближенія замѣняемъ въ (1) a_p биномомъ $a_p+\frac{1}{a_{p+1}}$; находимъ

$$\frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}=\frac{P_{p-1}\left(a_p+\frac{1}{a_{p+1}}\right)+P_{p-2}}{Q_{p-1}\left(a_p+\frac{1}{a_{p+1}}\right)+Q_{p-2}}=\frac{(P_{p-1}a_p+P_{p-2})a_{p+1}+P_{p-1}}{(Q_{p-1}a_p+Q_{p-2})a_{p+1}+Q_{p-1}}$$

$$=\frac{P_p a_{p+1}+P_{p-1}}{Q_p a_{p+1}+Q_{p-1}}.$$

Доказано, что если законъ справедливъ для какого-либо приближенія, то онъ справедливъ и для слѣдующаго приближенія. Непосредственнымъ составленіемъ приближеній мы убѣдились въ справедливости закона для третьяго приближенія, слѣд., по доказанному, онъ вѣренъ и для четвертаго; будучи вѣренъ для четвертаго приближенія, онъ вѣренъ и для пятаго, и т. д.; общность закона такимъ образомъ доказана. Итакъ: *для составленія приближенія какого угодно порядка, нужно умножить оба члена предшествующаго приближенія на неполное частное составляемаго, и къ произведеніямъ прибавить соотвѣтственно члены приближенія, стоящаго двумя порядками ниже.*

Примѣръ. — Пусть имѣемъ непрерывную дробь

$$x=0\,|\,36,\ 7,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 2\,|\,.$$

1-е приближеніе — $\frac{0}{1}$; второе $\frac{1}{36}$; для составленія слѣдующихъ поступаемъ такъ: дѣлаютъ столько графъ,

		7	1	1	1	4	2
0	1	7	8	15	23	107	237
1	36	253	289	542	831	3866	8563

сколько слѣдуетъ составить приближеній, причемъ въ первыхъ двухъ графахъ помѣщаютъ 1-е и 2-е приближенія, а въ заголовкахъ слѣдующихъ графъ — неполныя частныя 3-го, 4-го. . . . приближеній. Для составленія какого-либо приближенія остается, слѣдуя правилу, помножить числит. и знам. предыдущаго приближенія на цифру, стоящую въ заголовкѣ составляемой дроби, и къ произведеніямъ прибавить соотвѣтственно числителя и знаменателя приближенія, двумя порядками ниже составляемаго. Такимъ образомъ, для третьяго приближенія находимъ $\frac{1.7+0}{36.7+1}$, или $\frac{7}{253}$; для 4-го: $\frac{7.1+1}{253.1+36}$, или $\frac{8}{289}$, и т. д.

Примѣчаніе. — Если данная непрерывная дробь не имѣетъ цѣлой части, то за первое приближеніе берутъ $\frac{0}{1}$.

853. II. *Приближенія четнаго порядка — больше, а нечетнаго — меньше величины непрерывной дроби.*

Пусть дана непрерывная дробь

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

Первое приближеніе $\frac{a_1}{1}$, очевидно, *меньше* x на $\frac{1}{a_2 + \ldots}$.

Второе приближеніе $a_1 + \frac{1}{a_2}$ *больше* x: ибо знаменатель a_2 дроби $\frac{1}{a_2}$ меньше $a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}$, слѣд. дробь $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_2 + \ldots}$, а потому $a_1 + \frac{1}{a_2} > x$.

Третье приближеніе $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$ опять *меньше* x; такъ какъ дробь $\frac{1}{a_3}$, придаваемая здѣсь къ знаменателю a_2 дроби $\frac{1}{a_2}$, больше $\cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}$; а потому знаменатель $a_2 + \frac{1}{a_3}$ больше настоящаго, а дробь $\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$ менѣе настоящей, потому и $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} < x$. И т. д.

854. Слѣдствіе. — *Величина непрерывной дроби содержится между каждыми двумя смежными приближеніями.*

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ приближенія четнаго порядка — больше, а нечетнаго — меньше величины непрерывной дроби; а какъ изъ двухъ смежныхъ приближеній одно — четнаго, а другое — нечетнаго пор., то очевидно, что величина непрерывной дроби заключается между ними.

855. III. *Разность между двумя смежными приближеніями всегда равна* ± 1, *раздѣленной на произведеніе ихъ знаменателей.*

Пусть будутъ $\frac{P_{p-2}}{Q_{p-2}}$, $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$, $\frac{P_p}{Q_p}$ три смежныя приближенія, и a_p — неполное частное, соотвѣтствующее послѣднему.

По закону составленіе приближеній

$$\frac{P_p}{Q_p} = \frac{P_{p-1}a_p + P_{p-2}}{Q_{p-1}a_p + Q_{p-2}}.$$

Вычтя первое изъ втораго, имѣемъ

$$\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} - \frac{P_{p-2}}{Q_{p-2}} = \frac{P_{p-1}Q_{p-2} - P_{p-2}Q_{p-1}}{Q_{p-1}Q_{p-2}} \dots (1).$$

Вычтя второе изъ третьяго:

$$\frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \frac{P_{p-1}a_p + P_{p-2}}{Q_{p-1}a_p + Q_{p-2}} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \frac{P_{p-2}Q_{p-1} - P_{p-1}Q_{p-2}}{(Q_{p-1}a_p + Q_{p-2})Q_{p-1}} =$$

$$= \frac{-(P_{p-1}Q_{p-2} - P_{p-2}Q_{p-1})}{Q_{p-1}Q_p} \dots (2).$$

Сравнивая обѣ разности, замѣчаемъ, что знаменатель каждой изъ нихъ есть произведеніе знаменателей соотвѣтствующихъ приближеній; числители же ихъ равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку. Изъ равенства абсолютныхъ величинъ числителей всѣхъ разностей слѣдуетъ, что для ихъ опредѣленія можно взять два какія угодно смежныя приближенія. Такъ, вычитая изъ второго первое, находимъ

$$\frac{a_1a_2 + 1}{a_2} - \frac{a_1}{1} = \frac{1}{a_2};$$

откуда заключаемъ, что абс. велич. числителей всѣхъ разностей равна 1; знакъ же, очевидно, будетъ (+), когда изъ приближенія четнаго порядка вычитаемъ приближеніе порядка нечетнаго (ибо первое больше второго), и (—) въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ

$$\frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \frac{\pm 1}{Q_{p-1}Q_p}$$

856. IV. *Предѣлъ разности между непрерывною дробью и однимъ изъ приближеній.*

Такъ какъ величина непрерывной дроби заключается между двумя смежными приближеніями, напр., $\frac{P_p}{Q_p}$ и $\frac{P_{p+1}}{Q_{p+1}}$, то, очевидно, разность между величиною x этой дроби и однимъ изъ этихъ приближеній, по абсолютной величинѣ, меньше $\frac{1}{Q_pQ_{p+1}}$; такъ что, взявъ вмѣсто истинной величины непрерывной дроби приближеніе $\frac{P_p}{Q_p}$, можемъ быть увѣрены, что *ошибка*, которую мы при этомъ дѣлаемъ, *меньше единицы, раздѣленной на произведеніе знаменателей взятаго приближенія и непосредственно за нимъ слѣдующаго.*

Примѣръ. — Непрерывная дробь

$$x = 0 \mid 2,\ 11,\ 2,\ 1,\ 10 \mid$$

имѣетъ приближенія: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{11}{23}, \frac{23}{48}, \frac{34}{71}, \frac{363}{758}$.

Взявъ вмѣсто истинной величины непр. дроби, наприм., ея третье приближеніе, дѣлаемъ погрѣшность, меньшую $\frac{1}{48.23}$, т.-е. $\frac{1}{1004}$.

Если бы мы пожелали имѣть предѣлъ погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$, не вычисляя знаменателя слѣдующаго приближенія, то достаточно взять въ соображеніе, что $\frac{1}{Q_p Q_{p+1}} = \frac{1}{Q_p(Q_p a_{p+1} + Q_{p-1})}$, гдѣ $a_{p+1} \geqslant 1$, такъ-что наименьшая величина количества Q_{p+1} равна $Q_p + Q_{p-1}$, чаще же больше этой суммы. Такимъ образомъ дробь $\frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})} \geqslant \frac{1}{Q_p Q_{p+1}}$, а слѣдов. ошибка приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$, меньшая $\frac{1}{Q_p Q_{p+1}}$, и подавно меньше $\frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}$; таковъ второй, болѣе грубый, предѣлъ погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$.

Если бы въ знаменателѣ дроби $\frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}$ мы откинули слагаемое Q_{p-1}, то этимъ уменьшили бы знаменателя; слѣд. $\frac{1}{Q_p^2} > \frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})}$. Заключаемъ, что и дробь $\frac{1}{Q_p^2}$ можетъ также служить предѣломъ погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$.

Итакъ, для опредѣленія погрѣшности приближенія $\frac{P_p}{Q_p}$ служатъ неравенства

$$1.\ x - \frac{P_p}{Q_p} < \frac{1}{Q_p Q_{p+1}};\quad 2.\ x - \frac{P_p}{Q_p} < \frac{1}{Q_p(Q_p + Q_{p-1})};\quad 3.\ x - \frac{P_p}{Q_p} < \frac{1}{Q_p^2}.$$

Примѣняя второй предѣлъ къ приближенію $\frac{11}{23}$, имѣемъ:

$$x - \frac{11}{23} < \frac{1}{23(23+2)},\ \text{или}\ \frac{1}{575}.$$

Формула для третьяго предѣла даетъ

$$x - \frac{11}{23} < \frac{1}{23^2},\ \text{т.-е.}\ \frac{1}{529}.$$

857. V. *Всякое приближеніе есть дробь несократимая.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть числ. и знам. приближенія $\frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}}$ имѣютъ общаго множителя k, отличнаго отъ 1, такъ что $P_{p-1} = kr$, $Q_{p-1} = kr'$. Если $\frac{P_p}{Q_p}$ есть слѣдующее приближеніе, то

$$\frac{P_p}{Q_p} - \frac{P_{p-1}}{Q_{p-1}} = \pm \frac{1}{Q_{p-1} Q_p},\quad \text{откуда}\quad P_p Q_{p-1} - P_{p-1} Q_p = \pm 1.$$

Подставляя сюда вмѣсто P_{p-1} и Q_{p-1} соотвѣтственно kr и kr', находимъ: $kr'P_p - krQ_p = \pm 1$, и слѣд. $r'P_p - rQ_p = \pm \frac{1}{k}$, т.-е. что разность двухъ цѣлыхъ чиселъ равна правильной дроби: результатъ невозможный; сл. невозможно и предположеніе, что P_{p-1} и Q_{p-1} имѣютъ общаго множителя.

858. VI. *Всякое приближеніе ближе подходитъ къ величинѣ непрерывной дроби, нежели ему предшествующее.* Пусть $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ будутъ три, рядомъ стоящія, приближенія непрерывной дроби

$$x = a\,[\,a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots\ \ldots\,]$$

и a_{n+1} — неполное частное послѣдняго изъ нихъ. Имѣемъ

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Если въ это выраженіе вмѣсто a_{n+1} подставимъ полное частное

$$a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \ldots}} \quad \ldots (1)$$

то получимъ точную величину дроби x. Обозначивъ (1) буквою y и замѣтивъ, что $y > 1$, ибо наименьшая величина a_{n+1} есть 1, найдемъ, что

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}.$$

Намъ нужно доказать, что разность между x и приближеніемъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, по абсол. велич., больше разности между x и слѣдующимъ приближеніемъ $\frac{P_n}{Q_n}$.

Составимъ эти разности:

$$1)\ x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})},$$

а какъ

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \pm 1,$$

то

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\pm y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})} = \Delta_1$$

$$2)\ x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}}{Q_n(Q_n y + Q_{n-1})} = \frac{\pm 1}{Q_n(Q_n y + Q_{n-1})} = \Delta_2.$$

Отсюда выводимъ абсолютную величину отношенія $\Delta_1 : \Delta_2$; именно

$$\Delta_1 : \Delta_2 = y Q_n : Q_{n-1}.$$

Такъ какъ $y > 1$, а $Q_n > Q_{n-1}$ (по закону составленія приближеній), то $yQ_n > Q_{n-1}$, а потому и $\Delta_1 > \Delta_2$, что и требовалось доказать.

859. Слѣдствіе. Приближенія четнаго порядка всѣ *больше* непр. дроби x, а нечетнаго—всѣ *меньше* ея. Но каждое послѣдующее прибл. подходитъ къ величинѣ непр. дроби ближе предыдущаго, то 1-е, 3-е, 5-е, . . . т.-е. приближенія *нечетнаго порядка,* хотя всегда остаются меньше x, но приближаясь болѣе и болѣе къ x, представляютъ рядъ *возрастающихъ* чиселъ. Приближенія *четнаго* порядка (2-е, 4-е, 6-е, . . .), оставаясь больше x и приближаясь болѣе и болѣе къ x, составляютъ рядъ *убывающихъ* чиселъ. Общимъ же предѣломъ тѣхъ и другихъ служитъ сама непр. дробь.

860 VII. *Всякое приближеніе подходитъ къ величинѣ непрерывной дроби ближе всякой иной несократимой дроби съ меньшими членами.*

Пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ будетъ одно изъ приближеній непрерывной дроби x: надо доказать, что не существуетъ никакой иной несократимой дроби, которая, имѣя меньшіе члены, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, подходила бы къ x ближе, нежели $\frac{P_n}{Q_n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что существуетъ несократимая дробь $\frac{A}{B}$, выражающая величину x точнѣе, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, и вмѣстѣ съ тѣмъ имѣющая члены меньшіе, чѣмъ взятое приближеніе; и посмотримъ, къ чему поведетъ это допущеніе. Во-первыхъ, ясно, что дробь $\frac{A}{B}$ не м. б. ни однимъ изъ приближеній предшествующихъ дроби $\frac{P_n}{Q_n}$, ибо послѣдняя, по доказанному, ближе лежитъ къ x, чѣмъ всѣ предыдущія приближенія, а $\frac{A}{B}$, по допущенію, лежитъ къ x еще ближе, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Затѣмъ, $\frac{A}{B}$ не можетъ быть ни однимъ изъ приближеній, слѣдующихъ за $\frac{P_n}{Q_n}$; ибо эти приближенія, хотя и лежатъ ближе къ x, какъ и дробь $\frac{A}{B}$, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, но выражаются большими членами, нежели эта послѣдняя дробь (по закону составленія приближеній), между тѣмъ какъ члены дроби $\frac{A}{B}$, по условію, меньше членовъ дроби $\frac{P_n}{Q_n}$. Итакъ, убѣждаемся, что $\frac{A}{B}$ не м. б. ни однимъ изъ приближеній.

Пусть, далѣе, $\frac{P_n}{Q_n}$ есть приближеніе четнаго порядка, и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — ему предшествующее; очевидно

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < x < \frac{P_n}{Q_n}$$

Такъ какъ всякое приближеніе выражаетъ величину непрерывной дроби точнѣе предшествующаго, то $\frac{P_n}{Q_n} - x < x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что на чертежѣ указано тѣмъ, что промежутокъ CE (E мѣсто непрер. дроби x) больше ED.

Пусть $\frac{A}{B}$ выражаетъ величину x точнѣе, нежели $\frac{P_n}{Q_n}$, а потому и подавно точнѣе, нежели $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; слѣд. дробь $\frac{A}{B}$ должна лежать гдѣ-нибудь или въ промежуткѣ между x и $\frac{P_n}{Q_n}$, или въ промежуткѣ между x и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, а слѣд. непремѣнно — между $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, такъ что

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > \frac{A}{B} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \text{ или } \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{AQ_{n-1} - BP_{n-1}}{BQ_{n-1}},$$

или

$$\frac{1}{Q_n} > \frac{AQ_{n-1} - BP_{n-1}}{B}, \quad \text{откуда} \quad B > Q_n(AQ_{n-1} - BP_{n-1}).$$

Выраженіе въ скобкахъ есть число цѣлое, неравное нулю: цѣлое — потому, что A, Q_{n-1}, B и P_{n-1}—числа цѣлыя; неравное нулю—потому, что изъ допущенія $AQ_{n-1} - BP_{n-1} = 0$ вышло бы: $\frac{A}{B} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, чего, по доказанному, быть не можетъ. Такимъ образомъ, наименьшая величина скобокъ равна 1, а потому $B > Q_n \cdot 1$, или $B > Q_n$, т.-е. чтобы дробь $\frac{A}{B}$ выражала величину непрерывной дроби точнѣе приближенія $\frac{P_n}{Q_n}$, надо, чтобы знаменатель этой дроби былъ больше знаменателя разсматриваемаго приближенія.

Если $\frac{A}{B}$ заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, т.-е. $\frac{P_n}{Q_n} > \frac{A}{B} > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, то, раздѣливъ 1 на каждую изъ этихъ дробей, найдемъ $\frac{Q_n}{P_n} < \frac{B}{A} < \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$; откуда

$$\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} - \frac{B}{A} < \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} - \frac{Q_n}{P_n}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{P_n} > \frac{AQ_{n-1} - BP_{n-1}}{A},$$

откуда $A > P_n(AQ_{n-1} - BP_{n-1})$; а какъ minimum скобокъ равенъ 1, то $A > P_n \cdot 1$ или $A > P_n$; это значитъ, что для выполненія вышесказаннаго требованія и числитель дроби $\frac{A}{B}$ долженъ быть больше числителя приближенія $\frac{P_n}{Q_n}$.

Такимъ образомъ доказано, что не существуетъ такой дроби, которая, имѣя простѣйшій видъ, чѣмъ нѣкоторое приближеніе, выражала бы величину непрерывной дроби точнѣе этого приближенія.

Примѣчаніе.—Теперь становятся понятны выгоды, представляемыя обращеніемъ чиселъ въ непрерывныя дроби. Пусть, напр., рѣшеніе нѣкотораго вопроса привело къ несократимой дроби $\frac{M}{N}$, члены которой выражены большими числами, затрудняющими употребленіе этого результата въ приложеніяхъ. Тогда мы обращаемъ дробь $\frac{M}{N}$ въ непрерывную и составляемъ подходящія дроби. Выбравъ одну изъ послѣднихъ и замѣнивъ ею дробь $\frac{M}{N}$, мы теперь увѣрены, что не существуетъ никакой иной дроби, которая имѣя меньшіе члены, нежели взятая подходящая, выражала бы величину дроби $\frac{M}{N}$ точнѣе.

861. VIII.— *Если* $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ *суть два послѣдовательныя приближенія къ непрерывной дроби* x, *то* $\frac{P_{n-1}P_n}{Q_{n-1}Q_n}$ *будетъ больше, либо меньше* x^2, *смотря по тому, будетъ ли* $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ *больше или меньше чѣмъ* $\frac{P_n}{Q_n}$.

Пусть z будетъ полное частное, соотвѣтствующее приближенію $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, непосредственно слѣдующему за $\frac{P_n}{Q_n}$. Въ такомъ случаѣ $x = \frac{P_n z + P_{n-1}}{Q_n z + Q_{n-1}}$;

слѣдовательно

$$\frac{P_{n-1}P_n}{Q_{n-1}Q_n} - x^2 = \frac{1}{Q_{n-1}Q_n(Q_nz+Q_{n-1})^2}\{P_{n-1}P_n(zQ_n-Q_{n-1})^2 - Q_{n-1}Q_n(zP_n+P_{n-1})^2\}$$

$$= \frac{(z^2P_nQ_n - P_{n-1}Q_{n-1})(P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1})}{Q_{n-1}Q_n(Q_nz+Q_{n-1})^2}.$$

Множитель $z^2P_nQ_n - P_{n-1}Q_{n-1}$ положителенъ, такъ какъ $P_n > P_{n-1}$, $Q_n > Q_{n-1}$ и $z > 1$; а отсюда прямо слѣдуетъ, что $\frac{P_{n-1}P_n}{Q_{n-1}Q_n} >$, или $< x^2$, смотря по тому, будетъ ли $P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1} > 0$, или < 0; т.-е. смотря по тому, будетъ ли $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} >$, или $< \frac{P_n}{Q_n}$.

Слѣдствіе. Изъ этого доказательства слѣдуетъ, что разности

$$P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1}, \quad P_{n-1}P_n - Q_{n-1}Q_nx^2, \quad P_{n-1}^2 - Q_{n-1}^2x^2, \quad Q_n^2x^2 - P_n^2$$

имѣютъ одинаковый знакъ.

Періодическія непрерывныя дроби.

862. Опредѣленіе. Пусть дана непрерывная дробь

$$x = (a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots (1).$$

Положивъ, что число n неполныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ, разсмотримъ ряды (А) и (В)

$$(A) \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \frac{P_5}{Q_5}, \ldots$$

$$(B) \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_4}{Q_4}, \quad \frac{P_6}{Q_6}, \ldots$$

изъ которыхъ въ первомъ содержатся подходящія дроби нечетнаго, во второмъ четнаго порядка. Рядъ (А) содержитъ дроби, возрастающія, но всегда меньшія $\frac{P_2}{Q_2}$; а потому члены этого ряда имѣютъ нѣкоторый предѣлъ f. Члены ряда (В), убывая, но оставаясь всегда больше $\frac{P_1}{Q_1}$, также стремятся, въ силу этого, къ нѣкоторому предѣлу f'. Легко доказать, что $f = f'$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{P_n}{Q_n}$ есть нѣкоторый членъ ряда (А); $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ — представляетъ въ такомъ случаѣ соотвѣтствующій членъ ряда (В); но

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_nQ_{n+1}},$$

причемъ Q_n и Q_{n+1} идутъ неограниченно возрастая, такъ что $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ стремятся къ нулю, по мѣрѣ того какъ n приближается къ ∞. Такимъ образомъ, оба предѣла f и f' равны между собою. *Этотъ-то общій предѣлъ рядовъ (А) и (В) и разсматриваютъ какъ величину безконечной непрерывной дроби.*

Этотъ предѣлъ есть число несоизмѣримое. Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что оно соизмѣримо, мы при обращеніи его въ непрерывную дробь, получили бы конечную непрерывную дробь.

863. Періодическая непрерывная дробь. Когда въ безконечной непрерывной дроби, значеніе которой теперь вполнѣ опредѣлено, неполныя частныя воспроизводятся въ одномъ и томъ же неизмѣнномъ порядкѣ, дробь называютъ *періодическою*. Различаютъ два рода непрерывныхъ періодическихъ дробей: 1) *простую періодическую дробь*

$$x = | \overbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p}; \overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_p}; \overbrace{a_1, \ldots \ldots a_p}; \ldots |$$

въ которой p первыхъ неполныхъ частныхъ повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ; 2) *смѣшанную періодическую дробь*

$$x = | a_1, a_2, \ldots, a_h; \overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_p}; \overbrace{a_1, a_2, \ldots a_p}; \ldots |$$

въ которой періодической части предшествуетъ часть неперіодическая.

864. Теорема Лагранжа. *Всякій дѣйствительный ирраціональный корень квадратнаго уравненія съ соизмѣримыми коэффиціентами разлагается въ непрерывную періодическую дробь.*

1-й случай. *Корни имѣютъ противоположные знаки.*

Пусть уравненіе, имѣющее такіе корни, освобождено отъ дробей и приведено къ виду

$$Ax^2 + 2Bx - C = 0 \;.\;.\;. (1).$$

A, B и C суть цѣлыя числа, а A и C — положительны. Если бы коэффиціентъ B не былъ четнымъ числомъ, то, перемѣнивъ x на $2X$, могли бы разсматривать ур. въ X. $B^2 + AC$ не есть точный квадратъ, ибо въ противномъ случаѣ ур. имѣло бы корни соизмѣримые, которые разлагались бы въ конечную непрерывную дробь.

Разложеніе положительнаго корня.—Полагая, что вышеуказанныя условія относительно коэффиціентовъ имѣютъ мѣсто въ ур—ніи (1), разложимъ въ непрерывную дробь его положительный корень

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A} \;.\;.\;. (2)$$

x содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами α_1 и $\alpha_1 + 1$, такъ что

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1} \;.\;.\;. (3)$$

гдѣ $x_1 > 1$. Уравненіе (1) беретъ видъ

$$A\left(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + 2B\left(\alpha_1 + \frac{1}{x_1}\right) - C = 0$$

или

$$A_1 x_1^2 - 2B_1 x_1 - C_1 = 0 \;.\;. \quad (4)$$

причемъ

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2 \\ B_1 &= -A\alpha_1 - B \\ C_1 &= A \end{aligned}\right\} (5).$$

Ур—ніе (4) даетъ мѣсто слѣдующимъ замѣчаніямъ:

(6) $\left\{\begin{array}{l} \text{Коэффиценты } A_1,\ B_1,\ C_1 \text{ — числа цѣлыя;} \\ \text{Числа } A_1 \text{ и } C_1 \text{ положительны.} \\ B_1^2 + A_1C_1 = B^2 + AC\ .\ .\ .\ (7). \end{array}\right.$

Формулы (5) непосредственно показываютъ, что A_1, B_1, C_1 суть числа цѣлыя и что C_1 — положительно. Остается показать, что A_1 положительно и что равенство (7) вѣрно.

Во-первыхъ, $A_1 > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, положительный корень ур—нія (1), заключаясь между α_1 и $\alpha_1 + 1$, заключается также между α_1 и $+\infty$. Отсюда очевидно, что триномъ (1) отрицателенъ при $x = \alpha_1$; и потому

$$A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1 - C < 0$$

или $A_1 > 0$.

Во-вторыхъ, формулы (5) даютъ

$$B_1^2 + A_1C_1 = (B + A\alpha_1)^2 + A(C - 2B\alpha_1 - A\alpha_1^2),$$

или, по приведеніи: $B_1^2 + A_1C_1 = B^2 + AC$; и слѣд., корни ур—нія (4) также ирраціональны.

Изъ этихъ замѣчаній и вытекаетъ теорема Лагранжа.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ ур—нія въ x_1 можно вывести ур—ніе въ x_2 точно такъ, какъ изъ ур—нія (1) выведено (4). Продолжая такимъ образомъ, составимъ нижеслѣдующій рядъ уравненій

$$(8) \left\{\begin{array}{l} Ax^2 + 2Bx - C = 0 \\ A_1x_1^2 + 2B_1x_1 - C_1 = 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ A_nx_n^2 + 2B_nx_n - C_n = 0 \end{array}\right.$$

причемъ

$$x = \alpha_1 + \frac{1}{x_1};\ x_1 = \alpha_2 + \frac{1}{x_2};\ .\ .\ .\ ;\ x_{n-1} = \alpha_n + \frac{1}{x_n};$$

и

$$C_n = A_{n-1};$$

$$(B_n)^2 + A_nC_n = B^2 + AC.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ имѣемъ соотношеніе

$$(B_n)^2 + A_nA_{n-1} = h\ .\ .\ .\ (9)$$

означая буквою h цѣлое положительное число $B^2 + AC$. Такъ какъ A_n, A_{n-1} и B_n суть цѣлыя положительныя числа и сумма $(B'')^2 + A_nA_{n-1}$ равна опредѣленному цѣлому h, то A_n, A_{n-1} и B_n, удовлетворяющія неопредѣленному ур—нію (9), могутъ быть взяты только въ *конечномъ числѣ* значеній: въ самомъ дѣлѣ, изъ этого ур—нія непосредственно ясно, что должно быть: $B_n < h$, $A_n < h$, $A_{n-1} < h$. Число комбинацій изъ этихъ чиселъ, взятыхъ въ порядкѣ A_n, B_n, A_{n-1}, необходимо, *конечно*. А потому, составляя таблицу (5), непремѣнно найдемъ въ ней ур—ніе $A_i x_i^2 + 2B_i x_i + C_i = 0$, тождественное съ уравненіемъ $A_k x_k^2 + 2B_k x_k + C_k = 0$, ранѣе полученнымъ.

Отсюда неизбѣжно слѣдуетъ, что вычисленія приведутъ къ повторенію, въ найденномъ разъ порядкѣ, однихъ и тѣхъ же неполныхъ частныхъ, и для x получится непрерывная періодическая дробь.

Разложеніе отрицательнаго корня. — Измѣнивъ въ предложенномъ ур—ніи x на $-x$, получимъ ур—ніе

$$Ax^2 - 2Bx - C = 0.$$

Разложивъ въ непрерывную дробь, указаннымъ пріемомъ, положительный корень этого ур—нія и перемѣнивъ знакъ въ полученномъ результатѣ, найдемъ разложеніе отрицательнаго корня.

2-й случай. — *Оба корня положительны.* — Пусть будетъ α — большій корень, и пусть онъ содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a+1$. Пусть, затѣмъ, другой корень, β, не содержится въ этомъ интервалѣ. Положивъ $x = a + X$, найдемъ ур—ніе въ X, имѣющее два дѣйствительныхъ корня X′ и X″; корни же α и β вычислимъ по формуламъ

$$\alpha = a + X', \quad \beta = a + X'',$$

гдѣ, слѣд., X′ есть положит. количество, меньшее 1; напротивъ, X″ — отрицательно. Такимъ образомъ, X′ и X″ можно разложить въ непрерывныя дроби вышеуказаннымъ пріемомъ.

Въ томъ случаѣ, когда оба корня α и β содержатся между двумя послѣдовательными цѣлыми числами a и $a+1$, числа X′ и X″ — оба положительны и < 1. Въ этомъ случаѣ дѣлаемъ подстановку

$$x = a + \frac{1}{y}.$$

Ур—ніе въ y имѣетъ оба корня положительные и большіе 1. Если большій корень этого уравненія содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами b и $b+1$; а другой корень $< b$, то имѣемъ разсмотрѣнный уже случай. Въ противномъ случаѣ полагаемъ

$$y = b + \frac{1}{z}$$

и т. д. Непремѣнно дойдемъ до такого ур—нія, котораго большій корень содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми числами, а другой не заключается въ этихъ предѣлахъ. Это объясняется тѣмъ, что разность между корнями α и β есть количество конечное, между тѣмъ какъ разность двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей стремится къ нулю, когда число неполныхъ частныхъ неограниченно возрастаетъ. Слѣд. невозможно, чтобы оба корня α и β, разлагаемые въ непрерывныя дроби по формуламъ

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{z}, \ldots$$

имѣли, неопредѣленно, одни и тѣ же неполныя частныя.

3-й случай. — *Оба корня отрицательны.* — Этотъ случай непосредственно сводится къ предыдущему замѣною x на $(-x)$.

865. Примѣръ 1. — *Развернуть въ непрерывныя дроби корни уравненія* $3x^2 - 2x - 2 = 0$.

Корни этого уравненія противоположны по знаку. Положительный корень

$$x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

$2 < \sqrt{7} < 3$; $3 < 1 + \sqrt{7} < 4$, слѣд. $1 < x < \frac{4}{3}$, и потому $a_1 = 1$, и

$$x = \frac{1+\sqrt{7}}{3} = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}, \quad x_1 = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = 2 + \sqrt{7}.$$

Находимъ, что x_1 содержится между 4 и 5; слѣд.

$$a_2 = 4; \quad \text{и} \quad x_1 = 2 + \sqrt{7} = 4 + \frac{1}{x_2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x_2} = \sqrt{7} - 2, \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{2+\sqrt{7}}{3}.$$

Продолжая такимъ образомъ, найдемъ

$$a_3 = 1, \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{7}}{2};$$

$$a_4 = 1, \quad x_4 = \frac{1+\sqrt{7}}{3} = x$$

Слѣд., начиная съ четвертаго, неполныя частныя будутъ періодически повторяться; періодъ будетъ 1, 4, 1, 1; и

$$x = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}}$$

Отрицательный корень, $\frac{1-\sqrt{7}}{8} =$

$$-\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

онъ выражается смѣшанною періодическою дробью, и въ непеpіодической части ея — только одно неполное частное, равное 0; періодъ же $= 1, 1, 4, 1$, т.-е. равенъ обращенному періоду положительнаго корня.

Примѣръ II. — *Развернуть въ непрерывную дробь корни уравненія* $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

Оба корня положительны и суть

$$x' = \frac{3+\sqrt{7}}{2}, \quad x'' = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

x' содержится между 2 и 3; слѣд. $a_1 = 2$, и

$$x' = \frac{3+\sqrt{7}}{2} = 2 + \frac{1}{x_1}; \quad \text{откуда} \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{3},$$

что приводитъ къ предыдущему примѣру; слѣд.

$$x' = |\, 2;\ \overbrace{1,\ 4,\ 1,\ 1},\ \overbrace{1,\ 4,\ 1,\ 1},\ .\ .\ .\ |$$

Такъ какъ $x'' < 1$, то $a_1 = 0$; затѣмъ

$$\frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{y}; \quad y = 3 + \sqrt{7}; \quad \text{затѣмъ}$$

$$a_1 = 5, \quad y_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$$

$$a_2 = 1, \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

$$a_3 = 1, \quad y_3 = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

что снова приводитъ къ предыдущему примѣру; слѣд.

$$x'' = |\, 0;\ 5,\ 1,\ 1,\ \overbrace{1,\ 4,\ 1,\ 1},\ \overbrace{1,\ 4,\ 1,\ 1},\ .\ .\ .\ |$$

Это еще можно написать такъ:

$$x'' = |\, 0;\ 5,\ 1,\ \overline{1,\ 1},\ \overline{4,\ 1},\ \overline{1,\ 1},\ \overline{4,\ 1},\ .\ .\ .\ |.$$

866. Теорема (обратная Лагранжевой). — *Всякая непрерывная періодическая дробь представляетъ корень квадратнаго уравненія съ соизмѣримыми коэффиціентами.*

Разсмотримъ два случая.

1. *Случай чистой періодической непрерывной дроби.* — Пусть дана чистая періодическая дробь

$$y = |\, \overbrace{a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ a_n};\ \overbrace{a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ a_n};\ .\ .\ .\ |.$$

Назовемъ y_p и y_{p+1} конечныя непрерывныя дроби, полученныя, если взять p и $p+1$ періодовъ; имѣемъ

$$y_{p+1} = |\, a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ a_n,\ y_p\, |.$$

Если p приближать къ ∞, то y_p и y_{p+1} стремятся къ y; слѣд.

$$y = | a_1, a_2 \ldots a_n, y |$$

и потому

$$y = \frac{yP_n + P_{n-1}}{yQ_n + Q_{n-1}},$$

гдѣ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ суть два приближенія $n - 1$-го и n-го порядка къ конечной непрерывной дроби, образуемой періодомъ. Изъ послѣдняго ур. имѣемъ

$$Q_n y^2 + (Q_{n-1} - P_n) y - P_{n-1} = 0 \; . \; . \; . \; (1).$$

Отсюда видимъ, что чистая періодическая дробь y есть положительный корень квадратнаго ур—нія, коэффиценты котораго суть числа цѣлыя, а знаки корней противоположны.

II. *Данная дробь смѣшанная.* — Пусть дана смѣшанная періодическая дробь

$$x = | a_1, a_2 \ldots a_q; \; \overbrace{a_1, a_2 \ldots a_n;} \ldots |.$$

Если положить

$$| \overbrace{a_1, a_2 \ldots a_n,} \; \overbrace{a_1, a_2 \ldots a_n,} \ldots | = y,$$

то

$$x = | a_1, a_2 \ldots a_q, y |,$$

откуда

$$x = \frac{yA_q + A_{q-1}}{yB_q + B_{q-1}} \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ $\frac{A_{q-1}}{B_{q-1}}$ и $\frac{A_q}{B_q}$ суть приближенія порядковъ $q - 1$ и q къ конечной непрерывной дроби $| a_1, a_2 \ldots a_q |$, образуемой непериодическою частью.

Съ другой стороны, y есть корень ур—нія (1). Если исключить y изъ (1) и (2), то получится квадратное ур. въ (x) съ соизмѣримыми коэффицентами.

867. *Примѣчаніе.* — Естественно изслѣдовать, что представляетъ отрицательный корень ур—нія (1), положительный корень котораго равенъ чистой періодической дроби

$$| a_1, a_2 \ldots a_n; \; a_1, a_2 \ldots a_n; \ldots |.$$

Для этого докажемъ *лемму:*

Если $| a_1, a_2 \ldots a_n |$ *есть конечная непрерывная дробь, въ которую развертывается число* $\frac{P}{Q}$ *большее* 1; *то* $\frac{P_n}{P_{n-1}}$ *равно непрерывной дроби* $| a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1 |$, *которая получится, если неполныя частныя данной написать въ обратномъ порядкѣ; а* $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ *есть предпослѣдняя подходящая дробь къ непрерывной* $\frac{P_n}{P_{n-1}}$.

Нужно доказать равенства:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}}=a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\dots+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}},\quad \frac{Q_n}{Q_{n-1}}=a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\dots+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2}}}.$$

Имѣемъ

$$\begin{array}{ll} P_n=a_n\;P_{n-1}+P_{n-2} & Q_n=a_n\;Q_{n-1}+Q_{n-2} \\ P_{n-1}=a_{n-1}P_{n-2}+P_{n-3} & Q_{n-1}=a_{n-1}Q_{n-2}+Q_{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ P_3=a_3\;P_2+a_1 & Q_3=Q_2a_3+1 \\ P_2=a_2\;a_1+1 & Q_2=a_2 \end{array}$$

Отсюда легко вывести требуемыя равенства.

Если бы было $\frac{P}{Q}<1$, тогда было бы $a_1=0$, и первое равенство, содержащее дробь $\frac{1}{a_1}$, не имѣло бы мѣста. Въ этомъ случаѣ $\frac{P}{Q}$ замѣняютъ обратною дробью, которая >1.

Пользуясь этою леммою, можно показать, *что абсолютное значеніе отрицательнаго корня уравненія*

$$Q_n y^2+(Q_{n-1}-P_n)y-P_{n-1}=0\;.\;\;.\;\;.\;(1)$$

равно обратному значенію чистой періодической дроби, которая получится, если написать въ обратномъ порядкѣ звенья періода данной періодической дроби.

Сгруппировавъ вмѣстѣ члены съ одинаковымъ указателемъ, можно ур. (1) написать въ видѣ

$$(Q_n y-P_n)y=P_{n-1}-yQ_{n-1},$$

отсюда

$$y=\frac{P_{n-1}-yQ_{n-1}}{Q_n y-P_n},$$

и это ур—ніе удовлетворяется, если y замѣнить отрицательнымъ корнемъ y' ур—нія (1).

Положивъ $y'=-\frac{1}{z}$, даемъ этому равенству видъ

$$z=\frac{P_n z+Q_n}{P_{n-1}z+Q_{n-1}}.$$

Такъ какъ теперь положительный корень ур—нія (1) представленъ простою періодическою дробью, то первое неполное частное a_1 уже не равно нулю, ибо во всякой непрерывной дроби всѣ неполныя частныя, слѣдующія за первымъ, отличны отъ нуля.

При этихъ условіяхъ можно примѣнить нашу лемму, и это даетъ

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = | a_n a_{n-1} \; . \; . \; . \; a_2 a_1 | ,$$

а $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ будетъ предпослѣднею подходящею дробью къ этой непрерывной дроби; слѣдовательно

$$z = | \overbrace{a_n, a_{n-1} \; . \; . \; . \; a_1,} \; \overbrace{a_n, a_{n-1} \; . \; . \; . \; a_1,} \; . \; . \; . \; . \; ,$$

и теорема доказана.

Примѣръ. Пусть дана чистая дробь

$$x = | a; a, a, \; . \; . \; . \; | .$$

Непосредственно имѣемъ

$$x = a + \frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad x^2 - ax - 1 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

число несоизмѣримое, ибо x — дробь безконечная.

Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что *квадратъ цѣлаго числа, увеличенный 1-мя, не можетъ быть точнымъ квадратомъ.*

Отрицательный корень

$$x' = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

равенъ непрерывной дроби

$$-\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a} \; . \; . \; .}$$

Приложенія.

868. Превращеніе обыкновенныхъ и десятичныхъ дробей въ непрерывныя.

Когда числитель и знаменатель обыкновенной дроби выражены въ большихъ числахъ, удобнѣе, для болѣе яснаго сужденія о ея величинѣ, обративъ ее въ непрерывную, составить приближенія. Пріемъ для обращенія простой дроби въ непрерывную, указанъ въ § 849.

Примѣръ. *Обратить дробь* $\frac{76895}{19527}$ *въ непрерывную.*

Дѣлимъ числ. на знам., знаменателя на 1-й остатокъ, 1-й остатокъ на 2-й и т. д.; дѣйствія эти располагаемъ такъ

	3	1	15	10	5	5	1	3
76895	19527	18314	1213	119	23	4	3	1
18314	1213	119	23	4	3	3	0	

Неполныя частныя помѣщены въ верхней графѣ. Имѣемъ

$$\frac{76895}{19527} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}}}$$

Подходящія дроби суть:

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{63}{16},\ \frac{634}{161},\ \frac{3233}{8\,2},\ \frac{16799}{4266},\ \frac{20032}{5087},\ \frac{76895}{19527}.$$

Взявъ, напр., за истинную величину данной дроби приближеніе $\frac{63}{16}$, нашли бы, что погрѣшность меньше $\frac{1}{16 \cdot 161}$ или $\frac{1}{2576}$; и т. д.

Приводимъ примѣръ на превращеніе десятичныхъ дробей въ непрерывныя.

Примѣръ.—*Найти приближенія числа* π.

Оно содержится между двумя дробями

$$A = \frac{3141592653}{10^9} \quad и \quad B = \frac{3141592654}{10^9}.$$

Развертывая ихъ въ непрерывныя дроби, находимъ, что общія обоимъ разложеніямъ неполныя частныя суть: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1; такъ что

$$\pi = \{ 3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1 \ldots \}.$$

Отсюда имѣемъ слѣдующія подходящія дроби къ π:

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102}.$$

Таковы простѣйшія значенія π; изъ нихъ второе приписываютъ *Архимеду*, третье—*Ривarду*, четвертое—*Адріану Мецію*.

869. Обращеніе несоизмѣримаго квадратнаго корня въ непрерывную дробь.

Очевидно, что несоизмѣримый квадратный корень нельзя превратить въ конечную непрерывную дробь; ибо каждая такая дробь приводится въ обыкновенную дробь, члены которой соизмѣримы. Слѣдовательно, несоизмѣримый квадратный корень превратимъ только въ безконечную непрерывную дробь. Докажемъ, что такая дробь необходимо будетъ *періодическою* непрерывною дробью.

Пусть N будетъ положительное цѣлое число, которое не есть точный квадратъ; и пусть a_1 будетъ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\sqrt{N}$. Очевидно

$$\sqrt{N} = a_1 + (\sqrt{N} - a_1) = a_1 + \frac{N - a_1^2}{\sqrt{N} + a_1} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N} + a_1}{r_1}} \quad \ldots (1)$$

гдѣ $r_1 = N - a_1^2$

Такъ какъ $\sqrt{N} - a_1$ есть положительное число меньшее 1, то изъ (1) слѣдуетъ, что $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1} > 1$.

Пусть наибольшее цѣлое, содержащееся въ $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$, будетъ b_1; то

$$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1} = b_1 + \frac{\sqrt{N}-(b_1r_1-a_1)}{r_1} = b_1 + \frac{N-(b_1r_1-a_1)^2}{r_1[\sqrt{N}+(b_1r_1-a_1)]}$$

$$= b_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}},$$

гдѣ $a_2 = b_1r_1 - a_1$ и $r_2 = \frac{N-a_2^2}{r_1}$.

Здѣсь снова $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2} > 1$; и если b_2 будетъ наибольшее цѣлое, содержащееся въ $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$, то

$$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2} = b_2 + \frac{\sqrt{N}-(b_2r_2-a_2)}{r_2} = b_2 + \frac{N-(b_2r_2-a_2)^2}{r_2[\sqrt{N}+(b_2r_2-a_2)]}$$

$$= b_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}},$$

гдѣ $a_3 = b_2r_2 - a_2$ и $r_3 = \frac{N-a_3^2}{r_2}$.

Можно вести вычисленіе такимъ способомъ какъ угодно далеко; такъ что вообще

$$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}} = b_{n-1} + \frac{\sqrt{N}-a_n}{r_{n-1}} = b_{n-1} + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}},$$

гдѣ $a_n = b_{n-1}r_{n-1} - a_{n-1}$ и $r_n = \frac{N-a_n^2}{r_{n-1}}$. Слѣдовательно

$$\sqrt{N} = a_1 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3} + \dots}}$$

Выше было показано, что эта непрерывная дробь безконечна. Докажемъ теперь, что это будетъ *періодическая* непрерывная дробь.

Для этого, во-первыхъ, докажемъ, что всѣ количества $a_1, a_2, a_3, \dots$; $r_1, r_2, r_3, \dots$ суть цѣлыя положительныя числа.

Будемъ называть $\sqrt{N}$, $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$, $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$, ... *полными частными*.

Пусть будутъ $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$ три послѣдовательныя приближенія къ $\sqrt{N}$, изъ коихъ $\frac{P''}{Q''}$ пусть будетъ приближеніе, соотвѣтствующее неполному частному b_n.

Полное частное на этой стадіи процесса обращенія будетъ $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$.

Извѣстно, что $\frac{P''}{Q''} = \frac{b_n P' + P}{b_n Q' + Q}$ и если сюда вмѣсто b_n подставить

$$b_n + \frac{1}{b_{n+1} + \ldots}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n},$$

то найдемъ $\sqrt{N}$. Итакъ

$$\sqrt{N} = \frac{\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n} \cdot P' + P}{\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n} \cdot Q' + Q} = \frac{P'\sqrt{N} + a_n P' + r_n P}{Q'\sqrt{N} + a_n Q' + r_n Q}.$$

Освобождая отъ знаменателя и приравнивая раціональную часть раціональной, а ирраціональную ирраціональной, находимъ

$$a_n P' + r_n P = NQ', \quad a_n Q' + r_n Q = P',$$

откуда

$$a_n (PQ' - P'Q) = PP' - QQ'N, \quad r_n (PQ' - P'Q) = NQ'^2 - P'^2.$$

Такъ какъ $PQ' - P'Q = \pm 1$, то отсюда, во-первыхъ, очевидно, что a_n и r_n суть числа цѣлыя: а какъ, по § 861, $PQ' - P'Q$, $PP' - QQ'N$ и $NQ'^2 - P'^2$ имѣютъ одинаковый знакъ, то ясно, что a_n и r_n положительны.

Теперь легко показать, что неполныя и полныя частныя повторяются. Мы видѣли, что $r_n r_{n-1} = N - a_n^2$, а какъ r_n и r_{n-1} положительны, то заключаемъ, что $a_n^2 < N$, откуда $a_n < \sqrt{N}$, и потому a_n не можетъ быть больше a_1. Отсюда слѣдуетъ, что a_n не можетъ имѣть иныхъ значеній, кромѣ 1, 2, 3, . . . , a_1. Итакъ, *число различныхъ значеній a_n не можетъ превосходить a_1.*

Затѣмъ, $a_{n+1} = r_n b_n - a_n$, т.-е. $r_n b_n = a_n + a_{n+1}$, и слѣд. $r_n b_n$ не можетъ быть больше $2a_1$: а какъ b_n есть положительное цѣлое, то r_n не можетъ быть больше $2a_1$. Итакъ, r_n не можетъ имѣть иныхъ значеній, кромѣ 1, 2, 3, . . . , $2a_1$, т.-е. *число различныхъ значеній r_n не можетъ быть больше $2a_1$.*

Такимъ образомъ, полное частное $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$ не можетъ имѣть болѣе $2a_1 \cdot a_1$ различныхъ значеній, т.-е. *нѣкоторое полное частное, а потому и всѣ послѣдующія, должны повториться.*

Такъ какъ b_n есть наибольшее цѣлое, заключающееся въ $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$, то *неполныя частныя также должны повторяться, и число ихъ въ каждомъ циклѣ не можетъ быть больше $2a_1^2$.*

Заключаемъ, что всякій несоизмѣримый квадратный корень развертывается въ *періодическую* непрерывную дробь.

870. Примѣръ I. — *Развернуть $\sqrt{13}$ въ непрерывную дробь.*

Вычисляя $\sqrt{13}$ съ точностью до 1, находимъ, что онъ содержится между 3 и 4, такъ что

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}, \text{ гдѣ } y > 1.$$

Для нахожденія y пользуемся этимъ ур—мъ; изъ него

$$y = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}.$$

Но $3 < \sqrt{13} < 4$; отсюда $6 < \sqrt{13}+3 < 7$, слѣд. $\frac{\sqrt{13}+3}{4}$ содержится между $\frac{6}{4}$ и $\frac{7}{4}$, т.-е. больше 1, но < 2, такъ что

$$y = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + \frac{1}{y_1}, \text{ гдѣ } y_1 > 1.$$

Отсюда

$$y_1 = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{4(\sqrt{13}+1)}{12} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}.$$

Замѣчая, что $3 < \sqrt{13} < 4$, имѣемъ отсюда $4 < \sqrt{13}+1 < 5$, слѣд., $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$ содержится между $\frac{4}{3}$ и $\frac{5}{3}$, т.-е. > 1, но < 2; потому

$$y_1 = \frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + \frac{1}{y_2}.$$

Продолжая такимъ образомъ, имѣемъ

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y} = \sqrt{13} - 3$$

$$y = 1 + \frac{1}{y_1}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_1} = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{y_2}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_2} = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$$

$$y_2 = 1 + \frac{1}{y_3}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_3} = \frac{\sqrt{13}-1}{3}$$

$$y_3 = 1 + \frac{1}{y_4}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_4} = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

$$y_4 = 6 + \frac{1}{y_5}, \text{ гдѣ } \frac{1}{y_5} = \sqrt{13} - 3.$$

Отсюда заключаемъ, что $y_5 = y$, такъ что начиная съ этого мѣста будутъ повторяться прежнія неполныя частныя, и потому

$$x = \sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{ и т. д.}}}}}}}$$

Для повѣрки результата, обратимъ найденную періодическую дробь въ ирраціональность, изъ которой она возникла. Перенеся 3 въ первую часть, имѣемъ

$$x-3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}}$$

Это есть періодическая дробь съ пятичленнымъ періодомъ; къ знаменателю 6 пятаго члена прикладывается снова вся періодическая дробь $x-3$; такъ что

$$x-3=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+x-3}}}}}.$$

Обращаемъ вторую часть этого ур—нія въ обыкновенную дробь.

$$1+\frac{1}{3+x}=\frac{4+x}{3+x};\quad 1+\cfrac{1}{\cfrac{4+x}{3+x}}=\frac{7+2x}{4+x};\quad 1+\cfrac{1}{\cfrac{7+2x}{4+x}}=\frac{11+3x}{7+2x};$$

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{11+3x}{7+2x}}=\frac{18+5x}{11+3x};\ \text{наконецъ}\ x-3=\frac{11+3x}{18+5x}.$$

Это ур—ніе приводится къ квадратному $x^2=13$, откуда положит. корень $x=\sqrt{13}$.

Примѣръ II. *Разложить $\sqrt{a^2+1}$ въ непрерывную дробь, полагая, что **a** — цѣлое положительное число.*

Пусть $x=\sqrt{a^2+1}$. Такъ какъ x содержится между a и $a+1$, то можемъ положить $x=a+\frac{1}{x_1}$, а слѣд. $\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x_1}$, откуда $x_1=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$ $=a+\sqrt{a^2+1}$.

Замѣчаемъ, что x_1 содержится между $2a$ и $2a-1$, такъ что $x_1=2a+\frac{1}{x_2}$, или $a+\sqrt{a^2+1}=2a+\frac{1}{x_2}$, откуда $x_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$. Отсюда видно, что $x_2=x_1$ и потому

$$\sqrt{a^2+1}=|\,a;\ 2a,\ 2a,\ 2a,\ \ldots\,|.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно $a = 1; 2; 3; \ldots$ найдемъ

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= |\,1;\ 2,\ 2,\ \ldots\,|\\ \sqrt{5} &= |\,2;\ 4,\ 4,\ \ldots\,|\\ \sqrt{10} &= |\,3;\ 6,\ 6,\ \ldots\,|\end{aligned}$$

Примѣръ III. — *Развернуть въ непрерывную дробь* $\sqrt{a^2+2a}$, *гдѣ* a — *цѣлое положительное число.*

Пусть $x = \sqrt{a^2+2a}$; x содержится между a и $a+1$; слѣд. $x = a + \frac{1}{x_1}$, откуда $x_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+2a}}{2a}$; затѣмъ, $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$, откуда $x_2 = a + \sqrt{a^2+2a}$. Число x_2 содержится между $2a$ и $2a+1$: положивъ $x_2 = 2a + \frac{1}{x_3}$, найдемъ $x_3 = x_1$; такимъ образомъ

$$x = |\,a;\ \overbrace{1,\ 2a},\ \overbrace{1,\ 2a},\ \ldots\,|.$$

Напр., положивъ $a=1$, найдемъ

$$\sqrt{3} = |\,1;\ \overline{1,\ 2},\ \overline{1,\ 2},\ \ldots\,|.$$

Примѣръ IV. — *Развернуть корни ур—нія* $x^2 - 5x - 3 = 0$ *въ непрерывныя дроби.*

Имѣемъ $x = \frac{5 \mp \sqrt{37}}{2}$; взявъ большій корень, находимъ $x' = \frac{5+\sqrt{37}}{2} = 5 + \frac{\sqrt{37}-5}{2} = 5 + \frac{6}{\sqrt{37}-5}$ и т. д. Получаемъ неполныя частныя 5, 1, 1, 5, 1, 1 . . . и $x' = \frac{5}{1}; \frac{6}{1}; \frac{11}{2}; \frac{61}{11}; \frac{72}{13}$ и т. д.

Затѣмъ: $-x'' = \frac{1}{2}(\sqrt{37}-5) = 0 + \frac{6}{\sqrt{37}-5} = 0; \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{6}{11}; \frac{7}{13}$ и т. д.

871. Вычисленіе логариѳмовъ.

Примѣръ. — *Найти* $\lg_{10} 200$?

Вопросъ приводится къ рѣшенію ур—нія $10^x = 200$.

Полагая x послѣдовательно $= 1, 2, 3,$ находимъ для 10^x величины 10, 100, 1000, . . . Такъ какъ 200 содержится между двумя послѣдними числами, то x заключается между 2 и 3; слѣд. можно положить

$$x = 2 + \frac{1}{x_1} \ldots (1)$$

причемъ $x_1 > 1$. Подставляя это выраженіе вмѣсто x въ начальное ур—ніе находимъ $10^{2+\frac{1}{x_1}} = 200$, или $10^2 10^{\frac{1}{x_1}} = 200$, или $10^{\frac{1}{x_1}} = 2$; а отсюда, по возвышеніи въ степень x_1:

$$2^{x_1} = 10 \ldots (2).$$

Полагая $x_1 = 2, 3, 4, \ldots$ находимъ для 2^{x_1} величины 4, 8, 16 . . . Такъ какъ 10 содержится между 8 и 16, то x_1 находится между 3 и 4, такъ что

$$x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}, \ldots (3)$$

гдѣ $x_2 > 1$. Подставляя это значеніе x_1 въ ур—ніе (2):

$$2^{3+\frac{1}{x_2}} = 10, \text{ или } 2^3 \,.\, 2^{\frac{1}{x_2}} = 10 \text{ или } 2^{\frac{1}{x_2}} = \frac{10}{8};$$

отсюда, по возвышеніи въ степень x_2:

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{x_2} = 2 \ldots (4)$$

Полагая x_2 послѣдовательно равнымъ 2, 3, 4 . . . находимъ для $\left(\frac{10}{8}\right)^{x_2}$ числа $\frac{100}{64}, \frac{1000}{512}, \frac{10000}{4096} \ldots$

Число 2 содержится между послѣдними двумя дробями; слѣд. x_2 заключается между 3 и 4, а потому

$$x_2 = 3 + \frac{1}{x_3} \ldots (5)$$

гдѣ $x_3 > 1$. По подстановкѣ въ (4), получимъ

$$\left(\frac{10}{8}\right)^{3+\frac{1}{x_3}} = 2, \text{ или } \left(\frac{10}{8}\right)^{\frac{1}{x_3}} = \frac{1024}{1000}$$

откуда

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{x_3} = \frac{10}{8} \ldots (6)$$

Подставляя вмѣсто x_3 числа 2, 3, . . . , найдемъ, что $9 < x_3 < 10$, такъ что можно положить

$$x_3 = 9 + \frac{1}{x_4}, \text{ гдѣ } x_4 > 1.$$

Сближая результаты (1), (3) . . . . имѣемъ

$$x = |\, 2;\ 3,\ 3,\ 9 \ldots |.$$

Первыя четыре приближенія къ x будутъ: $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{23}{10}, \frac{214}{93}$, изъ которыхъ послѣднее точно до $\frac{1}{9579}$.

Впрочемъ этотъ методъ вычисленія логариѳмовъ непрактиченъ, такъ какъ требуетъ кропотливыхъ вычисленій; потому-то для вычисленія логариѳмовъ и употребляютъ болѣе совершенный методъ безконечныхъ рядовъ.

872. Рѣшеніе неопредѣленнаго ур—нія $ax + by = c$ въ цѣлыхъ числахъ.

Примѣръ. *Рѣшить ур—ніе* $8x + 13y = 159$.

Развернувъ отношеніе коэффиціентовъ $\frac{8}{13}$ въ непрерывную дробь, находимъ

$$\frac{8}{13} = 0;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2$$

откуда подходящія дроби:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{8}{13}.$$

Взявъ разность двухъ послѣднихъ и замѣтивъ, что $\frac{8}{13}$ есть приближеніе четнаго порядка, по § 855 имѣемъ

$$\frac{8}{13} - \frac{3}{5} = \frac{1}{13 \cdot 5}, \text{ откуда } 8 \cdot 5 + 13 \cdot (-3) = 1.$$

Умноживъ обѣ части на 159, находимъ

$$8 \cdot (5 \cdot 159) + 13 \cdot (-3 \times 159) = 159.$$

Сравнивая это тождество съ даннымъ ур—мъ, замѣчаемъ, что послѣднее сдѣлается тождествомъ, если положить

$$x = 5 \times 159 = 795;\ y = -3 \times 159 = -477.$$

Таковы одна пара цѣлыхъ рѣшеній; всѣ прочія цѣлыя рѣшенія содержатся въ формулахъ

$$x = 795 + 13t \text{ и } y = -477 - 8t.$$

Неудобство этого метода заключается въ томъ, что обыкновенно формулы для x и y получаются недостаточно простыя.

Обобщимъ этотъ пріемъ. Если подъ a и b разумѣть абсолютныя значенія коэффиціентовъ, то, измѣнивъ, если это окажется нужнымъ, знаки неизвѣстныхъ x и y, можно всегда дать ур—нію видъ $ax - by = c$.

Если $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ будетъ предпослѣдняя подходящая дробь къ непрерывной, въ которую развертывается $\frac{a}{b}$, то

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^n.$$

откуда, умноживъ обѣ части на $c \cdot (-1)^n$, найдемъ

$$a(-1)^n cQ_{n-1} - b(-1)^n cP_{n-1} = c.$$

Сравненіе съ даннымъ ур—мъ покажетъ, что данное ур—ніе обратится въ тождество, если положить

$$\alpha = (-1)^n cQ_{n-1},\quad \beta = (-1)^n cP_{n-1},$$

таковы одна пара цѣлыхъ рѣшеній даннаго ур—нія

873. Историческое примѣчаніе. Изобрѣтеніе непрерывныхъ дробей приписываютъ лорду *Брункеру* (1655); онъ пришелъ къ этому открытію, пытаясь преобразовать безконечныя выраженія, данныя Валлисомъ для площади круга. Затѣмъ *Гюйгенсъ* указалъ примѣненіе непрерывныхъ дробей къ приближенной замѣнѣ сложныхъ отношеній простѣйшими. Настоящая теорія непрерывныхъ дробей дана была *Эйлеромъ* и усовершенствована *Лагранжемъ*, *Гауссомъ* и другими.

ГЛАВА LIV.

Неопредѣленный анализъ второй степени

874. Начнемъ съ разсмотрѣнія простѣйшихъ случаевъ рѣшенія въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$$

гдѣ a, b, c, . . . суть числа цѣлыя.

I. $c = 0$. Въ ур—ніи недостаетъ члена съ квадратомъ одного изъ неизвѣстныхъ; пусть, напр., $c = 0$. Выражая x черезъ y, найдемъ

$$x = -\frac{ay^2 + ey + f}{by + d}$$

или, совершая дѣленіе:

$$x = -\frac{a}{b}y + \frac{ad}{b^2} - \frac{e}{b} - \frac{\frac{ad^2}{b^2} - \frac{de}{b} + f}{by + d},$$

а умноживъ обѣ части на b^2, получимъ

$$b^2x = -aby + ad - be - \frac{ad^2 - bde + b^2f}{by + d}.$$

Чтобы для b^2x имѣть число цѣлое, биномъ $by + d$ долженъ дѣлить нацѣло $ad^2 - bde + b^2f$. Находимъ всѣхъ множителей числа $ad^2 - bde + b^2f$ и приравниваемъ $by + d$, поочередно, каждому изъ нихъ. Если получится такимъ образомъ для y число цѣлое и если соотвѣтствующее значеніе x будетъ также числомъ цѣлымъ, то цѣль будетъ достигнута. Такъ какъ число множителей — ограниченное, то число цѣлыхъ рѣшеній необходимо будетъ ограниченное.

Въ частномъ случаѣ, если числитель $ad^2 - bde + b^2f$ обращается въ нуль, ур—ніе приметъ видъ

$$(b^2x + aby - ad + be)(by + d) = 0.$$

Приравнивая нулю того или другого множителя, найдемъ либо опредѣленное значеніе для y при произвольномъ x, когда d дѣлится на b, либо безграничное число цѣлыхъ значеній для y и x, когда можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ неопредѣленное ур—ніе $b^2x + aby - ad + be = 0$.

Оба эти рода рѣшеній могутъ случиться и одновременно, какъ, наприм. въ ур—ніи

$$2y^2 + 3xy - 9y - 6x + 10 = 0,$$

котораго коэффиціенты удовлетворяютъ соотношенію $ad^2 - bde + fb^2 = 0$, и которое поэтому можно представить подъ видомъ

$$(2y + 3x - 5)(y - 2) = 0$$

Приравнивая нулю перваго множителя, получимъ рѣшенія $y = 1 + 3t$, $x = 1 - 2t$. Приравнявъ нулю второго множителя, найдемъ $y = 2$, не содержащееся между предыдущими рѣшеніями, причемъ x остается совершенно произвольнымъ.

Если $c = 0$ и $a = 0$, въ ур-ніи недостаетъ членовъ съ квадратами обоихъ неизвѣстныхъ; заключенія остаются тѣ-же, а дробный членъ принимаетъ видъ

$$\frac{bf - de}{b(by + d)}.$$

Если числитель этой дроби обращается въ нуль, что можетъ имѣть мѣсто только при соотношеніи

$$bf - de = 0,$$

такъ какъ $b \gtrless 0$ (ибо ур-ніе было бы въ такомъ случаѣ только 1-й ст.), ур-нію можно дать видъ

$$b^2xy + bdx + bey + bf = 0 \quad \text{или} \quad (by + d)(bx + e) = 0.$$

Это ур-ніе или вовсе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній; или оно можетъ быть удовлетворено опредѣленнымъ значеніемъ одного неизвѣстнаго при произвольномъ значеніи другого, или, наконецъ, когда и e и d дѣлятся на b, каждое изъ неизвѣстныхъ остается совершенно произвольнымъ, а другое получаетъ опредѣленное значеніе.

Найдя цѣлыя рѣшенія, остается выбрать изъ нихъ положительныя.

875. Примѣры.—I. *Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$2xy - 4x^2 + 12x - 5y = 11.$$

Это есть ур-ніе первой степени относительно y. Выражая y черезъ x, находимъ:

$$y = \frac{4x^2 - 12x + 11}{2x - 5},$$

и исключая цѣлое, имѣемъ:

$$y = 2x - 1 + \frac{6}{2x - 5}.$$

Чтобы y было числомъ цѣлымъ, необходимо должно быть $\frac{6}{2x-5}$ числомъ цѣлымъ; мы найдемъ это цѣлое, приравнивая $2x - 5$ дѣлителямъ 6 [illegible] ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Такимъ образомъ получаемъ ур-нія

$$2x - 5 = \pm 1, \quad 2x - 5 = \pm 2, \quad 2x - 5 = \pm 3, \quad 2x - 5 = \pm 6.$$

Изъ нихъ второе и четвертое не допускаютъ цѣлыхъ рѣшеній, а первое и третье даютъ для x значенія 3, 2, 4, 1. Вычисляя соотвѣтствующія значенія y, находимъ рѣшенія

$$x = 3, \quad y = 11; \quad x = 2, \quad y = -3; \quad x = 4, \quad y = 9; \quad x = 1, \quad y = -1,$$

изъ которыхъ оставляемъ только положительныя рѣшенія, и такимъ образомъ находимъ двѣ пары:

$$x = 3, \quad y = 11; \quad x = 4, \quad y = 9.$$

II. *Рѣшить въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$3x^2 \ldots 7xy - 2x - 5y - \ldots = \ldots$$

Рѣшая относительно y, имѣемъ

$$y = \frac{-3x^2 + 2x + 35}{7x - 5}.$$

Исключая цѣлое число, для чего обѣ части множимъ на 7, находимъ

$$7y = -3x - \frac{x - 245}{7x - 5}.$$

Умножая обѣ части на 7, и снова исключая цѣлое имѣемъ

$$49y = -21x - 1 + \frac{1710}{7x - 5}.$$

Приравнивая, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, $7x - 5$ множителямъ числа 1710, найдемъ, что единственныя положительныя цѣлыя рѣшенія суть

$$x = 2, \quad y = 3, \quad x = 1, \quad y = 17.$$

III. Въ ур—ніи $3x + 3xy - 4y = 14$, выражая y черезъ x, имѣемъ,

$$y = \frac{14 - 3x}{3x - 4} = -1 + \frac{10}{3x - 4};$$

затѣмъ $$3x - 4 = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 5, \ \pm 10,$$

откуда $$x = 2, \ y = 4; \ x = 3, \ y = 1.$$

876. Покажемъ теперь, какъ рѣшается въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ общее уравненіе второй степени съ 2 неизвѣстными, которому для удобства дадимъ видъ:

$$ay^2 + 2hxy + bx^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Рѣшая его какъ квадратное относительно y, найдемъ

$$ay + hx + f = \pm\sqrt{(h^2 - ab)x^2 + 2(hf - ag)x + (f^2 - ac)}. \qquad (1)$$

Чтобы y и x могли имѣть положительныя цѣлыя значенія, подкоренное выраженіе, которое для краткости представимъ въ видѣ $px^2 + 2qx + r$, должно быть точнымъ квадратомъ; пусть

$$px^2 + 2qx + r = z^2.$$

Рѣшая это ур—ніе какъ квадратное въ x, имѣемъ

$$px + q = \pm\sqrt{q^2 - pr + pz^2},$$

и подобно предыдущему подкоренное количество должно быть точнымъ квадратомъ; пусть оно $= t^2$, такъ что

$$t^2 - pz^2 = q^2 - pr.$$

Если это ур—ніе не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ, то и данное ур—ніе не можетъ имѣть положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній.

Если a, h, b — всѣ положительны, то ясно, что число рѣшеній будетъ ограниченное; въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большихъ численныхъ значеніяхъ x и y знакъ первой части ур—нія зависитъ отъ знака трехчлена $ay^2 + 2hxy + bx^2$, слѣд., первая часть при большихъ положительныхъ цѣлыхъ значеніяхъ x и y не можетъ быть нулемъ.

Также, если $h^2 - ab$ въ (1) отрицательно, число рѣшеній будетъ ограничено.

Примѣръ. *Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ ур—ніе*

$$x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x - 20y = 29.$$

Рѣшая это ур—ніе какъ квадратное относительно x, имѣемъ

$$x = 2y + 1 \pm \sqrt{30 + 24y - 2y^2}.$$

Написавъ подрадикальное количество въ видѣ $102 - 2(y - 6)^2$, замѣчаемъ, что $(y - 6)^2$ не можетъ быть больше 51. Испытаніями убѣждаемся, что подрадикальное количество дѣлается точнымъ квадратомъ, когда будетъ $(y - 6)^2 = 1$, или 49. Отсюда находимъ, что положительныя цѣлыя значенія y суть 5, 7 и 13. Когда $y = 5$, будетъ $x = 21$, или 1; когда $y = 7$, тогда $x = 25$, или 5; когда $y = 13$, будетъ $x = 29$, или 25.

877. Уравненіе $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = k$ можетъ быть рѣшено въ положительныхъ цѣлыхъ числахъ, если лѣвая часть его можетъ быть разложена на два раціональныхъ линейныхъ множителя. Напр., пусть требуется рѣшить ур—ніе

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 16.$$

Первая часть разлагается въ произведеніе $(3x - 2y)(2x - 3y)$; и какъ x и y должны быть числами цѣлыми, то оба множителя—числа цѣлыя, изъ которыхъ одно должно равняться одному изъ множителей 16-ти, а другое—другому. Такимъ образомъ, вопросъ приводится къ рѣшенію 5 системъ совмѣстныхъ ур—ній.

$$\begin{aligned}
3x - 2y &= \pm 16, & 2x - 3y &= \pm 1;\\
3x - 2y &= \pm 8, & 2x - 3y &= \pm 2;\\
3x - 2y &= \pm 4, & 2x - 3y &= \pm 4;\\
3x - 2y &= \pm 2, & 2x - 3y &= \pm 8;\\
3x - 2y &= \pm 1, & 2x - 3y &= \pm 16;
\end{aligned}$$

Отсюда находимъ, что $5x$ должно равняться

$$\pm(48 - 2), \quad \pm(24 - 4), \quad \pm(12 - 8), \quad \pm(6 - 16), \quad \pm(3 - 32),$$

и слѣдовательно, единственныя цѣлыя значенія x суть 4 и 2, а соотвѣтствующія значенія y суть 2 и 4.

878. Мы видѣли, что рѣшеніе общаго ур—нія можно привести въ зависимость отъ рѣшенія ур—нія вида $x^2 \pm Ny^2 = \pm a$, гдѣ N и a положительныя цѣлыя числа.

Уравненіе $x^2 + Ny^2 = -a$, очевидно, не имѣетъ дѣйствительныхъ рѣшеній, такъ какъ сумма положительныхъ чиселъ не можетъ равняться отрицательному числу. Уравненіе $x^2 + Ny^2 = a$ имѣетъ опредѣленное число рѣшеній, которыя можно найти попытками. Остается разсмотрѣть ур—нія вида $x^2 - Ny^2 = \pm a$.

879. Теорема. *Уравненіе $x^2 - Ny^2 = 1$ всегда можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ.*

Обратимъ $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь; пусть $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ будутъ три послѣдовательныя подходящія дроби, и пусть полное частное, соотвѣтствующее дроби $\frac{p''}{q''}$, будетъ $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$. Изъ теоріи непрерывныхъ дробей (§ [illegible]) найдемъ, что

$$r_n(pq' - p'q) = Nq'^2 - p'^2 \ . \ . \ . \ (1).$$

Но въ концѣ періода $r_n = 1$. Въ самомъ дѣлѣ пусть $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$ будетъ полное частное, непосредственно предшествующее второму полному частному $\frac{\sqrt{N} + a_1}{r_1}$.

какъ только повторяется, то $\frac{\sqrt{N}+a_r}{r_r}$ и $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ будутъ два послѣдовательныя полныя частныя; слѣд.

$$a_r + a_1 = r_n b_n,\quad r_n r_1 = N - a_1^2$$

но $N - a_1^2 = r_1$, слѣд. $r_n = 1$. Итакъ, $Nq'^2 - p'^2 = p'q - pq'$, гдѣ $\frac{p}{q}$ есть предпослѣднее приближеніе нѣкотораго періода.

Если число частныхъ въ періодѣ — четное, то $\frac{p}{q}$ есть *четное* приближеніе; слѣд., оно больше $\sqrt{N}$, и потому больше $\frac{p'}{q'}$, такъ что $p'q - pq' = 1$. Въ такомъ случаѣ, $p'^2 - Nq'^2 = 1$, и слѣд.

$$x = p',\quad y = q'$$

даютъ рѣшеніе ур-нія $x^2 - Ny^2 = 1$.

Такъ какъ $\frac{p}{q}$, есть предпослѣднее приближеніе какого угодно періода, то число рѣшеній неограниченно.

Если число частныхъ въ періодѣ нечетное, то предпослѣднее приближеніе въ первомъ періодѣ есть приближеніе *нечетное*, но предпослѣднее приближеніе во второмъ періодѣ есть приближеніе *четное*. Слѣд., цѣлыя рѣшенія получимъ, полагая $x = p'$, $y = q'$, гдѣ $\frac{p'}{q'}$, есть предпослѣднее приближеніе во второмъ, четвертомъ, шестомъ, . . . періодахъ. Заключаемъ, что число рѣшеній неограниченно.

880. *Рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ ур-нія* $x^2 - Ny^2 = -1$.

Если число частныхъ въ періодѣ — *нечетное*, и если $\frac{p'}{q'}$ есть *нечетное* предпослѣднее приближеніе въ какомъ-либо періодѣ, то $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$, и слѣд., $p'q - pq' = -1$.

Въ этомъ случаѣ $p'^2 - Nq'^2 = -1$, и цѣлое рѣшеніе ур-нія $x^2 - Ny^2 = -1$ найдемъ, полагая $x = p'$, $y = q'$, гдѣ $\frac{p'}{q'}$ есть предпослѣднее приближеніе въ первомъ, третьемъ, пятомъ,... періодахъ.

881. Примѣръ. *Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе* $x^2 - 13y^2 = \pm 1$.

Имѣемъ: $\sqrt{13} = | 3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}; . . . |$.

Число частныхъ въ періодѣ — нечетное, предпослѣднее приближеніе въ первомъ періодѣ $= \frac{18}{5}$; слѣд., $x = 18$, $y = 5$ представляетъ одно изъ рѣшеній ур-нія $x^2 - 13y^2 = -1$.

Предпослѣднее приближеніе во второмъ періодѣ $= \frac{649}{180}$; слѣдовательно, $x = 649$, $y = 180$ даетъ еще пару рѣшеній ур-нія $x^2 - 13y^2 = 1$.

Составляя послѣдовательныя приближенія періодовъ, можно такимъ путемъ получить сколько угодно цѣлыхъ рѣшеній предложенныхъ ур-ній.

882. *Когда имѣется одна пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ур-нія* $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, *можно получить сколько угодно такихъ рѣшеній* слѣдующимъ способомъ.

Пусть будетъ $x = \alpha$, $y = \beta$ одна пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ур-нія $x^2 - Ny^2 = \pm 1$, въ такомъ случаѣ при всякомъ цѣломъ положительномъ n будемъ $(\alpha^2 - N\beta^2)^n = \pm 1$. Слѣдовательно, $x^2 - Ny^2 = (\alpha^2 - N\beta^2)^n$ или

$$(x + y\sqrt{N})(x - y\sqrt{N}) = (\alpha + \beta\sqrt{N})^n (\alpha - \beta\sqrt{N})^n.$$

Положивъ $x + y\sqrt{N} = (\alpha + \beta\sqrt{N})^n$, $x - y\sqrt{N} = (\alpha - \beta\sqrt{N})^n$, найдемъ отсюда

$$x = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^n + (\alpha - \beta\sqrt{N})^n}{2},$$

$$y = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^n - (\alpha - \beta\sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}}.$$

Значенія x и y, представляемыя этими выраженіями, суть цѣлыя положительныя числа. Полагая въ нихъ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, получимъ [illegible] цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Такъ:

$$\begin{array}{lll}
n = 0, & x = 1 & y = 0 \\
\phantom{n = {}}1 & \phantom{x = {}}\alpha & \phantom{y = {}}\beta \\
\phantom{n = {}}2 & \phantom{x = {}}\alpha^2 + N\beta^2 & \phantom{y = {}}2\alpha\beta \\
\phantom{n = {}}3 & \phantom{x = {}}\alpha^3 + 3N\alpha\beta^2 & \phantom{y = {}}3\alpha^2\beta + N\beta^3 \\
\phantom{n = {}}4 & \phantom{x = {}}\alpha^4 + 6N\alpha^2\beta^2 + N^2\beta^4 & \phantom{y = {}}4\alpha^3\beta + 4N\alpha\beta^3 \\
\phantom{n = {}}5 & \phantom{x = {}}\alpha^5 + 10N\alpha^3\beta^2 + 5N^2\alpha\beta^4 & \phantom{y = {}}5\alpha^4\beta + 10N\alpha^2\beta^3 + N^2\beta^5 \\
\phantom{n = {}}6 & \phantom{x = {}}\alpha^6 + 15N\alpha^4\beta^2 + 15N^2\alpha^2\beta^4 + N^3\beta^6, & \phantom{y = {}}6\alpha^5\beta + 20N\alpha^3\beta^3 + 6N^2\alpha\beta^5, \ldots
\end{array}$$

Подобно этому, если $x = \alpha$, $y = \beta$ есть одна пара цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $x^2 - Ny^2 = -1$, и если n *нечетное* цѣлое положительное число, то

$$x^2 - Ny^2 = (\alpha^2 - N\beta^2)^n,$$

откуда найдемъ тѣ же формулы x и y, что и вышенайденныя, но n нужно полагать = только 1, 3, 5, . . .

883. Положивъ $x = a\xi$, $y = a\eta$, мы приведемъ уравненіе $x^2 - Ny^2 = \pm a^2$ къ виду $\xi^2 - N\eta^2 = \pm 1$, рѣшать которое умѣемъ.

884. Мы видѣли, что

$$p'^2 - Nq'^2 = -r_n(pq' - p'q) = \pm r_n.$$

Отсюда видно, что если a есть знаменатель нѣкотораго полнаго частнаго, получающагося при обращеніи $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь, и если $\frac{p}{q}$ есть приближеніе, какъ разъ предшествующее этому полному частному, то уравненіе $x^2 - Ny^2 = \pm a$ удовлетворяется значеніями $x = p$, $y = q$.

Нечетныя приближенія всѣ меньше $\sqrt{N}$, четныя — всѣ больше $\sqrt{N}$; поэтому, если $\frac{p}{q}$ есть четное приближеніе, то $x = p$, $y = q'$ есть рѣшеніе уравненія $x^2 - Ny^2 = + a$; если же $\frac{p}{q'}$, есть нечетное приближеніе, то $x = p$, $y = q$ есть рѣшеніе ур—нія $x^2 - Ny^2 = - a$.

Такимъ путемъ мы можемъ найти рѣшенія одного изъ ур—ній $x^2 - Ny^2 = \pm a$ только въ томъ случаѣ, когда a есть одинъ изъ знаменателей [illegible] при обращеніи $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь. Такъ, обращая въ непрерывную дробь $\sqrt{7}$, найдемъ:

$$\sqrt{7} = 2, 1, 1, 1, 4, \ldots;$$

Полныя частныя

$$\frac{\sqrt{7} + 2}{3}, \quad \frac{\sqrt{7} + 1}{2}, \quad \frac{\sqrt{7} + 1}{3}, \quad \frac{\sqrt{7} + 2}{1}, \ldots$$

и т. д., имѣютъ знаменателями числа 3, 2, 3, 1.

Послѣдовательныя приближенія суть:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \ldots$$

и если взять циклъ уравненій

$$x^2 - 7y^2 = -3, \quad x^2 - 7y^2 = 2, \quad x^2 - 7y^2 = -3, \quad x^2 - 7y^2 = 1,$$

то найдемъ, что они удовлетворяются значеніями

$$x = 2, \ 3, \ 5, \ 8, \ 37, \ 45, \ 82, \ 127, \ldots$$
$$y = 1, \ 1, \ 2, \ 3, \ 14, \ 17, \ 31, \ 48, \ldots$$

Иногда можно найти пару положительныхъ цѣлыхъ рѣшеній уравненія $x^2 - Ny^2 = \pm a$, когда a не есть одинъ изъ выше указанныхъ знаменателей, путемъ попытокъ.

Такъ, легко убѣдиться, что ур—ніе $x^2 - 7y^2 = 53$ удовлетворяется, если положить $x = 9$, $y = 2$. Имѣя одну пару цѣлыхъ рѣшеній, можемъ найти сколько угодно такихъ рѣшеній.

885. До сихъ поръ мы предполагали, что N не есть точный квадратъ. Если N будетъ точнымъ квадратомъ, ур—ніе будетъ $x^2 - n^2y^2 = a$, и рѣшается такъ.

Пусть $a = b.c$, гдѣ b и c суть цѣлыя положительныя числа и $b > c$; ур—ніе можно написать такъ:

$$(x + ny)(x - ny) = b.c.$$

Положивъ $x + ny = b$, $x - ny = c$, рѣшимъ эту систему.

Если найденныя этимъ путемъ значенія x и y будутъ цѣлыя, то найдемъ одну пару рѣшеній; приписывая b и c всѣ допустимыя значенія, найдемъ другія.

Примѣръ. *Найти два цѣлыя положительныя числа, если разность ихъ квадратовъ равна 60?*

Назвавъ искомыя числа буквами x и y, имѣемъ ур—ніе $x^2 - y^2 = 60$, или $(x + y)(x - y) = 60$.

60 разлагается на слѣдующія пары сомножителей:

$$1 \times 60, \quad 2 \times 30, \quad 3 \times 20, \quad 4 \times 15, \quad 5 \times 12, \quad 6 \times 10.$$

Искомыя значенія получатся изъ ур—ній

$$x + y = 30, \quad x - y = 2; \qquad x + y = 10, \quad x - y = 6.$$

Эти значенія суть: 16 и 14; 8 и 2.

Остальныя системы дадутъ дробныя значенія для x и y.

Ц. 100р.

КОНЕЦЪ.

r. 1026.